Miskolci Egyetem

GÉPÉSZMÉRNÖKI ÉS INFORMATIKAI KAR

Kiterjesztett újságárus modell alkalmazása az igény szerinti tömeggyártás készletgazdálkodási problémáiban

PhD értekezés

Készítette:

Mileff Péter

okleveles mérnök-informatikus

Hatvany József Informatikai Tudományok Doktori Iskola

Doktori iskola vezető:

Prof. Dr. Tóth Tibor

A műszaki tudomány doktora

Tudományos vezető:

Dr. Nehéz Károly

PhD

Miskolc, 2007

Alulírott, **Mileff Péter** kijelentem, hogy ezt a doktori értekezést magam készítettem és abban csak a megadott forrásokat használtam fel. Minden olyan részt, amelyet szó szerint, vagy azonos tartalomban, de átfogalmazva más forrásból átvettem, egyértelműen, a forrás megadásával megjelöltem.

A dolgozat bírálatai és a védésről készült jegyzőkönyv a későbbiekben, a Miskolci Egyetem dékáni hivatalában lesz elérhető.

.....

Miskolc, 2007. november 27.

A témavezető ajánlása

Mileff Péter, „Kiterjesztett újságárus modell alkalmazása az igény szerinti tömeggyártás készletgazdálkodási problémáiban” című PhD értekezéshez

Mileff Péter jelölt szakmai pályafutását már harmadéves műszaki informatikus hallgató korától figyelemmel kísérem. Alkalmazásfejlesztő szakirányos hallgatóként korán bekapcsolódott a Miskolci Egyetem Alkalmazott Informatikai Tanszékének kutatási munkájába, majd 2003 szeptemberében megkezdte tanulmányait a Hatvany József Informatikai Tudományok Doktori Iskolában. Az elmúlt három év kitartó és eredményes munkájának köszönhetően sikeres abszolutóriumot szerzett és elindította a doktori eljárását.

A doktori disszertáció a készletgazdálkodási modellek vizsgálatával foglalkozik, majd e klasszikusnak számító problémát sikeresen alkalmazza a modern tömeggyártási problémákra is. Az alapmodell számos kiterjesztési lehetőségének elemzése mellett a különböző korlátok, véges kapacitások, termékkifutás fogalmaiból levezetett matematikai formulákat sikeresen integrálja általános modellekbe. A kifejlesztett új módszereket többféleképpen is implementálja (előbb egy klasszikus matematikai szoftverben, majd később különálló alkalmazásként). A disszertáció bemutat egy modern webes környezetet, amely igazolja a modellek működését és megmutatja az integrálási lehetőségeit egy valós termelésinformatikai rendszerbe.

Az elmúlt évek sikeres munkája alapján a jelölt bizonyította, hogy képes az önálló kutatómunkára. A téziseit a Hatvany József Informatikai Tudományok Doktori Iskola publikációs követelményeinek eleget téve magyar és angol nyelven publikálta és szakmai fórumokon bemutatta. Az értekezés gondos munkát tükröz, szövegezése jó stílusú, ábrái jól alátámasztják a mondanivalót. Mindezek figyelembevételével Mileff Péter jelöltnek javasolom a PhD cím odaítélését.

Miskolc, 2007. november 27.

Dr. Nehéz Károly
tudományos vezető

Köszönetnyílvánítás

Az értekezés a Hatvany József Informatikai Tudományok Doktori Iskola keretein belül, a Miskolci Egyetem Alkalmazott Informatikai Tanszékén 2004-ben kezdett kutatómunkám eredményeit foglalja össze. A kutatás során barátaim, kollégáim támogatását élveztem. Köszönettel tartozom mindazoknak, akik lehetővé tették, illetve közvetlen vagy közvetett módon megkönnyítették a dolgozat elkészülését.

Hálás vagyok tudományos vezetőmnek, **Dr. Nehéz Károly** egyetemi adjunktusnak, aki figyelmem a készletgazdálkodási modellek, és módszerek felé fordította és precíz, tudatos kutatómunkára ösztönzött. Sokan nyújtottak segítséget azzal, hogy részben, vagy egészben átolvasták a disszertáció korai változatait, és építő javaslatokat tettek. Külön köszönettel tartozom **Dr. Erdélyi Ferenc** kollégámnak, aki ötletei sokaságával és kitartó támogatásával segítette a kutatómunkámat. Köszönet illeti **Dr. Tóth Tibor** professzort, aki a Doktori Iskola vezetőjeként, tanszékvezetőként megteremtette a nyugodt munkához való feltételeket, valamint sok hasznos tanácsot nyújtott a disszertáció megírása során.

Köszönöm a Miskolci Egyetem Alkalmazott Informatikai Tanszék kollektívájának a szakmai és erkölcsi támogatást.

Végül szeretném megköszönni kedvesem, családom és barátaim támogatását.

Kiterjesztett újságárus modell alkalmazása az igény szerinti tömeggyártás készletgazdálkodási problémáiban

Doktori (PhD) értekezés

írta

Mileff Péter

Összefoglalás

A kutatás és az így készült disszertáció szorosan vett célja olyan készletgazdálkodási modellek kidolgozása, elemzése és kísérleti implementálása, melyek jó eséllyel alkalmazhatók az igény szerinti tömeggyártás mai körülményei között is. Ezek alapvető tulajdonságai, hogy lehetőséget adnak jellegzetes bizonytalanságok kezelésére, a teljes költség szempontjából optimális megoldás előállítására törekszenek, tekintetbe vesznek fontos gyakorlati korlátozásokat és mindezzel együtt válaszidejük gyors, így biztosítva lehetőséget a „Mi lenne ha?" típusú menedzseri döntések alkalmazásában, ahol több alternatíva szinte azonnali kiértékelésére van szükség.

Az értekezés alapvetően két nagyobb részre tagolódik. Az első részben a korábbi eredmények kapnak hangsúlyt. A bevezetésben megismerhetjük a munka motivációját, majd a kitűzött célok, az alapvető készletgazdálkodási fogalmak tárgyalására és a módszerek kategorizálására kerül sor. A kutatási munka bázisát az irodalomban „újságárus" problémaként ismert periodikus, költség alapú, nem determinisztikus modell képezi. A 3. fejezet a modell kritikus raktárkészlettel való alkalmazási lehetőségeit és tulajdonságait részletesen bemutatva tisztán rávilágít arra, hogy a modell ilyen formában csak nehezen adaptálható az igény szerinti tömeggyártás valós készletgazdálkodási problémáinak megoldására. A több periódusos problémák a klasszikus modell korlátozás programozással, valamint genetikus algoritmussal történő megoldása azt a következtetést eredményezte, hogy analitikus modellre van szükség a kellő hatékonyság elérése érdekében.

A disszertáció további részében az újságárus modell új megközelítésű kiterjesztéseinek analitikus eredményei kerülnek előtérbe. A kiterjesztett modell követve a klasszikus újságárus koncepciót analitikus úton biztosít lehetőséget több periódus együttes, gyors kezelésére, optimális raktározási mennyiségének meghatározására. A piaci előrejelzésekből származó igényinformációk alapján a szerelvény, komponens és speciális anyag gyártó beszállító cégek termelésütemezésében fontos az egyszeri gyártásindítással kielégíthető időszakok (ciklusok) számának helyes megválasztása. A kidolgozott fajlagos költségmodell bevezetésével, így az egyszeri gyártásindítással kielégíthető periódusok optimális darabszámának meghatározásával a modell kilép a hagyományos (t, S) periodikus modellek családjából.

A termékek életciklusaiban jelentkező keresletingadozások problémájával szinte minden kereskedő, beszállító cég szembesül, és rendszerint tapasztalatokon alapuló menedzser döntések segítségével próbál ellene védekezni. Az értekezés a korábbi eredményekre alapozva ismerteti a „termékkifutás" probléma kezelésének egy lehetséges analitikus matematikai modelljét. A kifu-

tás időben növekvő bizonytalanságát Poisson valószínűségi változóval modellezve a termékkifutás folyamata zárt alakú megoldással, az eloszlásfüggvény típusától függetlenül kifejezhető.

A tapasztalat szerint piaci versenyhelyzetben a cégek a lehető legtöbb megrendelés elfogadására törekednek, amely során gyakran megjelenik a kapacitáshiány problémája. A problémát két alapvető, költség alapú és kiszolgálási szint alapú csoportra bontva az értekezés 6. fejezete különböző megoldási módszerereket javasol. A bemutatott új, heurisztikus módszer hatékony megoldást kínál a több termékes és több periódusos problémákra.

A partnerek közötti együttműködésben fontos szerepet kap a szerződésekben rögzített együttműködési szint biztosítása. A disszertáció 7. fejezete rámutat arra, hogy a kiterjesztett modellben megjelenő büntető költség a partnerek közötti kooperatív kapcsolati viszonyban „kontroll" paraméterként értelmezhető. A kidolgozott analitikus összefüggéssel a megfelelő kiszolgálási szintet biztosító kontroll paraméter meghatározható.

Az értekezésben megjelenő modellek és módszerek egy korszerű szoftverfejlesztői eszközökkel megvalósított, J2EE fejlesztési környezet alkalmazásával kifejlesztett prototípus alkalmazásba integrálódnak, melynek célja a készletgazdálkodási folyamatok tervezésének és modellezésének támogatása. A platform-független alkalmazás felhasználó vezérelt, online szimulációk elvégzésével képes az optimális politika gyors kialakítására.

Tartalomjegyzék

Jelölések jegyzéke **9**

Rövidítések jegyzéke **11**

1. Bevezetés **13**
1.1. Tudományos célkitűzések . . . 15
1.2. Készletgazdálkodás menedzsment . . . 16
1.3. A készletgazdálkodási rendszer . . . 18
1.3.1. A termékszintű készletezési rendszer . . . 19
1.4. Készletgazdálkodási modellek és költségek típusai . . . 20
1.5. A sztochasztikus modellekről általában . . . 24

2. Történeti áttekintés **26**
2.1. Az optimális tételnagyság modell és általánosításai . . . 26
2.2. Az (s,S) modellek . . . 28
2.3. A (t,S) és (s,q) modellek . . . 29
2.4. Prékopa-Ziermann modellek . . . 30
2.5. Többtermékes modellek . . . 30
2.6. Az újságárus modell . . . 31
2.7. Napjaink készletgazdálkodása . . . 32

3. Az újságárus modell alkalmazása az igény szerinti tömeggyártásban **35**
3.1. Analitikus megközelítés . . . 35
3.1.1. A célfüggvény összetevői . . . 37
3.1.2. Az optimális készletezési mennyiség meghatározása . . . 38
3.1.3. A kritikus raktárkészlet alkalmazása a modellben . . . 39
3.1.4. Szimulációk a politika ellenőrzésére . . . 40

4. A raktározási probléma kiterjesztése több periódus együttes kezelésére **43**
4.1. A több periódus vizsgálata a korlátozás programozás módszerével . . . 44
4.2. A készletgazdálkodási probléma megoldása genetikus algoritmus segítségével . . . 48
4.2.1. A genetikus algoritmus rövid áttekintése . . . 48
4.2.2. Az evolúciós modell . . . 49
4.2.3. Kereszteződés és öröklődés . . . 51

4.2.4. A mutáció 51
4.2.5. Szimulációs eredmények 52

5. A kiterjesztett újságárus modell 54
5.1. Az újságárus modell kiterjesztése két periódus együttes lefedésére 54
5.2. A készletezési probléma értelmezése n darab együttes periódusra 56
5.3. Fajlagos költségmodell 58
5.3.1. Szimulációs eredmények 60
5.4. A beszállítói készletezési politika n. gyártási periódusra vonatkozó (várható) költsége 62
5.5. A termékkifutás problémájának értelmezése 63
5.5.1. A termékkifutás egy lehetséges modellezése 65
5.5.2. Gyakorlati alkalmazás 67

6. Termelői kapacitáskorlátok alkalmazása a kiterjesztett modellben 68
6.1. Az egy termékes, egy periódusos modell 68
6.2. A több termékes egy periódusos modell 69
6.3. Egy termékes, több periódusos modell 71
6.3.1. A kiszolgálási szint alapú politika 71
6.3.2. A költség alapú politika 72
6.4. Több termékes, több periódusos modell 74
6.4.1. A heurisztikus megközelítési módszer 74
6.4.2. Az algoritmus és a módszer további részletei 76
6.4.2.1. Az eljárás indítása és a kapacitáskorlát feltétel vizsgálata 76
6.4.2.2. Optimum esélyes módosítások kiválasztása 77
6.4.2.3. Összevonás kombináció kiválasztása 78

7. A büntető költség, mint kontroll paraméter 81
7.1. Egy periódusos gyártás 82
7.2. Több periódusos összevont gyártás 84

8. Web alapú készlet-irányítási rendszer 86
8.1. J2EE platform 87
8.2. Modern grafikus felhasználói felület 87
8.3. A „Modell – Nézet – Vezérlő” tervezési minta és a készlet-irányítási rendszer . . . 88
8.3.1. Általános válaszlap felépítése 89
8.4. Az alkalmazás bemutatása 91

9. Új tudományos eredmények 95

10. Eredmények hasznosítása 99

11. További kutatási feladatok 100

Irodalomjegyzék 104

12. A tézisekhez kapcsolódó tudományos publikációk **113**

A. Függelék **118**

A.1. Az optimális raktárkészlet egy periódus esetén 119
A.2. Mintafeladat egy periódusos gyártásra 120
A.3. Az optimális raktárkészlet meghatározása két periódus együttes gyártása esetén 122
A.4. Mintafeladat két periódusos együttes gyártásra 124
A.5. Az optimális raktárkészlet meghatározása n periódus együttes gyártása esetén . . 125
A.6. A több termékes, több periódusos heurisztikus megoldási módszer kapacitáskorlátos modelljének megoldó algoritmusa 127
A.7. A több termékes kapacitáskorlát probléma megoldási módszerének alkalmazása egy mintapéldán keresztül 131
A.8. A termékkifutás probléma megoldása 133
A.8.1. A megoldás két periódus együttes gyártása esetén 133
A.8.2. A termékkifutás költségfüggvénye három periódusra 137
A.8.3. A termékkifutás költségfüggvénye tetszőleges hosszú véges időhorizontra . 140

Jelölések jegyzéke

c_f	Setup költség (fixed cost). Ez a költség akkor merül fel, amikor egy termék sorozatgyártása vagy gyártási művelete elkezdődik. [Ft]
c_r	Egy beszállítói áru darabonkénti (termék egységenkénti) ára. [Ft/mennyiség-egység]
c_v	Arányos költség (variable cost). Ez a költségfajta jelenti egy termék egységének gyártási költségét. [Ft/mennyiség-egység]
p	Büntető költség (penalty cost). Ha kevesebb anyag (komponens) van a raktáron, mint amennyi aktuálisan kielégítené a felmerült igényt, akkor ez a büntetőköltsége a ki nem elégített rendeléseknek (back-order). [Ft/mennyiség-egység]
h	A termék összegzett raktározási költsége (holding cost). Értéke általában két költségfajta összege: $h = H + h_t$. [Ft/mennyiség-egység]
H	A termék forgótőke lekötésének költsége. [Ft/mennyiség-egység]
h_t	A termékre értelmezett eredő tárolási költség. [Ft/mennyiség-egység]
D	Egy termékre felmerülő, adott időszakra vagy időpontra vonatkozó vevői igény, amely lehet determinisztikus érték vagy egy tetszőleges eloszlású valószínűségi változó. (Általában egyenletes vagy normális eloszlásnak tekintjük.) [mennyiség-egység]
$F(D)$	A D valószínűségi változó eloszlásfüggvénye.
$f(D)$	A D valószínűségi változó sűrűségfüggvénye.
$E[D]$	A D valószínűségi változó várható értéke. (Rövid jelöléssel: μ).
σ	A D valószínűségi változó eloszlásának szórása.
q	Egy késztermék raktározott (készletgazdálkodás alá vont) mennyisége, döntési változó. Ha gyártás vagy beszerzés nem történt, akkor ez a mennyiség megegyezik a kezdő (induló) raktárkészlettel. [mennyiség-egység]

I_i	Az i. rendelési periódus induló raktárkészlete. Feltételezzük, hogy a készletgazdálkodó (beszállító) a tervezési, irányítási, gazdálkodási periódus kezdetén I_i darab késztermékkel rendelkezik a raktárában. [mennyiség-egység]
m	m jelöli a készletgazdálkodási döntéssel indított gyártási (beszerzési) termékmennyiséget az adott periódusban. Értéke az optimális és az előző periódusból raktáron maradt termék mennyiségétől függ. [mennyiség-egység]
Z	Adott időperiódusokban legyártott termék mennyiségek átlagának összege. [mennyiség-egység]
$K()$	A beszállító, egy termék készletgazdálkodására vonatkoztatott teljes, összesített költsége az alkalmazott modellnek megfelelően. ($K_i()$ jelenti az i darab együtt gyártott periódusok összköltségét). [Ft]
$\hat{K}_i$	A készletgazdálkodás fajlagos (termékegységre vonatkoztatott) költsége. Általában i darab együtt gyártott periódus fajlagos költségét jelenti. [Ft/ mennyiség-egység /periódusidő]
CSL	A készletgazdálkodási ciklus kiszolgálási minőségét jellemző, a kiszolgálás szintjeként értelmezett mutató. (cycle service level) [%]
ξ	Egy termék raktári „ki nem fogyásának" (hiányának) valószínűségeként értelmezett kritikus tényező. (in-stock probability).
ζ	Annak a valószínűsége, hogy egy termék kifogy a raktárból. $\zeta = 1 - \xi$ (stockout probability).
s	Kritikus készletszint, döntési változó. Általában az a készletszint, amelynél a gyártás (feltöltés) és „nem gyártás" költségei megegyeznek. [mennyiség-egység]
u	Egy termék legyártásának (beszerzésének) kapacitásszükséglete globális kapacitásmodell esetén.
C	Kapacitáskorlát. A modellben a termékek gyártási igényei ezen a közös kapacitáson osztoznak. [mennyiség-egység/periódus]
d	Egy termék elavulási, „kifutás" veszteségi tényezője egy adott időhorizonton. Tapasztalati tényező. [Ft/mennyiség-egység]
$R(i, \lambda)$	Egy adott termék kifutásának valószínűségi, Poisson eloszlásfüggvénye.
λ	a Poisson eloszlás paramétere. Egész szám, amely megmutatja, hogy hányadik periódusban várható a termékkifutás.
FKV	Egy termék fajlagos költség-változásainak összege.
v	A várható hiány darabszáma egy adott termék esetén a feladatban megadott időtartamra vonatkoztatva. [mennyiség-egység]

Rövidítések jegyzéke

SL	–	Servive Level – kiszolgálási szint (kiszolgálási minőség)
SCM	–	Supply Chain Management – ellátási lánc menedzsment
FR	–	Fill Rate – igény kielégítési ráta
IC	–	Inventory Control – készletirányítás, -vezérlés
VMI	–	Vendor Managed Inventory – beszállítók által menedzselt készlet
ERP	–	Enterprise Resource Planning – vállalati erőforrások tervezése
JIT	–	Just In Time – percre kész gyártás
IT	–	Information Technogy – információs technológia
EOQ	–	Economic Order Quantity – gazdaságos rendelési nagyság
EDI	–	Electronic Data Interchange – elektronikus adatcsere
CR	–	Critical fractile Ratio – kritikus faktor
GA	–	Genetic Algorithm – genetikus algoritmus
J2EE	–	Java 2 Platform, Enterprise Edition
EIS	–	Enterprise Information System – vállalati információs rendszer
JSP	–	JavaServer Pages – jáva szerver oldalak
JSF	–	JavaServer Faces
GUI	–	Graphical User Interface – grafikus felhasználói felület
HTML	–	HyperText Markup Language – hiperszöveges jelölőnyelv
CSS	–	Cascading Style Sheets – HTML stíluslap leíró
CSL	–	Cycle Service Level – egy gyártási ciklus kiszolgálási szintje
MVC	–	Modell–View–Controller – Modell–Nézet–Vezérlő

"Végtelen számú kísérlet sem bizonyíthatja, hogy igazam van,
de egyetlen kísérlet is bizonyíthatja, hogy tévedtem."

Albert Einstein

1. fejezet

Bevezetés

Napjainkban a gazdasági fejlődés minden ország politikájának központi célkitűzése. A gazdaság egyik fő területe az árutermelés, amely a tömeggyártás sikerei következtében a fejlett országokban a magas GDP és a jólét megalapozójává vált. A tömegcikkek iránti piaci igény magas, a piacon új igények egész sora jelent meg, a termékek életciklusa rövidebb, jelentősen megnőtt a kereslet az új, divatos formák és speciális csomagolások iránt. A tömeggyártás területén működő cégek termékeiket egyre inkább komponensekből szerelik össze, majd készre csomagolják. A komponenseket és a csomagoló anyagokat nagyobb részben beszállítóik szállítják. A tapasztalatok szerint a tömeggyártás és a beszállítói láncok kapcsolata egyre elválaszthatatlanabb a hatékony és a globális környezetben is sikeres vállalatok esetében.

A beszállítói láncok maguk is állandó fejlődésben vannak. Az üzleti környezet változása befolyásolja a cégek és beszállítóik üzleti, műszaki és logisztikai kapcsolatait. A korábbi, alapjában véve egyszerű vásárló - eladó (úgynevezett „hideg") beszállítói viszony egyre szorosabbá, együttműködőbbé („melegebbé") vált. Ez azt jelenti, hogy a kooperatív, együttműködő módszerek és tevékenységek váltak az SCM (*Supply Chain Management*) technikák fejlesztésének egyik fő tárgyaivá. Kiemelkedő szerepet játszik ebben a folyamatban az IT (információs technológia) gyors fejlődése. Az egymástól sok tekintetben független, lokálisan is elkülönülő vállalatok valós idejű, hálózat-szerű együttműködése hatékony számítógépes hálózati informatikai rendszer nélkül ma már nem valósítható meg.

A tömeggyártás teljes termelő- értékesítő lánca meglehetősen hosszú. A vevők igényei bevásárló központokban jelennek meg, amelyek ellátó (logisztikai) központoknak adnak termékrendeléseket. A központok ezeket a termelő (végtermék gyártó) cégekhez továbbítják. A végtermék gyártó cégek beszállítók tucatjainak adnak tovább rendeléseket. Ezek belső rendeléseket, gyártást indítanak és saját beszállítóiktól nyersanyagokat rendelnek. Ezeknek a több fokozatú információs, döntési és fizikai (termelő és transzportáló) beszállító láncoknak, anyag- és információ-továbbító csatornáknak, ki nem küszöbölhető időbeli késleltetése van. A késleltetések és a folyamatok sztochasztikája, a kisebb nagyobb instabilitások, hiányok, feleslegek és többé fel nem használható veszteségek (selejtes és „dög" készletek) forrásává válhatnak. A kialakuló komplex, nagyméretű, kollaboratív beszállítói rendszerek szükségessé teszik az üzleti és a műszaki folyamatok fokozottabb informatikai támogatását. A piacon ma már rendelkezésre állnak nagy, integrált vállalatirányítási (ERP) rendszerek. Ezek beszállító (*Supply Chain Management*, SCM) modul-

jai többé-kevésbé képesek támogatni a fent vázolt tervezési, döntési, végrehajtási és információs folyamatokat.

Az értékesítő, a végtermék gyártó és a beszállító cégek kapcsolata a gyakorlatban nagyon összetett és sokféle. Ez indokolja a modellek szélesebb körének vizsgálatát, az elméleti kutatások kiterjesztését, további hatékony döntés támogató és tervező módszerek elemzését. A piaci igények erős ingadozása, sztochasztikája a tömeggyártó cégek tevékenységét is jelentősen befolyásolja. A sokszor éles piaci verseny viszonyai között folyamatosan őrizni kell a megszerzett piaci pozíciókat. Ez kiemelt hangsúlyt ad a megrendelések határidőre való teljesítésének. A szállítókészség iránti magas követelmények indokolják a vegyes, rendelésre és készletre gyártás (*Make to stock + Make to order*) üzleti politikájának megvalósítását. A végtermék iránti piaci követelményeket a végtermék-gyártók közvetítik a beszállítóknak, amelyeknek üzleti politikájában ezeknek a tényezőknek szintén meg kell jelennie.

Ha csak a végszerelő és a beszállítók kapcsolatát vizsgáljuk, ezen a szinten is elkülöníthetők stratégiai, taktikai és operatív együttműködési szintek. Az értekezés, – a fent vázolt komplex problémakörből kiemelve – a kollaboratív beszállító készletezési politikájának néhány lehetőségeit vizsgálja nem determinisztikus igények esetén. Feltételezzük, hogy stratégiai szinten már léteznek szerződések, amelyek meghatározzák a beszállító és a végtermék gyártó üzleti viszonyának jellemzőit. Taktikai szinten megoldott a jövőre vonatkozó piaci igény-becslések (*forecast*-ok), a közép- és rövid-távú gyártási ütemtervek, a visszaigazolások, a konkrét anyag-lehívások és a szállítási műveletek szervezése, azaz a termelés-tervezési és irányítási folyamatok szinkronizációja. Feltételezzük, hogy a számítógépes kommunikációs feltételek adottak az üzleti és műszaki folyamatok megvalósításához.

Az értekezésben a modellek elemzéséhez a problémát egy beszállító, és egy végtermék gyártó kapcsolatának vizsgálatára redukáljuk. Feltételezzük továbbá azt, hogy a beszállító egy terméket gyárt és egy végtermék gyártóval áll kapcsolatban. A végtermék gyártó legalább középtávra, azaz több hétre előre meg tudja adni az igény előrejelzését, de konkrét szállítási igényt – lehívás formájában – csak rövid előretekintéssel, tipikusan egy-két hétre ad. A végtermék gyártó által közölt információ természetszerűleg bizonytalan, mivel az előrejelzés és a konkrét lehívások adatai általában nem esnek egybe.

A vizsgálat elsődleges célja olyan beszállítói-készletezési (*Inventory Control, IC*) politikák kidolgozása, melyek biztosítják a végtermék gyártó igényeinek megfelelő kiszolgálási szinten (*Service level*) történő szállítási teljesítést, figyelembe véve a piaci, a hibás tervezési és más eredetű bizonytalanságokat is.

A beszállító gyártási, illetve készletezési politikája legyen optimális és vegye figyelembe a szereplők kollaboratív együttműködési viszonyait. A fenti politikát első lépésben egy raktári készletszint időbeli menedzselése (meghatározása, szabályozása) jellemezze. A végtermék gyártó szerződéses kötelezettsége, hogy műszaki specifikációval, hosszú és középtávú előrejelzésekkel lássa el a beszállítót. A beszállító cég szerződéses kötelezettsége, hogy megfelelő időben megállapodás szerinti szolgáltatásokat nyújtson a végtermék gyártónak.

Saját készletszintjét a beszállító gyártásindítással (ún. „belső” rendeléssel) tudja irányítani (növelni), miközben eleget tesz a végszerelő cég (a készletszintet csökkentő) „lehívásainak”. A beszállító készletgazdálkodási (beszállítás menedzselési) feladata az, hogy a rendelkezésére álló

információk birtokában meghatározza, milyen készletszinteket tartson és milyen időpontokban mekkora gyártási sorozatokat indítson a készletszint pótlására. Eközben hosszú távon fenn kell tartania a cég imázsát, középtávon maximalizálnia kell nyereségét, rövid-távon pedig eleget kell tennie a szerződésekből következő operatív kötelezettségeinek.

Ami a korlátozó feltételeket illeti, feltételezzük, hogy a beszállító által legyártott és tárolt termékek a lehívás idejéig nem romlandók, és a szükséges időben a termelői kapacitások korlátozás nélkül rendelkezésre állnak. A beszállítónak a termékek gyártásához alapanyagokra van szüksége. Feltételezzük, hogy a gyártás kezdetekor ezek az anyagok rendelkezésre állnak. Feltételezzük, hogy az alapanyagok és a készáruk külön raktárban helyezkednek el, így a modell nem foglalkozik azzal a kérdéssel, hogy a két készlet esetleg helyet foglal el egymástól.

A kooperatív beszállítói szervezet egésze bonyolult, többszintű, informatika igényes menedzselést kíván. A beszállító készletgazdálkodási politikája ennek a rendszernek csak egyik de fontos eleme, amelyet természetesen a végszerelő és a beszállító teljes üzleti-technológiai-logisztikai rendszere befolyásol [116].

A készletgazdálkodással kapcsolatos döntések végső célja a beszállító vállalatok termelési, pénzügyi, azaz üzleti teljesítményének növelése [28]. A beszállító cégeknek számos esetben a végszerelő kiszolgálása a fő (esetleg egyetlen) tevékenysége. Érthető, hogy a kiszolgálás magas minőségi színvonala és annak megbízhatósága a beszállító cég „imázsának” fő összetevője.

1.1. Tudományos célkitűzések

Az üzleti szférában egy beszállítói cég számos partnerrel áll kapcsolatban. A partnerek bizonytalansággal terhelt igényeinek maradéktalan kielégítése megköveteli a hatékony, és megbízható készletgazdálkodási modellek alkalmazását, melyek segítségével költség-optimális készletezési politika alakítható ki. A készletgazdálkodás tudományos irodalmában nagyszámú különböző megközelítésű modell áll rendelkezésre a problémák kezelésére. Ugyanakkor a kereskedelmi szoftver-alkalmazások többnyire csak néhány alap-modellt használnak. Kutatási munkám során arra a következtetésre jutottam, hogy a publikált modellek többsége valószínűleg a több periódust tervező algoritmusok, illetve a nagyméretű adatbázis kezelés IT jellegű nehézségei miatt nem jut el a konkrét gyakorlati alkalmazásokig. A kiterjesztett modellek megoldására használt metaheurisztikák és operációkutatási módszerek a feladat kombinatorikus jellege miatt legtöbbször nem szolgáltatnak elég gyors megoldást a „Mi lenne ha?” típusú döntésekhez.

Az értekezés készítése során olyan új megközelítésű, több tervezési periódus együttes kezelésére alkalmas készletgazdálkodási modell kidolgozását és szoftver implementációját tűztem ki célul, amely bizonytalan piaci környezet mellett is hatékony készletezési politikát támogat, kellően gyors számítási teljesítménnyel.

Fontos követelménynek tekintettem a „rugalmas tömeggyártás” igényeinek megfelelő, több tervezési-gyártási periódus együttes, gyors kezelését, a felhasználó cég – igényei szerinti – jó hangolhatóságot, a bizonytalansággal terhelt környezetben is hatékony készletezést, a termékek keresletében jelentkező szezonalítás modellezését, és a kapacitás problémák kezelését. A felhalmozott ismeretek és a kidolgozott új eljárások egy általam megvalósított, Web alapú számítógépes készletezési rendszeren tesztelhetők online szimulációk futtatásával. Azt remélem, hogy az

értekezésben bemutatott új megközelítés, a kidolgozott modellek és eljárások tovább bővítik az IT eszközökkel támogatott sztochasztikus készletgazdálkodási modellek nagy családját.

Kutatómunkám során a problémafeltevés, irodalomkutatás, megoldási módszerek keresése, megoldások szoftver implementálása, tesztelés, kiértékelés lépésekből álló, ciklikusan ismétlődő folyamatot követtem. Az irodalomkutatás során törekedtem a régi és a modern modellek széles körének megismerésére. A modellekből kiemeltem azokat az alapvető funkciókat, amelyeket egy modern készletgazdálkodási rendszernek hatékonyan támogatnia kell. A VITAL projekt tapasztalataira támaszkodva a rugalmas tömeggyártás készletezési problémáit helyeztem a kutatás középpontjába. Az irodalomban található modellek és megközelítések sokfélesége korán rádöbbentett arra, hogy a különböző készletezési folyamatok valósághű modellezése meglehetősen bonyolult matematikai ismereteket igényel. Az üzleti (piaci) környezet folyamatos változásai, a kooperatív kapcsolati formák igénye tovább növelte megválaszolandó kérdések számát.

Kutatási munkám eredményességéhez a szakirodalom mellett nagymértékben hozzájárultak azok a konkrét kutatáshoz kapcsolódó technikai specifikációk, melyek megismerésére a „VITAL" (*Valósidejű, kooperatív vállalatok informatikai támogatása, NKTH 2/010/2004*) projekt keretében nyílt lehetőségem. A projektben az igény szerinti tömeggyártás, a bizonytalan piaci környezetben működő ellátási láncok tervezési és irányítási problémái kapnak hangsúlyt. A kutatási konzorciumban a Magyar Tudományos Akadémia Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézetének (MTA-SZTAKI) vezetésével a General Electric (GE) magyarországi leányvállalatai, több hazai beszállító vállalat, továbbá a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem (BME) és a Miskolci Egyetem (ME) kutatócsoportjai vesznek részt (Projektvezető: Monostori László). A Miskolci Egyetem Alkalmazott Informatikai Tanszékén a kutatómunka fő célja a nagyméretű, komplex kutatás-fejlesztési munka részfeladatainak támogatása, valamint megoldási alternatívák feltárása és elemzése volt. A kooperatív beszállítói láncok kutatási-fejlesztési munkáit, klaszter vezetőként Váncza József (MTA-SZTAKI), informatikai kutatási vezetőként Farkas Zoltán (GE Hungary) irányította. Az ME kapcsolódó kutatásait Erdélyi Ferenc koordinálta.

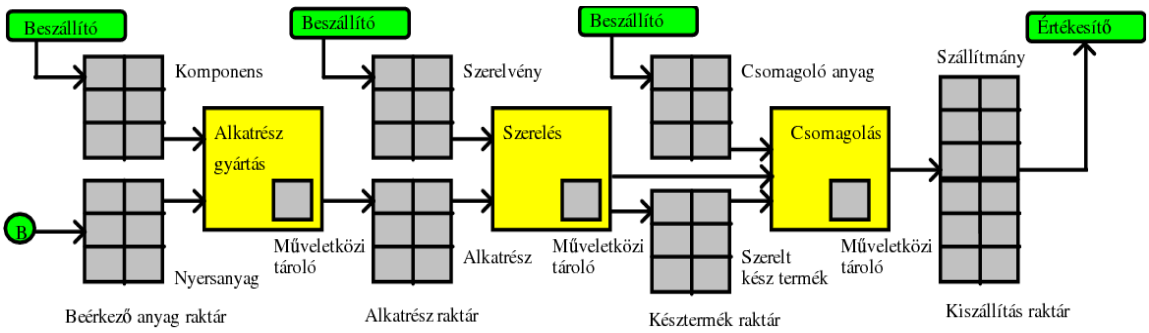
1.2. Készletgazdálkodás menedzsment

A készletgazdálkodás menedzsment nélkülözhetetlen folyamat a magas kiszolgálási szint biztosításához. A folyamat hatékonysága jelentősen befolyásolja a vállalatok financiális és működési teljesítményét. Annak ellenére, hogy a raktárak kritikus jelentősséggel bírnak, rossz működésük káros hatású is lehet. Ez gyakran, valamely az ellátási lánc mélyén rejlő problémát (pl. rossz tervezési gyakorlat, stb.) takar [94].

A valóságban az egyes termelői cégek folyamatos változásokkal és bizonytalanságokkal néznek szembe az egész láncon belül. A piaci feltételekhez való alkalmazkodáshoz, a váratlan beszerzési vagy értékesítési problémák kivédéséhez, az előnyös üzleti lehetőségek kihasználásához készletekre van szükség. Így az elkülönült gazdasági érdekkel rendelkező vállalatok számára a piachoz való rugalmas alkalmazkodás igénye *gazdasági kényszert* jelent a készlettartásra. A fenyegető szituációkkal szemben a cégek a nyersanyagok, a beszállított anyagok, a félkész termékek és a kész termékek tárolására szolgáló raktárakkal védekeznek. A raktári készletek – mint folyamatosan változó erőforrások – elengedhetetlenül fontos szerepet játszanak a napi termelési folyamatok foly-

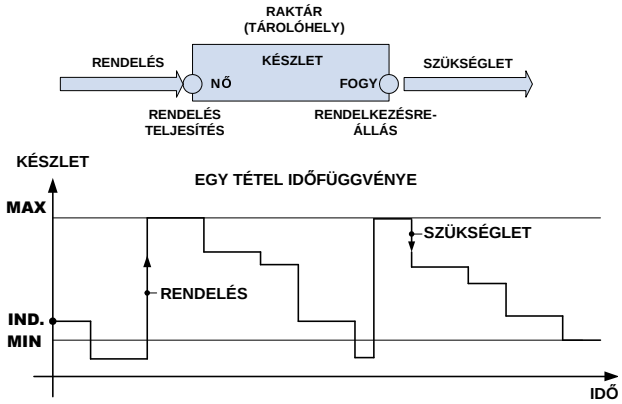
tonosságának biztosításában, a rendelés és a szükséglet egyensúlyának fenntartásában a láncban tovagyűrűző bizonytalanságok közepette. Raktárak nélkül a vásárlók alacsony termék rendelkezésre állásnak, hosszú utánpótlási időnek és késéseknek, valamint redukált termékválasztéknak lennének kitéve. A beszerzési-termelési-értékesítési folyamatok stabilitása általában nem érhető el a készletek nélkül: ez mintegy *fizikai kényszert* jelent a készlettartásra.

Egy termék előállítása, ameddig a nyersanyagból késztermék válik, időben több fázisú folyamat, amely alapvetően beszerzésre, alkatrészgyártásra, szerelésre, és csomagolásra bontható. A folyamat fázisainak megfelelően számos funkcionálisan megkülönböztethető raktár típusról beszélhetünk: *beérkező anyagraktár, kereskedelmi komponens raktár, alkatrész raktár, késztermék raktár, kiszállítási raktár, műveletközi raktár (puffer)*. A következő ábra a termelési folyamatlánc logisztikai szemléletű felépítését mutatja.



1.1. ábra. Raktárak és tartalmuk a termelési folyamatban

A megrendelés feladásától a megrendelt mennyiség raktárba érkezéséig eltelt időt utánpótlási, vagy röviden pótlási időnek nevezzük. A pótlási idő alatt is történhet kivét a raktárból, emiatt a megrendelési időpontokat tehát úgy kell megválasztani, hogy a raktárkészlet az utánpótlási idő alatt is fedezze a szükségletet. Az árubeérkezés és az áru-kivét, más szóval a beáramlás és a kiáramlás együttesen meghatározzák a raktárkészlet időbeli alakulását [99]:



1.2. ábra. Raktárak kapcsolata a termelésirányítási fogalmakkal

A termelés – tágan értelmezve – magában foglalja a műszaki tervezés, a beszerzés, a gyártás-előkészítés, a gyártás, az elosztás, az értékesítés, a fogyasztás támogatás, sőt az újrahasznosítás

mozzanatait is. A készletgazdálkodás a termelési folyamathoz kapcsolódó előrejelzési, szükséglettervezési, raktározási, megrendelési, feltöltési, transzportálási, kivitelezési, stb. elemekből álló olyan szabályozott folyamat, amelynél a gazdálkodó arra törekszik, hogy se több, se kevesebb készlet ne keletkezzen, mint amire a termelés és forgalom zavartalan működéséhez szükség van [48].

A készletgazdálkodási, vagyis a készletet alakító műszaki-gazdasági tevékenység során a legfontosabb kérdések egyike az, hogy adott körülmények között, adott időpillanatban, vagy időszakban mennyi az a minimális készlet, amely a termelés és forgalom zavartalan működéséhez szükséges. A készlettartás, a készlet pótlása, a beszerzési lehetőségek mérlegelése idő- és költségigényes, és ugyanúgy gazdasági konzekvenciái vannak az igények ki nem elégítésének is. A raktározással kapcsolatos döntések céljas a vállalat pénzügyi és működési teljesítményének növelése. A döntések értékelésekor bármely raktártípus több fontos jellemzőjét (pl. ciklikus-, átlagos-, maximális-, minimális-biztonsági-raktárkészlet) is figyelembe kell venni.

A ciklikusan változó raktárkészlet (cycle stock) az egyes raktárfeltöltések között bekövetkezett igények kielégítését szolgálja. Ez a raktárak legalapvetőbb funkciója, amely a felöltések gyakorisága által vezérelt. A második fő komponens a biztonsági raktárkészlet (safety stock), amely egy szükséges ráadás-készletként biztosítja a termékek megfelelő rendelkezésre állás szintjét. Megvéd az ellátási láncon belüli bizonytalanságokkal szemben. Minél nagyobb a bizonytalanság mértéke a láncon belül, annál nagyobb biztonsági készletek tartása indokolt.

A bizonytalanságokkal szemben túl nagy készletekkel való védekezés azonban hátrányos, mert nagy költségeket (tárolási, forgótőke lekötési) emészthet fel. A vállalatoknak mérlegelni kell a kifogyás (anyag-, termék-hiány) veszélyének következményét és ennek megfelelően kell meghatározni a biztonsági készlet mennyiséget, figyelembe véve a különböző bizonytalansági tényezőket is.

Szem előtt tartva a készletek jelentős időbeli ingadozásait felmerül tehát a kérdés, hogy mi az optimális készletezési politika? A kérdés megválaszolásához a különböző készletgazdálkodási modellek elemzésével kerülhetünk közelebb.

1.3. A készletgazdálkodási rendszer

A modell csaknem valamennyi tudományterületen megjelenő kategória. A sokféle tudományágban alkalmazott modellfogalmak közös jellemzője, hogy a modellt a megismerés eszközének tekintik, s a valóságos rendszer és annak tanulmányozója közé beépülő rendszerként értelmezik. A valóságos rendszerek ugyanis általában olyan bonyolultak, hogy megfigyelésük, leírásuk rendszerint elvileg sem végezhető el közvetlenül. Ehhez járul még, hogy a megfigyelést, leírást végző szubjektum többféle ok (képesség, lehetőség hiánya, szubjektív érdek) miatt eleve nem érheti el a megismerés teljességét. Ezen alapvető tényezők hatására a megismerési folyamat során mindig modellekkel dolgozunk. Arra, hogy mit is nevezhetünk modellnek, az irodalomban számos definíció született. Ezek részletezése helyett a készletgazdálkodási modellel szembeni követelményekből indulunk ki.

Amikor készletek modellezéséről beszélünk, a készletezési rendszer három, egymással hierarchikus viszonyban lévő szintjének modellezését kell megkülönböztetni [26]: *gazdasági szintű (makro-) modellek, vállalati szintű (mikro-) modellek és termékszintű (szubmikro-) modellek.*

A gazdasági szintű, *makroökonómiai* modellek referenciarendszere a gazdaság egésze, a valóságos kiinduló rendszer a gazdaság. Ezek a modellek a makroökonómiai elmélet szerves részét képezik. Legfontosabb jellemzőjük, hogy nem normatív, optimalizáló jellegűek, hanem hatásmechanizmusokat (pl. a gazdaság főfolyamatainak a készletekre gyakorolt hatása) vizsgáló leíró típusúak.

A készletezés *mikroökonómiai* modelljei a vállalatok viselkedési modelljei közé tartoznak, szoros logikai rokonságban állnak a makromodellekkel. A mikroökonómiai modellezés lényegében az aggregált vállalati készletnagyságot kezeli, azon a közgazdaságilag teljesen elfogadható logikai alapon, hogy a vállalatvezetést érdeklő első számú kérdés az, hogy a rendelkezésre álló össztőkéből milyen összeget kell készletekbe fektetnie, a szóba jöhető viselkedési, esetleg optimalizálási kritériumok alapján. Ezek a modellek a vállalatot holisztikus felfogásban kezelik (egységesen viselkedő, homogén rendszerként), főként a külső hatásokra figyelve tekintet nélkül a készlet struktúrájára. Ez a megközelítés egyoldalú, mert a készlettartás végső célja egy adott helyen és időpontban keletkező valamilyen konkrét kereslet kielégítése. A vállalat aggregált készletállománya bármennyire kielégítő is, mégsem tudhat a részletekben is kielégítő készletgazdálkodást folytatni. Nem érheti el a kívánt célt, ha a készletek struktúrája, összetétele nem megfelelő, azaz a termékszintű készletnagyságok nem megfelelőek. Ez adja az értelmet a *termékszintű modellezésnek*, amely további hierarchiai szinten nyújt lehetőséget a készletezés folyamatának finomításában [47].

1.3.1. A termékszintű készletezési rendszer

„A termékszintű készletezési rendszer egy adott termék iránti szükséglet kielégítését szolgáló rendszer, amelyben a kereslet által generált output-folyamat forrása az adott termék bizonyos állománya, amelynek helyreállításáról a rendelés útján szabályozott inputfolyamat gondoskodik" [26].

A termékszintű készletezési rendszer számára teljesen autonóm cél nem adható meg. A cél csakis a magasabb hierarchiai szint rendszerének céljából származtatva fogalmazható meg, mert közgazdasági lényegénél fogva olyan anyagi rendszer, amelynek önmagában való célja és érdeke nem értelmezhető [99]. A cél szempontjából legnagyobb hatású magasabb szintű rendszer a vállalat. A rendszer erőforrásai „a rendszeren belül található azon eszközök, amelyeket a rendszer felhasznál feladatai elvégzéséhez" (*Churchman* (1974)). A termékszintű készletezési rendszer erőforrása maga a készlet, a készletben tartott termék állománya mind fizikai, mind gazdasági értelemben [26]. Magyarázatul szolgál erre az, hogy a készletben lévő terméknek közgazdasági értelemben vett értéke van, vagyis kereslet jelentkezik iránta. A kereslet hozza mozgásba a készletet mint addig passzív forrást, s ezáltal az egész rendszer mozgatójává válik.

A termékszintű készletezési rendszer nyílt rendszer, így lényegéhez hozzátartozik a környezetével való anyag-, energia- és információcsere. A hierarchikus struktúrát tekintve a rendszer közvetlen környezete a vállalat készletgazdálkodási rendszere, amely tartalmazza mindazokat a funkciókat, illetve az ezek végrehajtására hivatott szervezeti egységeket, amelyek a készletezéshez közvetlenül kapcsolódnak (pl. anyaggazdálkodás, különböző készletfajtákkal való gazdálkodás). A környezetet képezik továbbá a készletezési alrendszeren túl mindazok a rendszerek, amelyek

ezt alrendszerként tartalmazzák. A termékszintű készletezési rendszer számára igazán két szint lényeges: a vállalat egésze és a gazdasági (üzleti) környezet, mint rendszer.

A termékszintű készletezési rendszer szabályozott rendszer, azaz a rendszer irányítása a rendszerből magából származó információk alapján, negatív visszacsatolás útján történik. A készletezési rendszer szabályozási körének jellemzői a következők:

Szabályozott jellemző: Az a készletszint, amelyet a készletgazdálkodási beavatkozásoknak a vezető jellemzője útján közölt szándék szerint tartania (követnie) kellene. Eltérítő jellemzők: Tartalmazza mindazokat a hatásokat, amelyek a készletszintet a norma szerinti értékétől eltérít-hetik. Legfontosabb eleme a ténylegesen jelentkező kereslet, de ide tartozik az utánpótlás zavara, valamint a rendszert érintő bármely külső zavaró hatás. Beavatkozó jellemző: A döntéshozó által feladatott gyártási, (beszerzési, feltöltési) rendelések és más, a készlet szintjére ható döntések (pl. leselejtezés). Vezető jellemző: A döntéshozó tervezett készletszint szándéka, amely tükrözi a rendszerrel szembeni követelményeket és azok változásait. Ezek végül is a készletezési folyamatok paramétereiben, illetve teljesítménymutatókban (célfüggvény értékekben) jelennek meg.

A készletezési rendszerben a szabályozás közvetlen módon, a kereslet illetve a kielégítés mérése alapján történhet [5]. A *mérés* értelmezése alapvető jelentőségű. Az *összehasonlítás* a vezető jellemző által adott paraméterek segítségével történik. A szabályozott rendszerként értelmezett termékszintű készletezési rendszerben a döntéshozó magából a rendszerből származó értesülések alapján a folyamatokat befolyásoló zavaró hatások kiküszöbölésére törekszik. A beavatkozás elsődleges szerepét a rendelés tölti be. A készletgazdálkodási folyamat fő mechanizmusát: a következő két kérdés jellege, típusa határozza meg: 1. Mikor és 2. Mennyit rendeljen a döntéshozó? A kérdésekre adható válaszok alapvetően kijelölik a készletezési modellek lehetséges típusait, amelyek az értekezés további részében kerülnek tárgyalásra.

1.4. Készletgazdálkodási modellek és költségek típusai

A készletek időbeli változását, a feltöltési és kiszállítási eseményekhez kapcsolódó számos tényező befolyásolja. A legfontosabbak: 1. A készletgazdálkodás tárgyát képező anyag, komponens vagy szerelvény iránti aktuális igény. 2. A beszállítói szolgáltatás más jellemző előírásai (például a teljes, vagy megengedett részleges igény-kielégítés). 3. A készlet utánpótlási, feltöltési, gyártási lehetőségei és ezek korlátai. 4. A készletgazdálkodás költségeit befolyásoló költségtényezők alakulása. 5. A készletgazdálkodás üzleti céljai. Mindezek együttese alkotja a készletgazdálkodási modellt (*inventory controll model*).

A modell dinamikus objektum, amelynek állapota az időben változik. A menedzsment a készletezési modell állapota alapján – a kitűzött irányítási cél szem előtt tartása mellett – hozza meg a döntéseit, amelyek több, – esetleg nagyon sok – lehetséges változat közül jelölhetik ki azt, amelyik a megengedett korlátok között a kitűzött célt a legjobban szolgálja. Ezt az értékelési és döntési folyamatot *optimális készletezési eljárásnak* nevezzük. A készletgazdálkodás optimális irányítása időben változó döntési sorozaton keresztül valósul meg.

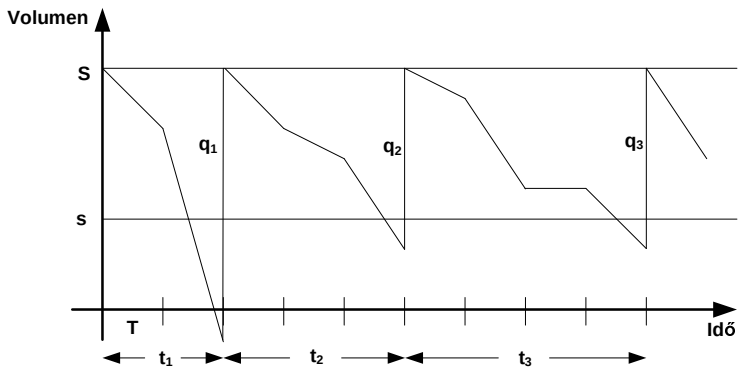
A magyarországi kereskedelmi, termelési és beszállítói gyakorlatban meglehetősen elterjedt túlbiztosított, úgynevezett „*előszállításos*” készletezési eljárás túl nagy készletek tartását igényli. A modern IT technológiákat alkalmazó vállalatok esetében ez a túlbiztosítás általában kisebb.

Ez mindenütt óriási „*holt tőkét*" jelent egy gazdaság számára, ezért nem érdektelen, ha optimális készletezési eljárások megvalósításával, akár csak néhány százalékos készletszint csökkenés érhető el.

A készletezési modellek osztályozási szempontjai sokfélék. A leggyakoribb osztályozási szempont szerint determinisztikus és nem-determinisztikus modellcsoportokat lehet megkülönböztetni [26][45]. A determinisztikus feltételezi, hogy a raktári beáramlással és kiáramlással, valamint a felmerülő költségekkel kapcsolatos minden információ megadható ismert adatok és függvények segítségével. A nem determinisztikus modellekben szerepelhetnek olyan paraméterek is, amelyekre valószínűségi, statisztikai törvényszerűségek állnak fenn.

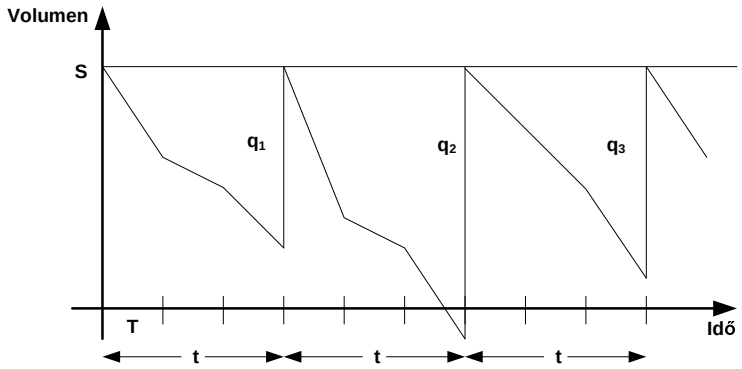
Ha az alkalmazott modellben valószínűségi módszereket és/vagy összefüggéseket alkalmazunk, akkor nagyszámú megfigyelésre, tapasztalatra, kísérletre és ezek matematikai értékelésére alapozott hipotézisek használata teszi lehetővé a törvényszerűségek alkalmazását. Az osztályozás további finomítása, hogy az optimális készletezési politika egy megadott időszakra (*single period*) vagy több időszakasz (*multi-period, infinite horizon*) egymásutánjára vonatkozik-e. Az egy időszakaszra érvényes modellt *statikus*-, a sorozatos döntések egymásutánjaira vonatkozót pedig *dinamikus*-modellnek nevezzük. Szokásos osztályozási elv az is, ha annak a vizsgálatával teszünk különbséget az egyes modellek között, hogy a készletváltozási idő, illetve a készletnagyság változó folytonos vagy diszkrét érteket vehet-e fel. Ilyen értelemben beszélhetünk *folytonos időparaméterű diszkrét*, *folytonos időparaméterű folytonos készletmodellről*, *illetve diszkrét időparaméterű folytonos és diszkrét időparaméterű diszkrét* modellről [98].

A készletgazdálkodási modelleket determinisztikus illetve nem determinisztikus jellegük mellett további három csoportba sorolja az irodalom: ezek az (S,s), (t,S) és (s,q) modellek. Az (S,s) típusú dinamikus készletgazdálkodási politikák legfontosabb tulajdonsága a folyamatos készletellenőrzés. A folyamatos készletfigyelésű modellek elsősorban a nagy tételszámokat, közel egyenletes ütemben gyártó cégeknél alkalmazhatók a kiindulási feltételek megsértése nélkül [26]. Ezek a feltételek a szezonális ingadozásokat mutató kereskedelemben, vagy a megrendelések változását követő termelésben azonban általában nem teljesülnek. Ilyenkor, ha nem akarunk túl nagy hibát elkövetni, kénytelenek vagyunk bonyolultabb, nagyobb számítási felkészültséget feltételező és több munkát igénylő modelleket alkalmazni. Ezek egyik nagy csoportját az un. periodikus készletfigyelésű modellek képezik, amelyek alkalmasak előre becsülhető, periódusonként (ciklusonként) változó igények leírására. Az igények folyamatosan érkeznek a raktárba. Ha a készletszint eléri a kritikus szintet (s), akkor újrarendelés szükséges.



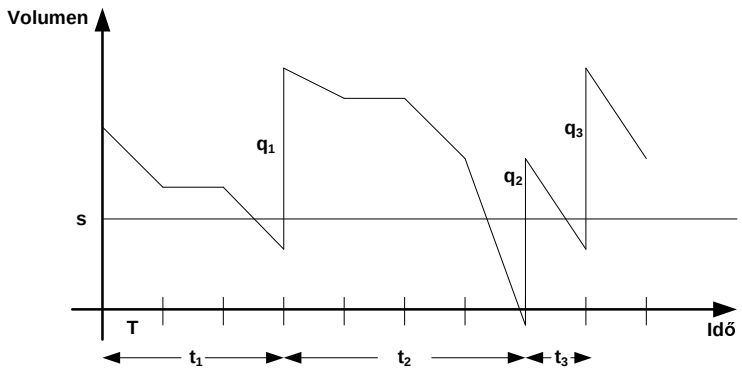
1.3. ábra. (s,S) mechanizmus

A (t,S) típusú modellek esetében a készletellenőrzés állandó hosszúságú periódusokban történik, ahol S jelenti az optimális készletezési mennyiséget, és t pedig az újrarendelési pont (*reorder point*).



1.4. ábra. (t,S) mechanizmus

Az (s,q) modellek esetében a készletutánpótlásról akkor döntünk, amikor a készletszint valamilyen meghatározott minimális érték (s) alá csökken. A rendelések rögzített tétel nagyságokban történnek (q) [112].



1.5. ábra. (s,q) mechanizmus

A (t,S) modellek egy továbbfejlesztett változata a (t,s,S) típusú modellek családja, ahol ugyan a készletellenőrzés fix t időközönként történik, de csak akkor adunk fel rendelést az S készletszint

elérésére, ha a vizsgálatkor az aktuális készletszint kisebb, mint a kritikus készletszint értéke [112][26].

A felsorolt legfontosabbakon kívül további osztályozási elvek is ismeretesek a szakirodalomban. Ilyen például a költségtípusok vagy a hiány kezelése szerinti csoportosítás. Készlethiány eseten például kétféle modellről beszélhetünk. Az egyiknél a beérkező készletből pótolják a korábban keletkezett hiányt, a másiknál viszont a kielégítetlen kereslet elvesz, tehát a tervezettnél nagyobb zárókészlettel kell számolni.

A készletgazdálkodással kapcsolatos költségek a következő három csoportba sorolhatók:

1. Gyártással, beszerzéssel kapcsolatos egyszeri, fix (setup) és mennyiség-arányos változó költségek.

2. A raktár fenntartásának a költsége valamint a raktárkészletben lekötött eszközök költsége, a kamat, az eszközlekötési járulék. Ide sorolhatók az erőforrások amortizációjával és a termék kifutásával keletkező költségek is.

3. A raktárhiány, azaz a szállítói képtelenség okozta bevételkiesés költsége. Ide sorolható a pótlólagos beszerzéssel együtt járó többletköltség, vagy a hiány miatti üzletvesztés, büntető költség „kötbér”, stb., gyűjtőnevén a hiányköltségek.

A modellekben nem mindig szerepel az összes költségtípus. Előfordulhat, hogy szerződéses kötelezettség miatt mindenképpen 100%-os szükséglet-kielégítést kell elérnünk, azaz hiány nem megengedett. Nyilvánvaló, hogy ebben az esetben nem kell foglalkoznunk sem a hiányköltség számszerű nagyságával, sem azzal, hogy a raktárkészlet időbeli alakulásával ez milyen függvénykapcsolatban áll. A gyártási vagy beszerzési költségek két fő összetevője a tétel nagyságától független fix (setup) és a tétel nagyságával egyenes arányban levő változó költség [96]. Az előbbire példa sorozatgyártásnál a sorozat beindítási költsége, vagy a tétel átvizsgálási, megrendelési költsége, stb. A termékmennyiséggel arányos a termék anyagköltsége, termelési önköltsége, vagy az áru egy egységének beszerzési költsége. A raktározási költséget többnyire a készlet raktáron eltöltött idejével arányos költségként definiálják, mellyel a készlet egységnyi mennyiségének, vagy az egységnyi értékének időegységre eső költségét adják meg. Hasonlóképpen határozható meg a hiányköltség is, ha az egységnyi hiány időegységre eső költségeként meghatározható.

A hiányt leíró időfüggvény felfogható a raktárkészlet időbeli alakulását leíró függvény időtengely alatti (negatív készlet) folytatásának is. Ebben a szemléletben a készletgörbe negatív szakasza és az időtengely által bezárt terület mértéke, megszorozva a hiányköltség idő- és áru-egységre eső értekével, megadja a hiányból származó összköltséget.

A gyakorlatban egy adott valós vállalati környezetben használható készletgazdálkodási politika erősen modellfüggő [106]. Nem meglepő, hogy a készletezési modellek sok fajtája és típusa alakult ki, ezek implementációja azonban körültekintést igényel.

A készletgazdálkodási modell is – mint minden irányítási vagy tervezési modell – a sokrétű valóságnak csak valahány – de nem minden – jellemzőjét ragadhatja meg, amelyek segítségével aztán matematikai módszerek és logikai következtetések útján mennyiségi összefüggéseket tárhatunk fel a jellemzők között. Ezek elemzése, értékelése alapján kerülhet sor döntésekre.

A modellek bonyolultsága (pontossága) mindig ellentmondásban van kiértékelésük munka és számítás igényességével.

Egy hatékony készletgazdálkodási modell megalkotásánál az alábbi fontos lépéseket érdemes figyelembe venni:

- Meg kell ismerkedni az anyag beáramlási és a kiáramlási folyamat sajátosságaival.
- Tisztázni kell a vizsgálatba bevonható költségelemeket.
- Meg kell választani az elérni kívánt célt, esetleg célokat.
- Analitikai modellhez matematikai összefüggéseket kell felírni a folyamatok változóira, a korlátozó feltételekre és a célfüggvényekre.
- Meg kell választani a készletezési politikát meghatározó döntési változók értékeit kiszámító eljárást.
- Meg kell találni a hatékony feladatmegoldó – a számítást megvalósító – algoritmust.
- Meg kell találni, vagy ki kell fejleszteni a teljes információs folyamatot támogató alkalmazást (szoftvert).
- Meg kell oldani a rendszer integrációját a teljes vállalatirányítási rendszerbe.

A készletgazdálkodási modelleket az esetek túlnyomó részében valamely optimum számítási feladatra vezetik vissza. Ezek matematikai megoldására operációkutatási eredmények állnak rendelkezésre. Leggyakrabban a problémát lineáris (ritkábban nemlineáris) programozási feladatként értelmezve állnak rendelkezésre hatékony megoldó eljárások. Előfordulhat az is, hogy az optimum csak közelítőleg határozható meg. A feladatok komplexitása erősen befolyásolja a számítási időt. A közelítő megoldások is nagyon hasznosak, de megbízhatóságuk lényegesen mélyebb matematikai meggondolásokat igényelhet.

1.5. A sztochasztikus modellekről általában

A készletezési feladatok egy a valós világban gyakori, és fontos osztálya a sztochasztikus modellek. A leggyakoribb ilyen körülmény az, amikor a kiáramlási folyamat a piaci kereslet függvénye, amely pedig csak sztochasztikus folyamattal írható le.

A tárolandó termékek elavulásával, kifutásával kapcsolatos problémák is különböző valószínűségszámítási meggondolásokat igényelnek. A beszállítási (feltöltési) késedelmek és a megjósolt lehívások is sztochasztikus törvényszerűségeket követhetnek. A valószínűség számítás és a matematikai statisztika segítséget nyújthat olyan esetekben is, amikor sem kísérleti, sem megfigyelésen (*monitoring and history*) alapuló becslési eljárás használatára nincs lehetőség.

Sztochasztikus modellekkel lehet bonyolult, de alapjában véve determinisztikus jelenségeket is modellezni. Például egy nagy kikötő hajóforgalmát – noha az szigorú menetrend szerint bonyolódik le – igen jól lehet Poisson-folyamattal leírni [36]. Ezek a tapasztalatok megnyugtathatják azokat, akik a sztochasztikus modellek gyakorlati alkalmazhatóságában kételkednek. A leggyakoribb kritikai észrevétel, hogy soha nincs elég tapasztalatunk, a jelenségek sohasem ismételhetők meg akárhányszor ugyanolyan körülmények között, vagy hogy miért mindig csak néhány valószínűség eloszlást használnak a modellek, holott a valóság sokkal bonyolultabb. Kétségtelen,

hogy a valós rendszereken végzett megfigyelések, mérési adatok újabb és újabb eltéréseket mutathatnak ki a feltételezésektől. Az is tapasztalat azonban, hogy a modellek jól használhatók a „durvább” mérési adatokra alapozott eloszlásokkal is. Az elkövetett hiba sok esetben becsülhető, és ez gyakorlatilag kielégítő.

A sztochasztikus modellek felépítése, logikája a legtöbb esetben ugyanaz, mint a determinisztikus modelleké [113]. Ezeknél is meg kell ismernünk a beáramlás és kiáramlás folyamat törvényszerűségeit, korlátozó feltételeit, meg kell határoznunk azt a célt, vagy célokat, amelyeket el akarunk érni. Ha költség optimumra, vagy nyereség optimumra törekszünk, akkor a megfelelő költségparamétereket is fel kell tárni. A beáramlási és kiáramlási folyamatokban fellépő véletlen eloszlások paramétereinek meghatározása feltevések és megfigyelési adatok alapján matematikai statisztikai módszerekkel valósítható meg.

2. fejezet

Történeti áttekintés

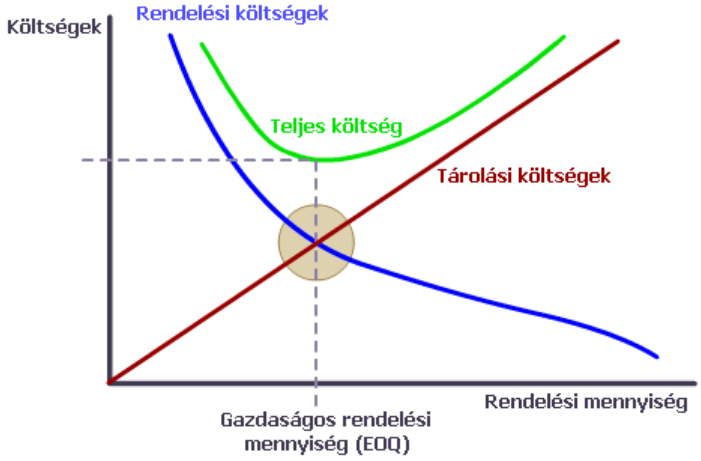
A készletgazdálkodási problémák hatékony modellezésének és megoldásának igénye a termelői iparvállalatok, üzemek, vállalatok fennállása óta létezik. A tématerület irodalma egyszerre fejlődött a matematika, a logisztika és a számítástechnika tudományokkal. Az első sikeres publikációk az 1915-ös évek elején születtek és azóta is nagyszámú dokumentum jelent meg a készletgazdálkodás témakörében, ami a téma aktualitását és fontosságát igazolja. Mivel a teljes történelem áttekintésére az értekezés keretein belül nincs lehetőség, ezért csak a szűkebb téma szempontjából fontos kutatók nevét és publikációját emelem ki. Az elért eredmények bemutatását az értekezés nem szigorú időrendi sorrendben tárgyalja, hanem egy-egy kutatási időszak jellemző modellcsaládját és vizsgálati módszerét emeli ki és ezek fejlődésén keresztül próbálja meg a készletgazdálkodás matematikai modellezése területén elért legfontosabb elméleti és gyakorlati eredményeket összefoglalni. A készletgazdálkodási modellek fejlődésével kapcsolatos eseményeket részletesen összefoglalja *Hans-Joachim Girlich*, és *Chikán Attila* publikációi [47] [26], valamint *David Simchi-Levi*, *Z. J. Max Shen*, *L. M. A.*, és *Julie L. Swann Chan* szerzők által szerkesztett „*Coordinating of pricing and inventory decisions: A survey and classification*" című könyvrészlet [23].

A kutatási eredmények egyik fő irányvonalát az egy termékes, egy periódusos modellek képviselik, melyek analitikus úton próbálnak optimális politikát nyújtani a modellezett valóság célfüggvényének megfelelően. Az évek során fokozatosan alakultak ki a többtermékes, többperiódusos determinisztikus, illetve sztochasztikus modellek. A készletgazdálkodási politikák másik irányvonalát a játékelméleti megközelítések képviselik, melyek kiteljesedése napjainkban érzékelhető. Ennek oka magában a játékelméletben, mint a matematika egyik fejlődő ágának „újszerűségében" keresendő. A napjainkban egyre szorosabbá váló beszállító-végtermékgyártói, vásárló-eladói viszony „melegedésének", kooperatív voltának modellezésére a játékelmélet még hatékony módszereket hozhat.

2.1. Az optimális tételnagyság modell és általánosításai

Az optimális rendelési tételnagyság (*Economic Order Quantity*) modell a klasszikusnak nevezhető első készletgazdálkodási modell, amely *F. Harris* 1915-ben megjelent könyvében szerepelt először. A modell szigorúan determinisztikus input-output feltételrendszerre épül. Ismert igényt

kell kielégíteni, hiány nem fordulhat elő. Az optimális rendelési mennyiséget a teljes költség minimalizálásával számolja azonnali utánpótlást (*zero lead time*) feltételezve. A teljes költség és az alkalmazott költségtípusok kapcsolatát mutatja be a következő ábra:



2.1. ábra. Költségtípusok kapcsolata az EOQ modellben

Az optimális tételnagyság értékét megadó képletet, másik kidolgozója, *R. W. Wilson* 1934-ben megjelent cikke alapján *Wilson* formulának is nevezik. A német irodalomban *K. Andler* könyve (1929) alapján Andler formulaként vált ismertté.

Az összefüggést 1916-tól napjainkig a világon széles körben alkalmazták és egyéb módosított változatait (*Rajan* [86], *Cheng*, [25]) még ma is használják. Széleskörű felhasználásának nemcsak származtatásának és végeredményének egyszerűsége a magyarázat, hanem az is, hogy a megoldás meglehetősen érzéketlen a kereslet várható nagyságára vonatkozó becslés pontatlanságára.

A klasszikus modell általánosításán sok szerző dolgozott. Az eredmények összefoglalását *Whitin* munkája [108] adta meg különböző működési feltételek elemzésével. A *Whitin*-féle alapmodellt *Arcelus* és *Srinivasan* [3] fejlesztette tovább három különböző típusú profitfüggvénnyel, amelyekhez analitikus megoldási technikát alkalmazott. *Cheng* [25] tárolási kapacitás szempontokkal és raktár beruházási korlátokkal bővítette tovább a klasszikus modellt. Lineáris típusú igénygörbe alkalmazásával *Chen* és *Min* [24] a [25]-höz hasonló célfüggvényeket vezettek be és nem iteratív jellegű megoldáshoz jutottak. A megengedett hiány esetével több kutató (*Churchman*, *Ackoff* és *Arnoff* (1957) [27], Sasieni, Yaspan és *Fridman* (1959) [89]) munkája foglalkozik. A hiányköltség lehet mennyiség- és időarányos, csak mennyiségtől függő és a hiány alkalmával fellépő, a hiány mennyiségétől és időtartalmától független fix költség. Ezeket a modelleket részletesen összefoglalja *Hadley* és *Whitin* (1963) [49] és *Naddor* 1966-os könyve [77].

A kereslet időbeli lefutásának különböző változatait elsőként *Naddor* 1966-os könyve vizsgálja. Definiálja a hatványkitevős keresleti lefutást, ahol a periódusonkénti kereslet nagysága nem változik, csak a perióduson belüli lefutása. A problémára *Naddor* csak közelítő megoldást tudott nyújtani, az optimális megoldás meghatározása *Rizsikov* nevéhez fűződik [26]. Nem lineáris, hanem az idő tetszőleges hatványfüggvénye szerint jelentkező kereslet esetén általános megoldást *Barbosa* és *Friedman* [9] 1979-ben megjelent cikke nyújt.

Az első dinamikus programozással kezelt, determinisztikus, több periódusú igény-modellt, *Wagner-Whitin* 1958-as cikke [108] ismerteti, amelyben a kidolgozott algoritmus a *Bellman* eljá-

rást specializálja. A módszer a teljes költség minimalizálását az n periódus hosszú véges időhorizont dinamikus igényei alapján számolja. Az irodalomban a WW modell számos kiegészítésével találkozhatunk. Az algoritmus további javítása *Hadley*, *Whitin* és *Popp* nevéhez fűződik. Az '50-es évek végén és a '60-as évek elején a számítástechnika viszonylagos fejletlensége arra késztette a matematikusokat és a kutatókat, hogy minél kisebb memória és számításigényű algoritmusokat fejlesszenek ki. Ez a törekvés megjelenik a *Wagner-Within* algoritmusban is, amelyben az eredmények pontosságának rovására egyszerűsítették a számításokat, pontosabban olyan korlátokat és költségfüggvényt fogalmaztak meg, amelyek jelentős számításigény csökkenést eredményeztek. *Benkő János* [12] tanulmánya a klasszikus *Wagner-Within* továbbfejlesztésével, illetve a fejlesztett modell megoldásával foglalkozik. Az új modellben az előrelépést az jelenti, hogy abban előírhatók a gyakorlat által jogosan igényelt alsó és felső korlátok, továbbá az eredetihez képest a költségfüggvény és a készlet fogalma is közelebb áll a valósághoz.

A klasszikus, „tételnagyság függő beszerzési ár" modell leggyakoribb eseteit *Hadley* és *Whitin* 1963-ban megjelent könyve [49] tárgyalja részletesen, de jelentek meg hasonló eredmények Churchman, Ackoff és *Arnoff* (1957) [27], *Sasieni, Yaspan* és *Friedman* (1959) [89] szerzőktől is. A költségek diszkontálásával először *Schussel* foglalkozott 1968-as [91] cikkében, amelyben egy gyártási-készletezési rendszert vizsgál. Az optimális készletnagyság klasszikus modelljének diszkontált költségek melletti megoldását először *Hadley* végezte el.

A többtermékes determinisztikus modellek vizsgálata a 60-as évek elején indult meg. Az első ilyen modellt *Naddor* könyve (1966) tárgyalja. *Bomberger* (1966) a problémát dinamikus programozással oldotta meg [14]. A problémát együttes korlátozó tényezők bevezetésével a Lagrange-szorzó módszerével kezeli *Klemm* és *Mikut* (1972) [26] módszere.

A számítástechnika eszközének rohamos fejlődése új kapukat nyitott meg a probléma megközelítésében. *S. Mondal* és *M. Maiti* a többtermékes fuzzy EOQ modell megoldására genetikus algoritmust alkalmazott [75]. *S. Panda, S. Senapati, K. Banerjee* és *M. Basu* ugyanezt a problémát a nemlineáris célprogramozás módszerével oldotta meg [81].

2.2. Az (s,S) modellek

Az (s,S) típusú optimalizálási probléma első pontos megfogalmazása *Arrow*, *Harris* és *Marschak* 1951-ben megjelent könyvében [4] szerepel. A kutatások célja olyan s és S értékek meghatározása, melyekre a várható költség minimális, valamint annak a vizsgálata, hogy a készletezési politika milyen feltételek mellett a „legjobb". Az (s,S) politika optimalitásának tulajdonságait először *Dvoretzky*, *Kiefer* és *Wolfowitz* vizsgálta az 1952-53-ban megjelent cikkeikben [33]. Ezekkel a modellekkel egy időben vált ismerté *Neumann János* és *Oskar Morgenstern* „*Theory of Games and Economic Behavior*" c. híres könyve [107], amely újabb irányt adott a készletezési problémák megközelítésének. A dinamikus programozás módszerével *Bellman*, *Glicksberg* és *Gross* szerzők foglalkoztak [11]. Első részletes áttekintést a módszer alkalmazásáról *Bellman* 1957-es könyve [10] nyújtja. A problémát *Arrow*, *Karlin* és *Scarf* 1958-as könyve [5] is részletesen tárgyalja. Az első általános jellegű eredményt az optimalitásra *Scarf* 1963-ban megjelent könyve [90] mutatja be. Itt szerepel először a K-konvexitás definíciója, amelyre további általános eredmények épültek. A probléma végtelen tervezési időhorizontra való kiterjesztése *Zabel* (1962)

[26] és *Iglehart* (1963) nevéhez fűződik [56]. *Veinott* [105] a feltételeket tovább enyhítette és unimodális költségfüggvény esetén egészen általános feltételek mellett igazolta az (s,S) politika optimalitását nemstacionárius keresleti eloszlásra is. A kereslet sűrűségfüggvényére *Limberg* (1968) egy differenciálegyenlet formájában ad elegendő feltételt a politika optimalitására [26]. A terület eredményeinek jól rendezett összefoglalása *Hochstädter* könyvében [51] szerepel.

A *Markov* folyamatokra és felújítás-elmélet eredményeire támaszkodva *Tijms* (1974) további általánosításokat közöl a diszkontálás nélküli költségfüggvényre. A probléma dinamikus programozással való vizsgálatát *Naddor* könyve [77] tárgyalja.

Az (s,S) politika gyakorlati jelentősége korán felvetette azt az igényt, hogy gyors, nem feltétlenül az optimumot adó, de azt a gyakorlat számára megfelelő mértékben közelítő megoldási algoritmust konstruáljanak. Az első mindmáig használt módszer a *Roberts-approximáció* (1962). A közelítő eljárást *Wagner*, *O' Hagan és Lundh* (1965), *Girlich* (1971) [47] alkalmazta.

Fisher és *Hornstein* publikációjukban [40] az (s,S) készletezési politikák aggregált megvalósítását vizsgálják a játékelmélet módszerével. A klasszikus (s,S) politikára épülő készletezési modellek további általánosítására *Sethi* és *Cheng* [92] tesz javaslatot. Modelljükben a periódusokban bekövetkező igények eloszlása Markovi típusú.

2.3. A (t,S) és (s,q) modellek

A rögzített, egyenlő hosszúságú rendelési időszakok feltételezése jelentősen egyszerűsíti a modellt, mert csak egyetlen optimalizálandó változó marad, a rendelési tétel (s,q), és a rendelési szint a (t,S) modelleknél. Mindkét modell jól közelíti az optimális (s,S) politikát abban az esetben, amikor a rendelésfeladás fix költsége a készlettartási költségekhez viszonyítva alacsony.

A (t,S) modellek megoldását tárgyalja *Buchan* és *Koenigsberg* (1963) [17], *Hadley* és *Whitin* 1963-ban megjelent könyvében [49]. A szerzők a modellt fix és véletlen nagyságú késési idő, valamint hiány esetén elvesző és megmaradó igény mellett vizsgálják. Különböző típusú eloszlások esetére egyszerű formulákat dolgoztak ki az S szint meghatározására. A (t,S) modellek általánosítására *Naddor* (1966) bevezeti a készletbank rendszert. *Prékopa* (1972) modelljében a kereslet időbeli lefutását is figyelembe veszi, valamint általánosítja a modellt arra az esetre, amikor a beérkezés nem egy tételben történik [54]. *Gerencsér* 1972-ben megjelent publikációja az optimális költségek összehasonlítását végzi el a költségtényezők függvényében [26].

A dinamikus tételnagyság-modellt sztochasztikus kereslet mellett *Hadley* és *Whitin* (1963) vizsgálja részletesen. A rögzített időközönként változó nagyságú rendelés optimális mennyiségét határozzák meg a dinamikus programozás módszerével, fix és változó számú periódusokból álló időszakra. A sürgősségi ellátás lehetőségét *Rizsikov* (1969) modellje veszi figyelembe. A sztochasztikus programozás eredményeit felhasználva Prékopa ad optimális megoldást több, egymást követő periódus rendelési tételnagyságára egy konvex programozási algoritmussal. Az optimalizálandó rendelési periódushossz és a (t,s,S) modellek esetével *Hadley* és *Whitin* (1963), és *Naddor* (1966) könyve foglalkozik először részletesen sztochasztikus kereslet, véletlen jellegű késési idő és a mennyiséggel arányos hiányköltség mellett. Megoldásukban numerikus minimalizáló eljárásokat javasolnak, azonban ezek konvergenciája általában nem biztosítható a lokális optimumhelyek nagy száma miatt.

A rögzített rendelési szint esetét *Naddor* (1966) vizsgálta. Modelljében feltételezi, hogy a készletellenőrzési periódus keresletének maximuma ismert. *Rizsikov* (1969) olyan készletezési rendszer dolgozott ki, amelyben periódusonként azonos q nagyságú terméket rendelnek. A periódusonkénti kereslet nagyságának valószínűsége változó.

A kereslet várakozási idejét valószínűségi változónak tekinti *Higa*, *Feyerherm* és *Machado* 1975-ben megjelent publikációja [50], amely megbízhatósági feltételt is figyelembe vesz.

2.4. Prékopa-Ziermann modellek

Hazánkban 1968 és 1990 között általános volt a hiány a gazdaságban. A szállítók monopolhelyzete és az ún. előszállításos rendszer új típusú készletmodellek kifejlesztésére késztette a magyar operációkutatás szakembereit. A piacgazdaság feltételeinek megfelelő költségminimalizáló modellek nem voltak mindenben alkalmasak az „előszállításos rendelésre teljesítés" modellezésére [48]. (Ilyenkor a megrendelt R mennyiség egy T időintervallumon belül kizárólag a megrendelést teljesítő féltől függő, előre meg nem határozható időpontokban és részletekben érkezik be, úgy azonban, hogy T időpontig az egész megrendelt R mennyiség beérkezik.).

A folyamatos termelés anyagellátása – véletlen beérkezési folyamat sokféle változata mellett – az előírt megbízhatósági szinten fenntartható volt a *Prékopa András, Ziermann Margit* és tanítványaik által kidolgozott megbízhatósági készletmodellekkel. Ezek a modellek a minimális kezdőkészlet nagyságának meghatározására készültek. Alkalmasak voltak az elfekvő készletek felhalmozódásának megakadályozására és számszerűsítésükhöz nem volt szükség a költségtényezők megadására [48]. A nemzetközi szakirodalomban e modellek Prékopa-Ziermann „A" és „B" modellként ismertek.

A ***Prékopa-Ziermann*** „A modell" véletlen ütemezésű, egyenlő nagyságú részszállítmányok esetére készült [54]. A szállítmányok nagysága előre ismert – a megrendelt rT mennyiség n-ed része – a szállítások időpontjai a [O, T] időintervallumon egymástól független t_1, t_2,...,t_n valószínűségi változók, amelyek bármely lehetséges elhelyezkedése egyenlően valószínű.

A ***Prékopa-Ziermann*** „B modell" véletlen ütemezésű és nagyságú részszállítmányok esetén optimalizálja a kezdőkészlet nagyságát. A modellben a részszállítmányok időpontja és nagysága egyaránt valószínűségi változó, ugyanakkor egy bizonyos – ésszerű nagyságrendű – mennyiség beérkezésével minden egyes részszállítmány alkalmával számolni lehet [26].

2.5. Többtermékes modellek

A több termékre vonatkozó készletezési politikát először együttes korlátok figyelembevételével kapcsolták össze, a termékek között egyéb összefüggésektől eltekintve. Rényi és Ziermann 1961-es modelljében N számú termékre feladható összes rendelés értéke korlátozott. Az optimális megoldás a Lagrange-szorzó módszerével történik.

Buchan és *Koenigsberg* könyve (1963) [17] olyan több termékes determinisztikus modellt vizsgál, amelyben a termékek utánpótlási rátája is korlátozott a tőkenagyság korlát mellett. Az optimális rendelési tételnagyságok itt is a Lagrange-szorzó módszerrel számíthatók.

Több termékre vonatkozó együttes raktárkapacitás-korlát szerepel Page és Paul (1976) cikkében [80]. A kereslet mindegyik termékre ismert, a rendelést egyszerre adják fel. Azt a rendelési periódushosszt kell megkeresni, amely a rendelés feladási és készlettartási összköltséget minimalizálja. Zoller, publikációjában [117] a modell általánosítását vizsgálja késési idővel bővítve.

A dinamikus programozás eszközét először Iglehart (1965) [56] alkalmazta két termék optimális stratégiájának meghatározására. Az általa adott rekurzív összefüggés numerikusan nehezen kezelhető. A modellt *Veinott* [105] általánosította ugyancsak a dinamikus programozás eszközét alkalmazva. A több termékes problémában *Wright* (1968), *Evans* (1969), *Johnson* (1968), *Hochstädter* [51] is kiváló eredményeket ért el [26].

A több periódusos modellek csoportosításáról jó áttekintést nyújt a [23] könyvrészlet. A szerzők több osztályozási jellemző figyelembevételével nyújtanak részletes áttekintést a többtermékes modellek fejlődéséről. A táblázatukban összefoglalt közel 40 vizsgált modell jellemzői alapján jól megfigyelhető, hogy csak néhány modell képes több terméket és több periódust is egyszerre kezelni.

2.6. Az újságárus modell

A sztochasztikus készletgazdálkodás elméletének irodalmában kiemelkedő szerepet kap az úgynevezett klasszikus újságárus modell (*Scarf* 1963 [90], *Arrow* et al. 1951 [5], *Hadley* és *Whitin* 1963 [49]). Az alapmodell egy újságárus viselkedését modellezi, aki különféle újságokat rendel a vásárlóknak megfelelő megjelenési gyakorisággal. A rendelés során a felmerülő kérdés, a megoldandó probléma az, hogy mennyi darab újságot kell rendelni ahhoz, hogy a várható profitja maximális legyen és vásárlókat a lehető legnagyobb mértékben kielégítse? Ha sokat rendel, nem tudja eladni azokat, ha keveset, akkor pedig az üzleten kívül elvesztheti akár a vásárlót is. Az irodalomban megtalálható klasszikus modell a következő profit alapú célfüggvényt [26] alkalmazza: $\pi = E\left(p \cdot \min(q, D)\right) - c \cdot q$, ahol p az újságok eladási ára, c pedig a vásárlási ára. Az újságárus tényleges profitja egyenlő az eladott áruk után járó bevétel és az áruk rendelési árának különbségével. A probléma megoldását a következő összefüggés jelenti: $q = F^{-1}\left(p - c/p\right)$, ahol F az alkalmazott, tetszőleges típusú kereslet-eloszlási függvény. A klasszikus újságárus probléma, és annak módosított változatai tipikusan a (t,S) periodikus modellek családjába tartoznak, ahol a „t" állandó hosszúságú periódusidő megválasztása problémafüggő.

A probléma nem csak nyereség értelemben, hanem költség alapú célfüggvény segítségével való megfogalmazása is megtalálható az irodalomban. A klasszikus modellről és alkalmazásáról jó áttekintést nyújt *Porteus* [83] munkája. A kidolgozott egyperiódusos modell egyszerűsége és hatékonysága miatt napjainkban számos új modell alapkövét képezi az ellátási lánc koordinációs problémáiban, valamint előszeretettel alkalmazzák az operációkutatás különböző területén. Centralizált és decentralizált ellátási lánc készletezési folyamatai (*Shang* és *Song* [93], *Cachon* 2003 [18]), kiskereskedelmi árukészlet tervezése (van *Ryzin*, *Mahajan* 1999 [88]), nemzetközi tevékenységek (*Kouvelis*, *Gutierrez* 1997 [60]), horizontális versengés a cégek között sztochasztikus igények esetén, (*Lippman*, *McCardle* 1995 [70]), lead time versengés (*Li* 1992 [68]), erőforrás bevonás és alvállalkozásba adási döntések (*Van Mieghem* 1999 [102]), Markovi típusú részlegesen megfigyelt rendelések (*Bensoussan* 2006 [13]), termék és folyamat újratervezés (*Fisher*, *Raman*

1996 [41]), korlátozott racionalitás (*Xuanming* 2007 [95]), készáru piac és készletgazdálkodás (*Lee, Whang* 2002 [66]) csak néhány alkalmazás a sokból. *Erlebacher* a [37] publikációjában a több termékes újságárus problémára adott optimális és heurisztikus megoldást. *Ding* és *Puterman* a cenzúrált igény optimális készletezési politikára gyakorolt hatását vizsgálja általános parametrikus igény-eloszlások, és ismeretlen paraméter értékek esetén [32].

Raz és *Porteus* [87] munkája az újságárus problémát az árak (pricing) szempontjából elemzi diszkrét kiszolgálási szintek feltételezése mellett. Specifikus igényeloszlások (pl. additív, multiplikatív, vagy a kettő keveréke) feltételezése helyett az igényt a kiskereskedelmi ártól függő determinisztikus változónak feltételezik. Több, az újságárus modellen alapuló modell a periódus végén a raktárban megmaradt termékeket egyszeres árengedménnyel, vagy túladással kezeli. *Khouja* [58] bővített modellje az újságárus által vezérelt többszörös diszkontálást enged meg az összes termék eladásának érdekében. A döntéshozó lehetséges viselkedése alapján két algoritmust fejlesztett ki az optimális diszkontálási mennyiség meghatározására. Az adott rendelési mennyiség és igény-realizáció számára fix diszkontálási költséget alkalmazott. Az árak további vizsgálatával foglalkozik *Kuhl*, *Steiger* és *Armstrong* közös cikke [61], valamint *Lariviere* és *Porteus* [63] és *Petruzzi* [82] is.

A klasszikus újságárus modell több periódusra való első alkalmazása *Herbert Scarf* nevéhez fűződik, aki a klasszikus modell egy periódusra vonatkozó költségfüggvényét alkalmazta [90]. Koncepciója szerint a megoldást valamilyen dinamikus programozási módszer segítségével kell keresni. Az irodalomban természetesen az újságárus modell mellett számos más megközelítés is ismert, amely képes több periódusos politikát meghatározni, azonban e modellek többségének megoldása a bonyolultságelmélet úgynevezett NP-nehéz típusú feladata. Az informatikai hardver eszközök rohamos fejlődése napjainkban már lehetővé teszik az egyre bonyolultabb megközelítések és heurisztikák alkalmazását is.

Napjaink nagyvállalatai igénye miatt a kutatások egy fontos iránya a többtermékes modellek fejlesztése. A többtermékes problémát egyenletes eloszlás és egy periódus esetén oldja meg *Ben-Daya* és *Raouf* modellje két lineáris korlátot alkalmazva, Lagrange-szorzó segítségével. *Lau* és *Lau* [64] olyan algoritmust fejlesztett ki, amely tetszőleges eloszlás esetén is megoldja a problémát. *Niederhoff* modellje [78] a konvex szeparált programozás lehetőségeit használja ki. Közelítő megoldása tetszőleges eloszlás esetén alkalmazható a klasszikus problémára és kiegészítéseire.

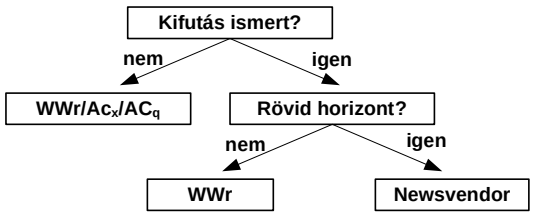
2.7. Napjaink készletgazdálkodása

A készletgazdálkodás az ellátási láncok menedzselésében manapság még fontosabb szerepet kap. Az informatika rohamos fejlődésével egyre nagyobb szerephez jutnak az ERP és SCM alkalmazási rendszerek, amelyekben az adatbázis alapú tranzakciókon túlmutató analitikus megoldások is helyet kaphatnak. Következésképpen a soktermékes és sokszereplős dinamikus rendszerek kezelhetővé váltak különböző operációkutatási módszerek (pl. korlátozás programozás, metaheurisztikák) alkalmazásának segítségével. Gyors döntéseknél és a „mi lenne ha?” típusú elemzésekben azonban továbbra is nagy szerepe van az analitikus eredményeken és heurisztikákon alapuló megoldásoknak.

Számos kiváló publikáció jelent meg a témával kapcsolatban (*Lal* és *Staelin* (1984) [62], *Mish-*

ra és *Raghunathan* (2004) [73], *Lee* és *Rosenblatt* (1986) [67], *Dada* és *Srikanth* (1987) [29] és *Weng* (1995)) melyek determinisztikus igény modellekkel dolgoztak. A 90-es években jelentek meg az (S,s) típusú többtermékes dinamikus készletgazdálkodási politikák, melyek matematikai hátteréhez *A. Markov* elmélete nyújtott szilárd alapokat. A modellek fejlődése napjainkban leginkább a vállalatok közötti együttműködés modellezése felé orientálódott. A kollaboratív tervezés (*Aviv* [6]), a forecast és a VMI (*Aviv* és *Federgruen*, 1998 [7]), valamint az ellátási láncon belüli információ megosztás témakörben (*Gavirneni*, *Kapuscinski* és *Tayur*, (1999) [46]) jelentős eredményeket értek el a kutatók. Napjainkban az ellátási lánc sokszínű problémáinak megoldásában a legkiemelkedőbb eredmények *G. P. Cachon* nevéhez fűződnek, akinek számos publikációja [18] [19] [20] [21] kiváló eredményeit tanúsítja. Az úgynevezett „lot-size" problémákról, és azok megoldásairól jó áttekintést nyújtanak a [1], [15] és [101] publikációk. Részleges vásárlói rendelés-információn alapuló sztochasztikus tételnagyság problémára *Dellaert és Melo* [30] adott közelítő megoldást.

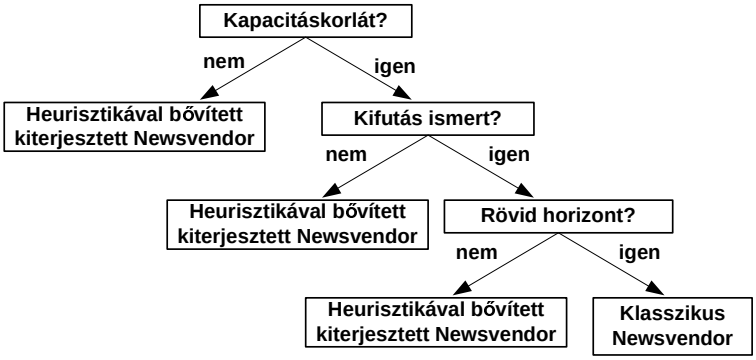
A partnerek közötti szorosabb kooperáció létrejötte jelentős változást gyakorol a készletgazdálkodásban alkalmazott modellekre és módszerekre. A fejlesztések egyre inkább a kooperatív rendszerek irányába haladnak, amelyek lehetővé teszik a globális és lokális célok összekapcsolását. Az irodalomban számos publikáció jelent meg a probléma modellezésével kapcsolatban. A legfontosabbak, a jelen értekezés problémaköréhez szorosan kapcsolódó problémákat megoldó úgynevezett kooperatív „logisztikai platform" kidolgozását bemutató *Váncza* és *Egri* [34] [103] publikációk. Kutatási eredményeikben – a jelen értekezéshez hasonlóan – az igény szerinti tömeggyártás bizonytalan piacán működő ellátási láncok tervezési problémái kapnak hangsúlyt. Céljuk a termelési hálózatokban jelentkező azon tervezési, készletgazdálkodási és logisztikai problémák modellezése, melyek megoldása a hálózati kooperáció előfeltétele. A feladat olyan kooperációs mechanizmusok kidolgozása, melyek lehetővé teszik autonóm felek közt is a beszerzési csatornák összehangolt, minimális összköltséggel való működtetését. Megoldásuk több készletgazdálkodási módszer portfolióján alapszik. Különböző módszereket dolgoztak ki és ajánlottak a rövid, közép és hosszú távú döntésekre, valamint a termékek bizonytalansággal terhelt „kifutásának" kezelésére. A módszerek portfóliójának felépítése a következő ábrán figyelhető meg:



2.2. ábra. Döntési alternatíváknak megfelelő készletezési modellek javaslata [34]

Modelljükben a fa utolsó levelein két modell, a *Wagner-Whitin* determinisztikus módszer termékkifutással kiegészített változata (*WWr*) és a setup költséggel kibővített klasszikus újságárus modell (*Hopp*, *Spearman* [53]) jelenik meg, amelyeket csak rövid horizont és a termékkifutás időpontjának biztos ismeretében alkalmaznak. Hosszú időhorizont estén a WWr modellt, az átlagos költséget minimalizáló AC_x (időre vonatkozó fajlagos költség), AC_q (termékre vonatkozó fajlagos költség) heurisztikus módszereket javasolták.

Az értekezésben a továbbiak során látni fogjuk, hogy a tárgyalt újságárus modell új megközelítésű kiterjesztéseinek segítségével a döntési alternatívákat javasoló fa tovább bővíthető.



2.3. ábra. Döntési alternatívák javaslata az értekezésben tárgyalt módszerek alapján

3. fejezet

Az újságárus modell alkalmazása az igény szerinti tömeggyártásban

3.1. Analitikus megközelítés

A beszállító által használható sikeres készletezési modellekben a kritikus és az optimális raktárkészlet, valamint a költség-optimális raktározási politika döntések sorozataként realizálódik. Ezek során döntések születnek arról, hogy mekkora készleteket tartsanak a tervezett kiszolgálási szint biztosítására, vagy akár a hiánymentes szolgáltatáshoz, továbbá mikor és mekkora mennyiségű termék gyártása történjen a készletek pótlására. Ilyen döntéseket minden beszállító cégnek hoznia kell, amely szerződés alapján, készletekből elégít ki lehíváson alapuló igényeket. Fel nem használható és/vagy felesleges többlet gyártása esetén készlet finanszírozási és raktározási többletköltségek, nem elegendő mennyiség gyártása esetén pedig hiány, szerződés nem teljesítés és büntető (*penalty*) költségek jelennek meg. Ez utóbbiak modellezése különösen nehéz, mert a büntetés esetleg a megrendelő bizalmának teljes elvesztéséig, szerződés-bontásig terjedhet.

Természetesen különböző modelleknek különböző célfüggvényei lehetnek, melyek segítségével mindkét fél érdeke vagy akár egyfajta közös érdek is kifejezhető a végszerelő és beszállító között. (együttes célfüggvények). Korlátozásként jelenhet meg a „hiány" szigorú meg nem engedése is (pl. VMI és rövid ciklusú JIT beszállító rendszer esetén). Az értekezésben olyan modellt vizsgálunk, amely általánosságban megengedi a hiány kis kockázatát, de a büntető költségek hangolásával ezek gyakorisága tetszőleges kicsivé tehető.

A bűntető költségek fogalmát a készletezési politikában az irodalom három különböző módon használja:

1. Az első értelmezés szerint a beszállító bűntető költséget fizet a ki nem elégített rendelések (lehívások) esetén, amely a végtermék-gyártó által elvesztett üzlet veszteségének részbeni vagy teljes átvállalását jelenti. Ez az eset az egyszerű, „hideg" vásárló-eladó viszony esetén is megjelenik.

2. Egy második értelmezés szerint a beszállítónál keletkezett hiány mindenképpen növeli a teljes termelési lánc költségeit még akkor is, ha nincs konkrét elveszett üzlet. A végtermék

gyártónak ugyanis többlet belső tevékenységekkel, késztermék készletekkel, átütemezésekkel, stb. kell a beszállítói hiány következményeit elhárítani. Ez a fajta megközelítés már egyfajta „meleg" (kooperatív) kapcsolatot tételez fel a felek között.

3. A harmadik értelmezés szerint nemcsak a belső rendelések ki nem elégítése és az üzletvesztés, hanem a túlzottan nagy elfekvő, (esetleg már soha többé nem értékesíthető) készletek is veszteséget okoznak a teljes termelési láncnak, amelyet a feleknek közösen kell viselni. A felek ilyen szoros üzleti, termelési és logisztikai viszonya hosszú-távú érdekközösséget, egyfajta „virtuális vállalati" kapcsolatokat tételez fel.

Jelen értekezés a büntető költség értelmezését a második típusra vonatkoztatja. A modellben az igényt, amely a lehívási események alkalmával jelenik meg idő-függőnek, illetve *valószínűségi változó*nak tételezzük fel, amely az előrejelzésekben várható értékével és eloszlás függvényével ismert. (A legegyszerűbb esetben minden t időpontban ez D_{min} és D_{max} között egyenletes eloszlású). Az igények előre meghatározott és ismert, fix periodicitással érkeznek a beszállítóhoz. Az értekezésben így *rendelési periódus*on a két lehívás között eltelt időt értjük, amely mindig a rendelkezésre álló „legfínomabb" előrejelzést jelenti. A fix periódus nagyságát a mintapéldák során általában egy naptári hétnek tekintjük. *Gyártási ciklus*on azon periódusok együttesét értjük, amelyek két készletfeltöltés között eltelt időt reprezentálják. Természetesen az ismertetett modellek periodikus jellegéből fakadóan a megoldás mindig az előrejelzések finomságának megfelelően optimális. Továbbá a tárgyalt modellekre vonatkozó előfeltevések a következők:

1. Rendelések esetén az utánpótlás (gyártás és szállítás) azonnali.
2. A beszállítóhoz érkező igény minden időperiódus végén realizálódik.
3. Az átállások költségei minden beszerzési ciklus elején jelentkeznek. A legszélsőségesebb eset akkor fordul elő, ha egy ciklus egyetlen periódusból áll. Ilyenkor minden egymást követő periódusban jelentkezik ez a költség.
4. Több termék egyidejű gyártása (beszerzése) esetén az átállások egymástól függetlenek és nem oszthatók meg a termékek között.

Az értekezés a készletezési problémát a beszállító oldaláról vizsgálja. A kollaborációs érdekek a paraméterek értékein keresztül jelennek meg a modellben. A célfüggvények bevezetése és a probléma megoldási módszerének bemutatása után ismertetjük az optimális politika megvalósításának lépéseit. Kiindulási modellnek a klasszikus újságárus modell fix költség taggal kiegészített változatát [8] tekintjük. Az egy periódus lefedésére alkalmas modell költség alapú célfüggvénye a következő:

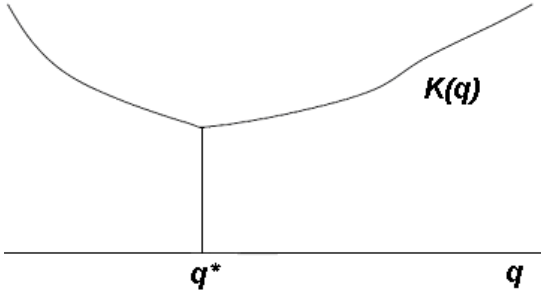
$$K(q) = c_f + c_v(q - I) + pE\left[D - q\right]^+ + hE\left[q - D\right]^+, \tag{3.1}$$

ahol $[q - D]^+ = max(q - D, 0)$, $[D - q]^+ = max(D - q, 0)$.

A függvényben c_f kifejezi, hogy minden sorozat gyártásának indítása valamilyen fix költséggel jár. Egy darab termék előállítási ára c_v. A modell döntési változója q, amely a raktáron lévő termékek darabszámát jelenti. I jelenti azt a készletszintet, amivel a beszállító a periódus elején,

gyártás előtt rendelkezik. A kumulált tárolási költségek paramétere h. A beszállítóhoz érkező igényeket D, tetszőleges eloszlású valószínűségi változó reprezentálja, valamint a ki nem elégített rendelés büntetését minden termék után p jelenti.

A következő ábra a célfüggvény jellegét mutatja be, ahol az optimum helyét q^* jelöli:



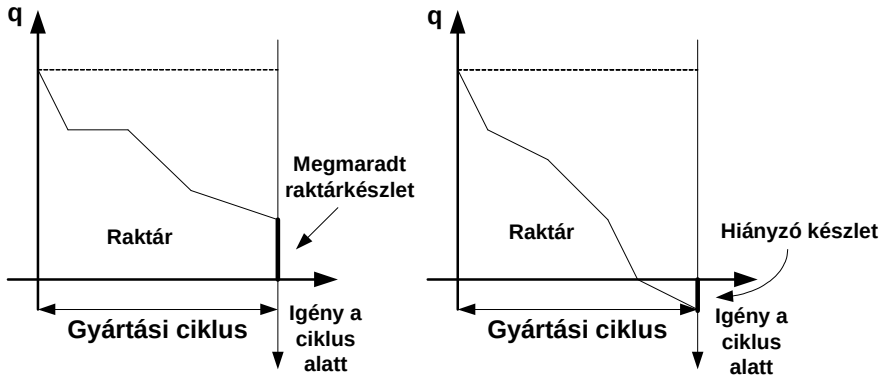
3.1. ábra. A költség alapú célfüggvény jellege

A továbbiakban részleteiben is megvizsgáljuk a klasszikus modellt és annak tulajdonságait.

3.1.1. A célfüggvény összetevői

A költség szemléletű megközelítés célfüggvénye négy fontos tagból tevődik össze. Az első tagja a már bemutatott gyártásindítási költség (c_f), amely a gyakorlatban általában egy magas érték. A második tag ($c_v(q-I)$) a gyártandó termékek változó költségét mutatja. Mivel feltételezzük, hogy a raktárban már I darab késztermék rendelkezésre áll, ezért egy gyártási döntés $m = q - I$ darab termék legyártását fogja eredményezni.

A költségfüggvény harmadik tagja a büntető költség összefüggése, amely a kielégítetlen igényből származó költséget szimbolizálja. A költségfüggvényben szereplő $max(x, 0)$ függvény akkor lesz nullától eltérő, ha az igény nagyobb, mint a raktáron lévő mennyiség. Lehetnek természetesen olyan esetek, amikor a hiány nem megengedett. Ezt úgy lehet figyelembe venni, hogy a modell p paramétere egy korábban meghatározott magas értéket kap. Az értekezés 7. fejezete részletesen tárgyalja ennek módját. A (3.1) egyenlet utolsó tagja azt a készletezési többlet (holding) költséget adja meg, amely akkor keletkezik, ha az igény kevesebb volt, mint a raktárban lévő késztermék mennyiség. Ha az igény több, mint a már legyártott késztermék mennyisége, akkor természetesen nincs többlet raktározási költség, mivel a raktár kiürül a rendelés teljesítése után. A 3.2. ábrán mindez vizuálisan szemlélhető.



3.2. ábra. Az igény és raktározási mennyiség kapcsolata

A raktározási költségtényező h értéke két további költségtényezőből tevődik össze: $h = H + h_t$, ahol h_t a termék tényleges tárolásának költségét jelenti. Ez önmagában azonban nem elegendő, hiszen a raktáron maradt termék értéke magában foglalja a beszállítónak korábban a termékbe fektetett pénzét is. Ennek megfelelően szükséges a termékenként értelmezett H forgótőke lekötési költség értelmezése és bevezetése is.

A modellben a következő két ellenérdek ütközik: az egyik a termékek raktáron való tárolása, amely a gyártási mennyiség növelésével érhető el. Természetesen ez többlet-tárolási költséggel, forgótőke lekötéssel jár. A másik a hiány kockázatának viselése, amely azt jelenti, hogy kevesebb terméket raktározunk. Fontos észrevenni azt, hogy egy termék hiányának költsége nem egyenlő a termék árával, hanem attól magasabb. Akár még a vásárló elvesztésével is járhat.

3.1.2. Az optimális készletezési mennyiség meghatározása

Költség alapú politika esetében a legfontosabb cél az egyes költségösszetevők függvényében a minimális költségű megoldás meghatározása a beszállító számára. A minimális költségű megoldás alapja az az optimális készletezési mennyiség, amely hosszú távra hatékony készletezést biztosít. A (3.1) költségfüggvény alapján a megoldás egy szélsőérték számítási feladatként adódik, ahol cél a költség függvény minimumának megtalálása:

$$\frac{dK(q)}{dq} = \frac{d}{dq}\left\{c_f + c_v(q-I) + pE\left[D-q\right]^+ + hE\left[q-D\right]^+\right\} = 0. \tag{3.2}$$

A fenti összefüggésből a q^* optimális értékre (a részletes levezetés az (A.1) mellékletben található) indirekt összefüggést kaptunk. A bonyolultságot a max operátorok és az E várható érték operátor kezelése okozza. A hosszú távon költségoptimális késztermék mennyiség a következő összefüggés alapján számítható [8]:

$$F(q^*) = \frac{p - c_v}{p + h}, \tag{3.3}$$

ahol $F(D)$ az igény eloszlásfüggvénye. A q^* értéke kifejezi azt a paramétereknek megfelelő optimális mennyiséget, amelynek a raktáron kell lennie az igény megjelenésekor. A megoldás láthatóan két költségtípus speciális „arányaként” értelmezhető, amely kisebb átalakítás után a következő, szemléletesebb formára hozható:

$$F(q^*) = \frac{p - c_v}{(p - c_v) + (h + c_v)} = \frac{\text{hiányt jellemző költség}}{(\text{hiányt jellemző költség}) + (\text{többletre jellemző költség})}. \tag{3.4}$$

A (3.3) megoldás formulában $\frac{p-c_v}{p+h}$ egy kritikus faktor (*CR – Critical Fractile Ratio*), amely a ki nem fogyás valószínűségeként értelmezett (*In-Stock probability*) [64]. Tehát $\xi = P(Demand \leq q)$. Definíció szerint annak a valószínűsége, hogy az adott periódusban minden igényt ki tud elégíteni a beszállító. Százalékban kifejezve gyakran periódus kiszolgálási szintként (*Cycle Service Level – CSL*) ismert [83].

Természetesen ξ ismeretében a kifogyás valószínűsége (*Stockout probability*) is meghatározható: $\zeta = 1 - F(q^*) = 1 - \xi$. A megoldásban megfigyelhetjük, hogy ha $p < c_v$, akkor a feladat matematikailag nem értelmezhető, hiszen ekkor $F(q^*) < 0$ lenne, amit az eloszlásfüggvény definíciója nem enged meg. A valóságban ez azt jelenti, hogy a beszállító nem gyárt semmit, inkább viseli a büntető költséget. Ez alapján kimondhatjuk, hogy a modell csak $p > 0, c_v > 0$ és $p \geq c_v$ esetén értelmezhető.

3.1.3. A kritikus raktárkészlet alkalmazása a modellben

Könnyű belátni, ha éppen nem áll rendelkezésre az igényt kielégítő mennyiség, akkor nem feltétlenül kell gyártani, mivel a gyártásindítás egy olyan fix költséggel jár, ami a kis mennyiség gyártását költségessé teszi. Ebből következően belátható, hogy biztosan létezik egy olyan kritikus mennyiség, ami kisebb a fent definiált értelemben optimális (q^*) késztermék mennyiségétől, de ezt a mennyiséget választva érdemesebb elviselni a büntetés kockázatát. Azt a pontot, ahol annak a döntésnek a költsége, hogy gyártunk, és annak a döntésnek a költsége, hogy inkább vállaljuk a hiány kockázatát egyenlő, nevezzük kritikus (critical) raktárszintnek (s). A kritikus raktárkészlet használata azonban a gyakorlatban már kollaborativitási kérdéseket vet fel, amely az együttműködő partnerek szerződéses viszonyától nagymértékben függ. A szakirodalomban a kritikus készletszint modellbeli megjelenését a politika megnevezésénél „s"-el jelölik (pl. (s,S) és (s,q)). A továbbiakban a kritikus raktárkészlet meghatározásának módszerét mutatjuk be, amely során belátható, hogy az optimális készletezési mennyiség és a kritikus raktárkészlet együtt alkothatják a beszállító optimális készletezési politikáját.

A kritikus készlet kisebb, mint a hosszú távú költség-optimális raktárszint. Ha az aktuális készletszint ez alá esik, csakis akkor érdemes növelni a készletet az optimális szintre. A következőkben belátjuk ennek okát.

Vezessük be $L(q)$ jelöléssel a csonkított, kockázati költségfüggvényt, amely a hiány és a készletezési többlet költségek összege, valamint jelöljük S-el az optimális készletezési mennyiséget:

$$L(q) = pE\left[D - q\right]^+ + hE\left[q - D\right]^+ . \tag{3.5}$$

Tegyük fel, hogy a kezdő raktárkészlet kevesebb az optimálisnál, azaz $I < S$. Ha megnöveljük a készletet az optimális szintre, akkor a teljes költség:

$$K(S) = c_f + c_v(S - I) + L(S). \tag{3.6}$$

Ha nem történik gyártás, akkor viszont csak a kezdő raktárkészlettel (I) kell számolni, tehát $L(I)$-el. Ha az $L(I) \leq K(S)$ feltétel teljesül, akkor nem kell gyártani, mivel a fix (setup) és a változó költségek megnövelnék a beszállító költségét. A kritikus raktárszint meghatározása tehát az $L(I) \leq K(S)$ összefüggés átrendezése segítségével történhet a következőképpen:

$$L(I) \leq c_f + c_v(S - I) + L(S), \tag{3.7}$$

$$L(I) \leq c_f + c_v S - c_v I + L(S), \tag{3.8}$$

$$L(I) + c_v I \leq c_f + c_v S + L(S). \tag{3.9}$$

A kritikus raktárszint (s) jelölésével ekkor az egyenlet a következőképpen módosul:

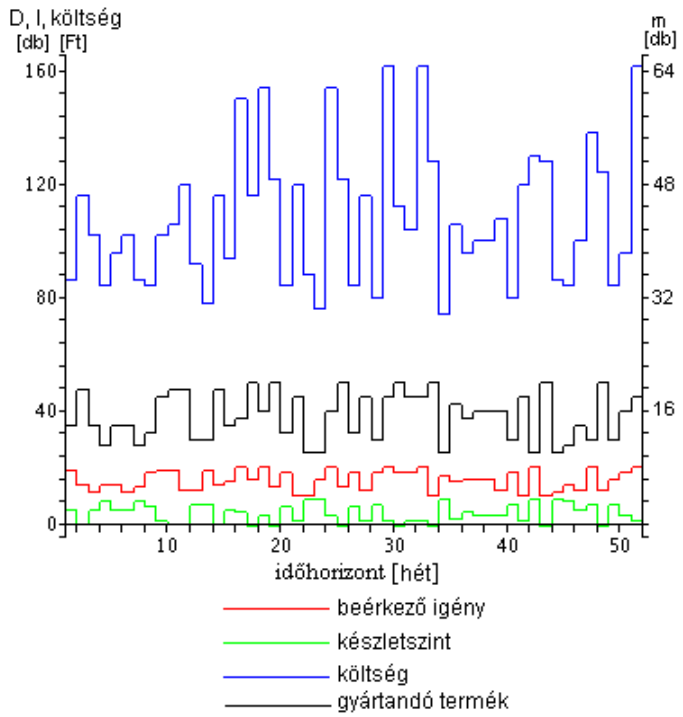
$$L(I) + c_v s \leq c_f + c_v S + L(S), \tag{3.10}$$

ahonnan s numerikusan meghatározható. A kapott megoldás értelmében, tehát ha a beszállító raktárkészlete a kritikus szint (s) alá süllyed, akkor $m = S - I$ mennyiségű terméket kell gyártani. Ellenkező esetben nem érdemes gyártani, mert ekkor a gyártás költsége magasabb, mint a nem gyártásé. Az értekezés (A.2) függeléke konkrét mintafeladaton keresztül mutatja be az ilyen szemléletű optimális készletezési politika meghatározását.

3.1.4. Szimulációk a politika ellenőrzésére

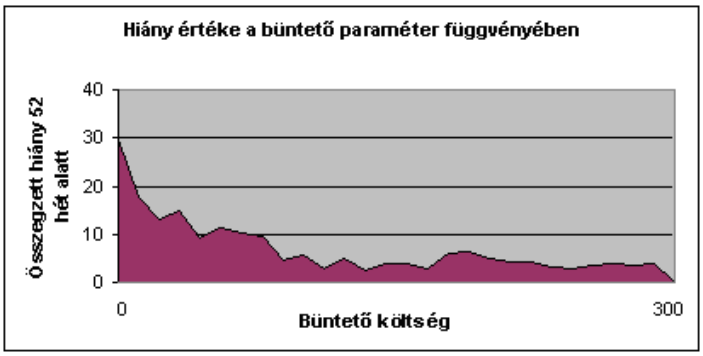
A továbbiakban a megoldott készletezési feladat ellenőrzését 52 hetes szimuláció segítségével végezzük el. A modellben a beszállító és vevő között kollaboratív kapcsolatot tételeztünk fel. Ez azt jelenti, hogy hiány keletkezése esetén a következő gyártási ciklusban a beszállító köteles az előző ciklus hiányát pótolni. Ennek szankcióit és a kockázat megosztását a felek szerződése p értékben fejezi ki. A szimuláció elvégzéséhez MAPLE matematikai programcsomagot alkalmaztunk. Az illusztratív példa jellegű szimuláció alapadatai a következők:

A termékekre való igény egyenletes eloszlást követ 10 db/hét és 20 db/hét intervallumban. A büntető költség minden hiányzó elem esetén $p = 50$ egység és a változó költség $c_v = 10$ egység. A kumulált raktározási költség termékenként $h = 5$ egység/periódus. A gyártási költség fix része $c_f = 30$ egység/sorozat. A raktár kezdetben üres. A szimuláció eredményét a következő ábra mutatja:



3.3. ábra. A beszállítói probléma szimulációs eredménye

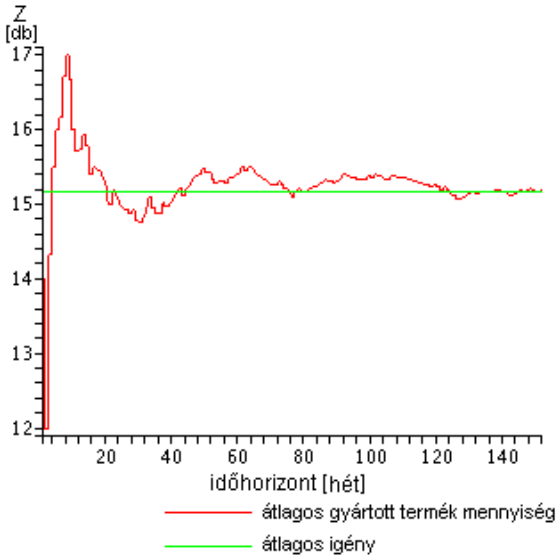
Hiány és ezzel büntető költség keletkezik akkor, ha a beszállító raktárszintje negatív, ami egyben a ki nem elégített rendelés mennyiségét is jelenti. Ez akkor fordul elő, ha a beérkező igény nagyobb, mint a raktári mennyiség. Fontos megjegyezni, hogy nem történik gyártás akkor, amikor a készlet éppen az optimális és a kritikus raktárszint közé esik. Természetesen ekkor megnő a hiány bekövetkezésének valószínűsége. Valós feladatokban a termékek egy részére hiány nem, vagy csak minimális mértékben engedhető meg. Ez a feltétel a p büntető paraméter értékének magasra állításával építhető be a modellbe. A 3.4 ábra mutatja, hogyan csökken a büntetés fizetésének gyakorisága nullára, miközben a büntető költség növekedik.



3.4. ábra. A nem kielégített rendelések darabszáma a büntetés függvényében

A mérési eredményeket több szimuláció átlagából képeztük, ahol az igények az egyenletes eloszlásnak megfelelően véletlenszerűen változtak. Észrevehető, hogy a büntető költség növelésével vannak olyan esetek, amikor a hiány gyakorisága nem csökken. Ennek oka az egyenletes eloszlás szerinti rendelések határokon belüli értékének véletlenszerű változása. A szimulációs teszt jól mutatja, hogy a büntető költségek emelésével a kiszolgálási szint értéke 100%-ra növelhető. Ez azt jelenti, hogy minden igény kielégítésre került.

A modell megoldásának további ellenőrzése céljából szimulációk segítségével igazoltunk, hogy a legyártott termékek hetenkénti átlaga aszimptotikusan közelít az igények hetenként értelmezett átlagához. Megvizsgáltuk, hogy ugyanazon igények és paraméterek mellett milyen értékhez tart a beszállító által legyártott termékek darabszámának átlagértéke. A következő ábra egy 150 hetes szimuláció eredményét mutatja:



3.5. ábra. A beszállítói termékgyártás hosszú távú átlaga

Az ábra y tengelyén a legyártott termékek átlagát (Z) ábrázoltunk az eltelt hetek függvényében. Jól látszik, ahogy haladunk az időben előre, a legyártott termékek eltelt hetekre vett átlaga egyre jobban közelít a teljes időintervallumra számított igények átlagához, míg el nem éri azt. A büntető költségek változtatásával természetesen más tranziens folyamatok is megvalósíthatók.

Jól megfigyelhető, hogy a klasszikus újságárus modell megoldása érzéketlen a setup költség nagyságára. Ez abból fakad, hogy a módszer kimondottan egy periódusos problémák kezelésére lett kidolgozva. A modell sztochasztikus tulajdonsága miatt ilyen formában hosszabb időhorizont esetén csakis akkor alkalmazható, ha a beszállítóhoz beérkező igények valószínűségi jellemzői statikusok maradnak a vizsgált időhorizont alatt.

4. fejezet

A raktározási probléma kiterjesztése több periódus együttes kezelésére

Az egy lehívási periódusra érvényes optimális készletezési politika feladatának megoldása jól mutatja, hogy a klasszikus újságárus modell setup költséggel bővített változata hatékony készletgazdálkodási módszer. Jól alkalmazható minden olyan esetben, amikor nagy valószínűséggel minden periódusban történik gyártás (rendelés). Az irodalomban legfőképpen rövid távú döntésekhez, a rövid élettartalmú termékek készletgazdálkodási problémáinak megoldására javasolják.

A bemutatott modell ilyen formában azonban csak nehezen adaptálható az igény szerinti tömeggyártás valós készletezési problémáinak megoldására. A gyakorlati tapasztalatok egyértelműen arra utalnak, hogy nagy volumenű termékgyártás, bizonytalan és váratlan igényváltozások és jelentős üzletvesztési kockázat esetén a beszállító nem lehívási periódusonként indít gyártást. A lehívások akár rendszeres periódusokban akár rendkívüli igények esetén érkezhetnek a beszállítóhoz. A nem periódusonkénti beszállítói gyártás oka rendszerint az erőforrások (pl. gépek) – a gyártás többi költségeihez képest – magas setup költsége, és a késztermék gyártó anyaghiányának szigorú következményei. Nem ritka, hogy egy gyártási sorozat setup költsége magasabb a teljes arányos gyártási költségénél vagy, hogy egy kisebb sorozat hiánya a teljes költség többszörösét kitevő üzleti kárt okoz.

Első közelítésben a több periódusos gyártás célja úgy fogalmazható meg, hogy több periódus igényeinek megfelelő mennyiségek együttes gyártása a gépek egyszeri beállításával történjen. Ebben az esetben a gyártást csak egy setup költség terheli. Könnyen belátható, hogy az egy periódusos gyártás ezek alapján egy szélsőséges esetnek tekinthető. A másik szélsőséges esetnek tekinthető az, amikor túl sok periódus várható igényeinek gyártása történik egyszerre. Ekkor ugyanis a tárolási és forgótőke lekötési költségek nőhetnek ésszerűtlenül nagyra. Az optimális megoldás e két szélsőség között helyezkedik el valahol. A több periódusos gyártás célja tehát az, hogy megfelelő számú periódus igénymennyiségének együttes gyártása történjen egyszeri gyártásindítással. A kérdéses periódusszámot mindig a kereslethez tartozó optimális készletszintek és a gyártásindítási költség valamilyen formában kifejezett aránya határozza meg. A probléma megoldása valamely hosszabb időhorizontra értelmezve rekurzívan jelenik meg, hiszen az időhorizont teljes hosszára nézve kell egy olyan készletgazdálkodási politikát felállítani, amely optimális

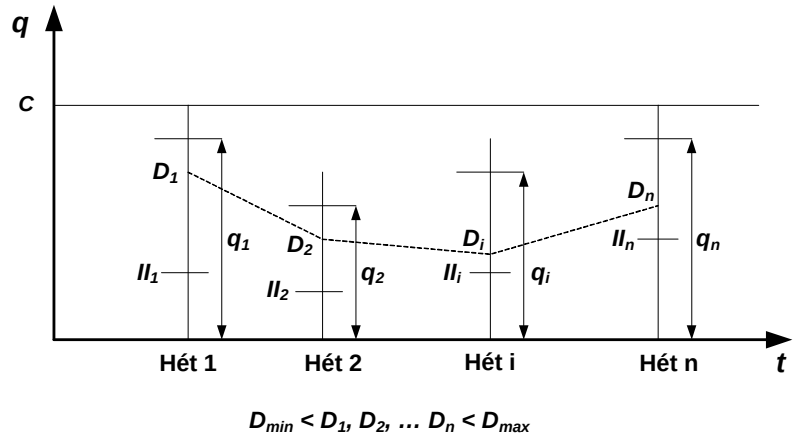
együttgyártási periódusszámú részekre (a továbbiakban gyártási ciklusra) bontja az időhorizont egészét.

A következőkben olyan módszereket és modellbeli bővítéseket mutatok be, amelyek segítségével megoldható a több periódus együttes gyártásának problémája. A bemutatott módszerek szimulációs eredményei alapján látni fogjuk, hogy egy-egy hosszabb időhorizont megoldásának meghatározása a hagyományos módszerek segítségével problémás lehet.

4.1. A több periódus vizsgálata a korlátozás programozás módszerével

A klasszikus egy periódusos modell több periódusra való alkalmazásának első ötlete *Herbert Scarf* professzor nevéhez fűződik. *Scarf* javaslata szerint az egy periódusos költségfüggvényt alapul véve a probléma valamilyen optimum kereső eljárás felhasználásával oldható meg. Több periódus mennyiségeinek együtt gyártása megvédheti a beszállítót a magas setup költségektől és a hiánykockázatot is csökkenti. Az algoritmus célja mindig a keresési térben a legjobb megoldás, költség alapú megközelítésben a legkisebb költségű eset kiválasztása.

A több periódusos optimalizálási feladat megoldása például az úgynevezett korlátozás programozás (*constraint programming*) módszer segítségével lehetséges. Alkalmazása lehetőséget nyújt a probléma több periódus együttes vizsgálatán túl a különböző feltételek és korlátok hatékony figyelembevételére is. Az eljárás a működése során további heurisztikát nem alkalmazva végigfut a keresési tér összes lehetséges esetén és meghatározza a legkisebb költségű változathoz tartozó optimális készleteket. A továbbiakban az értekezés a módszer speciális alkalmazását ismerteti, ahol jelen esetben egy periódus egység egy naptári hetet jelent. A következő ábra a raktárkészlet és az igény változásait mutatja be egy tetszőleges hosszúságú (esetünkben n darab hét) termelési időhorizontot vizsgálva:



4.1. ábra. A beszállítói raktár változása az igények függvényében

Az ábra vízszintes tengelye az időhorizontot reprezentálja hetekben kvantálva. Az y tengely a termékmennyiséget jelzi. Az egyszerre történő gyártási mennyiségek felső határát $C \in [0, \infty]$ kapacitáskorlát maximálja. Az igény előrejelzések folyamatosan érkeznek a beszállítóhoz a végtermékgyártótól, amelyeket a modellben a D_i paraméterek jellemeznek. Feltételezzük, hogy

az igények egy meghatározott eloszlás szerint érkeznek. Egyenletes eloszlás [115] alkalmazása esetén biztosan $D^i_{min} \in [0,\infty]$ és $D^i_{min} \leq D^i_{max} \in [0,\infty]$ határértékek közé esnek, azaz $D_i \in [D^i_{min}, D^i_{max}]$. Normális eloszlás esetén a periódusok várható értéke (μ^i, i = 1,2,3,...,n) és a hozzájuk tartozó σ^i szórás adja a támpontot. A modellben $q_i \in [0,\infty]$ jelöli az aktuális hét raktáron lévő termékmennyiségét. Optimális darabszámuk mindig a modell minimális költségű megoldását reprezentálja. Az I_i az i. hét gyártás előtti aktuális raktárszintje.

Az n hétre vizsgált beszállítói probléma optimális megoldása ezen feltételek mellet nem más, mint az egész időhorizontra vetített teljes költség minimalizálása. Az n hét együttes gyártásának célfüggvénye a setup költséggel bővített modell alkalmazásával a következőképpen fogalmazható meg:

$$\sum_1^n Pr_i + \sum_1^n H_i + \sum_1^n P_i = \sum_1^n (Pr_i + H_i + P_i) \longrightarrow \min . \tag{4.1}$$

Itt $\mathrm{Pr}_i = c_f + c_v (q_i - I_i)$ az i. heti változó gyártási költség, amely a termékenkénti gyártás és setup költségét foglalja magába. Annak a döntésnek a meghozatalát, hogy az adott héten szükséges-e újabb setup, a következő feltétel alkalmazása segíti:

$$\text{Ha} \begin{cases} q_i - I_i > 0, & akkor\ Pr_i = c_f + c_v (q_i - I_i)\ ; \\ q_i - I_i \leq 0, & akkor\ Pr_i = 0. \end{cases} \tag{4.2}$$

Gyártás (és ezért „setup-olás") hiányában az adott héten csak tárolás és lehívás történik. Az egyenlet további részében $H_i = hE[q_i - D_i]^+$ jelenti az egyes hetekhez tartozó tárolási költséget, ahol az egyes költségértékek a függelék bevezetőjében található várható érték definíciójának és jelölésmódjának megfelelően a következőképpen fejezhetők ki:

$$H_i = h\int_0^{q_i} (q_i - x) f(x)dx = h\left[q_i \int_0^{q_i} f(x)dx - \int_0^{q_i} xf(x)dx\right] = h\left[q_i F(q_i) - \int_0^{q_i} xf(x)dx\right]. \tag{4.3}$$

A megfelelő hetekhez tartozó ki nem elégített rendelés büntető költsége ($P_i = pE[D_i - q_i]^+$) a korábbiakhoz hasonlóan, a várható érték definíciója alapján az alábbi alakban írható:

$$P_i = p\int_{q_i}^{\infty} (x - q_i) f(x)dx = p\left[\int_{q_i}^{\infty} xf(x)dx - q_i \int_{q_i}^{\infty} f(x)dx\right] = p\left[\int_{q_i}^{\infty} xf(x) - q_i (1 - F(q_i))\right]. \tag{4.4}$$

A költségfüggvény tagjaiban szereplő integrálok az eloszlásfüggvény tekintetében általános érvényűek, tetszőleges eloszlás esetén alkalmazhatók. Bármely típusú eloszlás alkalmazása esetén az integrálok „kibontására" van szükség. Példaként az egyenletes eloszlás alkalmazásának összefüggéseit mutatom be:

$$\int_0^{q_i} xf(x)dx = \begin{cases} 0,\ q_i < D^i_{\min}\ , \\ \int_{D^i_{\min}}^{q_i} x\frac{1}{D^i_{\max} - D^i_{\min}}dx,\ D^i_{\min} \leq q_i \leq D^i_{\max}\ , \\ \int_{D^i_{\min}}^{D^i_{\max}} x\frac{1}{D^i_{\max} - D^i_{\min}}dx,\ q_i > D^i_{\max}, \end{cases} \tag{4.5}$$

$$\int_{q_i}^{\infty} xf(x)dx = \begin{cases} \int_{D^i_{\min}}^{D^i_{\max}} xf(x)dx,\ q_i < D^i_{\min}\ , \\ \int_{q_i}^{D^i_{\max}} xf(x)dx,\ D^i_{\min} \leq q_i \leq D^i_{\max}\ , \\ 0,\ q_i > D^i_{\max}, \end{cases} \tag{4.6}$$

$$F(q_i) = \begin{cases} 0,\ q_i < D^i_{min}\ , \\ \frac{q_i - D^i_{min}}{D^i_{max} - D^i_{min}},\ D^i_{min} \leq q_i \leq D^i_{max}\ , \\ 1,\ q_i > D^i_{max}. \end{cases} \tag{4.7}$$

Az optimalizálási feladat helyes megoldásához különböző korlátfeltételek bevezetésére van szükség. A korlátozás programozás eszközrendszerét felhasználva több, a valóságban fontos korlátozó tényező is figyelembe vehető. A modellben alkalmazott feltételek a következők:

1. Kapacitáskorlát: a termelő eszközök gyártókapacitása korlátozott. Az i. heti tényleges gyártandó mennyiséget az i. hét tervezett és az aktuális raktáron lévő mennyiégek különbsége adja.

$$q_i - I_i \leq C, \text{ ahol } C \text{ a kapacitáskorlátot jelöli.}$$

2. $i+1$. heti raktárszint meghatározása: Egy adott hétre rákövetkező hét aktuális raktárszintje (I_{i+1}) az i. heti igény várható értékének segítségével számolható:

$$I_{i+1} = q_i - E(D_i).$$

Az első hét raktárszintjének értéke paraméterben rögzített.

3. A „dög" feltétele: Egy további feltételként, a többé fel nem használható árukészlet ún. „dög" veszélyének feltételét fogalmazhatjuk meg. Dög akkor keletkezik, ha a termékre vonatkozó igény az időhorizonton belül megszűnik. Ilyenkor már nincs szükség a termékre a továbbiakban, melynek következtében az a raktáron marad. A többé már nem felhasználható dög jelentős anyagi kockázattal jár a beszállító számára. A cél tehát egy olyan feltétel alkalmazása, amelynek hatása az esetleges dög jelenségét is figyelembe veszi:

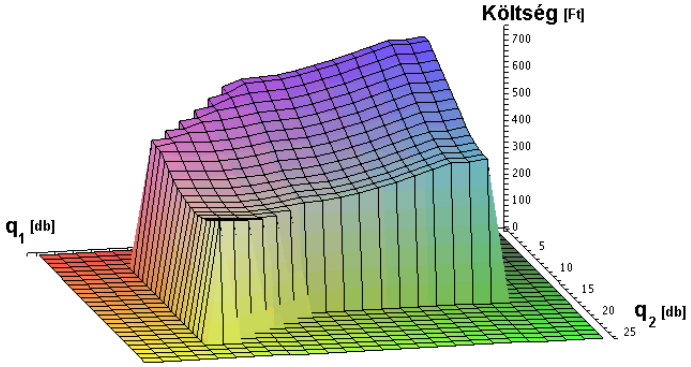
$R \cdot max(q_n - E(D_n), 0)$, ahol n értéke az utolsó hetet jelöli, és $R > 0$ pozitív valós szám.

A korlátozás programozás módszerével nyert modell természetesen m darab különböző termék esetében is alkalmazható további kiegészítő feltételek bevezetésével. Az értekezés ezen további feltételekre nem tér ki. Példaként megemlítve az i. hét kapacitáskorlát feltétele a következőképpen módosul:

$$\sum_{j=1}^{m} \left(q_i^j - I_i^j \right) < C, \text{ ahol } k \text{ a termék sorszámát jelöli.}$$

Ez a feltétel csak abban az esetben érvényes, ha a gépek összessége egyetlen egységes homogén kapacitásnak tekinthető.

A következő ábra a beszállító optimális politikájának keresési terét mutatja két hét időtartamra és egy termékre. Az x és y tengelyek a különböző heteken legyártandó termékeket jelentik, a z tengely pedig a költségüket. Az ábrán jól látszik, hogy létezik költségminimum, mely a vázolt módszer segítségével meghatározható.



4.2. ábra. A keresési tér jellege és az optimum helye két termék esetén

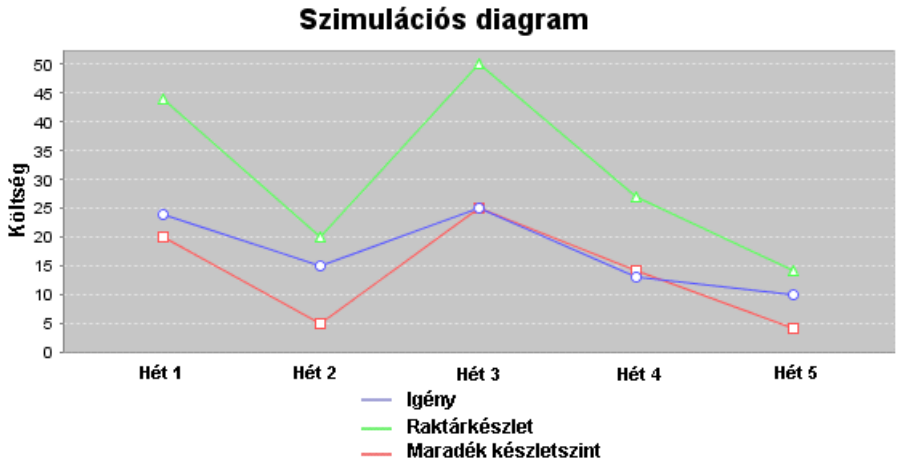
A korlátozás programozás eszközével megfogalmazott feladat futási eredménye egy olyan $q = \{q_1, q_2, ..., q_n\}$ vektor, amely tartalmazza az egyes hetekhez rendelt készletezési mennyiségeket. Ezen és az i. heti raktáron lévő I_i mennyiségekből az időhorizonton minimálisan szükséges setup darabszám számolható.

A probléma megoldásához szükséges számításokat a MAPLE matematikai programcsomag segítségével dolgoztam ki és ellenőriztem. A futtatáshoz és tesztek elvégzéséhez szükséges megfelelő környezet biztosítása miatt a kidolgozott módszert egy saját fejlesztésű Java alkalmazásban is megvalósítottam. A további szimulációkat ezen környezeten belül végeztem egy általános célú, Pentium 4 (3GHz) típusú számítógép segítségével.

A következő 5 hetes mintafeladat részletesen bemutatja a futási eredményvektor értelmezését. Tekintsük a büntető költség értékét minden hiányzó termék esetén $p = 50$ egységnek és legyen a változó költség $c_v = 5$ egység. A kumulált raktározási költség termékenként $h = 2$ egység/periódus. A gyártási költség fix része $c_f = 150$ egység/sorozat. A raktár kezdetben üres. A termékekre való igény normális eloszlást követ. Az alábbi táblázat az igényekre vonatkozó információk mellett az egyes hetekhez tartozó megoldásokat is tartalmazza.

4.1. táblázat. Mintafeladat a korlátozás programozás eredményének értelmezésére

	Hét 1	**Hét 2**	**Hét 3**	**Hét 4**	**Hét 5**
Igény (μ)	25	17	23	16	10
Szórás (σ)	2	3	3	3	2
$q = \{q_1, q_2, ..., q_5\}$	44	19	50	27	11
Gyártási mennyiségek	44	0	48	0	0



4.3. ábra. A mintafeladat eredményeinek ábrázolása

A módszer számítási hatékonyságát a következő táblázat érzékelteti:

4.2. táblázat. A több periódusos gyártás optimalizálási feladat korlátozás programozás eszközével nyert futási eredményei

	Futási idő (m.sec)				
Módszer	Hét 1	Hét 2	Hét 3	Hét 4	Hét 5
Korlátozás programozás	605	994	2895	368375	n.a

A táblázatban szereplő értékek a gyártási időhorizonthoz tartozó számítási időt reprezentálják milliszekundum mértékegységben. n.a szimbólummal azokat az eseteket jelöltük, ahol a számítási idő nagyobb volt, mint 30 perc.

A több periódusos együttes gyártás korlátozás programozással nyert megoldása a feltételeknek megfelelően minden esetben optimális. Hátránya azonban, hogy a teljes keresési tér bejárása miatt lassú. Már egy termék esetén is gondot okoz egy hosszú időhorizont készletezési feladatának megoldása.

4.2. A készletgazdálkodási probléma megoldása genetikus algoritmus segítségével

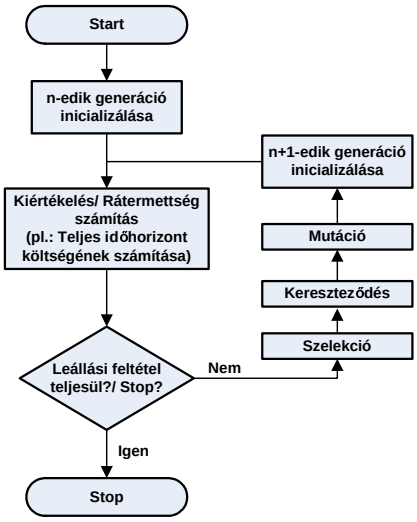
Az eddig ismertetett módszerek mellett a vázolt beszállítói probléma egy újabb megoldására a Genetikus Algoritmus (GA) alkalmazása egy újabb lehetőséget kínál. Mivel a korlátozás programozás módszere nem nyújt eléggé gyors megoldást, ezért indokolt egy hatékonyabb keresési eljárás alkalmazása. A problémafüggetlen metaheuriszikák csoportjából (szimulált hűtés (*simulated annealing*), tabu keresés (*tabu search*), különböző hegymászók (*hill climbers*)) a genetikus algoritmust választottam. Rövid bevezető után ismertetem az alkalmazott megoldást.

4.2.1. A genetikus algoritmus rövid áttekintése

A GA olyan metaheurisztika, amely általános keresési terekben végez, kevés előzetes ismeretet igénylő kvázi-optimalizálást. A genetikus algoritmusok globálisan optimalizáló, sztochasztikus

algoritmusok. Struktúrájukból kifolyólag képesek olyan nehéz feladatokat is megoldani, ahol nem rendelkezünk keresési tér specifikus leírással. Mivel sztochasztikus algoritmus, ezért a keresési térnek csak reprezentatív elemeit vizsgálja meg, így jól alkalmazható NP-teljes feladatokra és nagy keresési térrel rendelkező problémákra. A GA az adaptív keresési technikák osztályát képviseli, a hagyományos módszerekhez képest új, hatékony, terület-független keresési heurisztikát kínál fel, anélkül, hogy erősen terület-specifikus ismeretet igényelne. A természetes szelekció mechanizmusát szimulálja egy valószínűségi adatcsere segítségével, alkalmazva a darwini: a legrátermettebb túlélése elvet. A GA az evolúciós számítások egy módszere, amely evolúciós technikákat alkalmaz a számítási algoritmusokra. A genetikus algoritmusok fogalmát először Holland (az alapreferenciává vált *Holland* [52]-ös monográfiában) és tanítványai (például *De Jong* [57]) vezették be. Az utóbbi évtizedben jelentősen megnőtt az érdeklődés a genetikus algoritmusok és általában az evolúciós számítások iránt.

Az algoritmus mindenhol alkalmazható, ahol a feladat, sok lehetséges megoldás közül kell a legjobbat megkeresni, ahol a „jóság” mértékét egy értékelő függvény, más néven rátermettségi függvény (*fitness function*) adja meg [84]. A genetikus algoritmus megoldások egy populációját tartja fenn, azaz egyszerre több megoldással dolgozik. Az aktuális populációból minden lépésben egy új populációt állít elő úgy, hogy a szelekciós operátor által kiválasztott legrátermettebb elemeken (szülőkön) alkalmazza a rekombinációs és mutációs operátorokat. Az alapgondolat az, hogy mivel általában minden populáció ez előzőnél rátermettebb elemeket tartalmaz, a keresés folyamán egyre jobb megoldások állnak rendelkezésre. A keresés akkor ér véget, amikor előállt a kívánt megoldás (legjobb egyed), vagy teljesül a leállási feltétel. Az alábbi ábrán a GA általános folyamata és a lépései látható:



4.4. ábra. A genetikus algoritmus általános folyamata

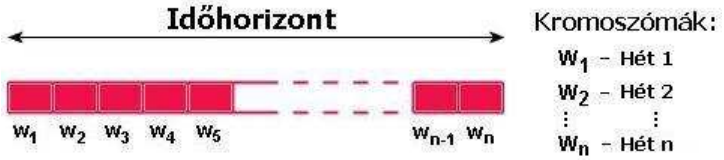
4.2.2. Az evolúciós modell

Az evolúciós modell tervezését a korlátozás programozásnál megfogalmazott feladatnak megfelelően végeztem el: Adott a termelési időhorizont hosszúsága, ismertek az igények eloszlásfüggvényei és a modell alkalmazásához szükséges paraméterek. A definiált feladathoz olyan genetikus

modell kifejlesztése a cél, amely az időhorizont hosszának megfelelően képes az optimális készletezési politika megtalálására. A feladat annak a meghatározása, hogy a beszállító mely periódusokban mennyi terméket raktározzon, valamint hogy melyik periódusban történjen gyártás és melyikben nem. A továbbiakban a probléma konkrét megvalósítását ismertetem.

A genetikus modellezési elv szerint egy induló populáció [104] létrehozása az első lépés, amely meghatározott számú egyedből áll. Az egyedek kromoszómákból épülnek fel. A készletezési feladat esetén ez a leképzés a következőképpen értelmezhető:

Tekintsük egy egyednek a feladat egy megoldását, egy készletezési politikáját. A készletezési politika periódusokból (jelen modellben hetekből), valamint ezekből álló ciklusokból épül fel. A periódusok jelen modellben az egyed kromoszómáját jelentik. A feladat megoldása ekkor tartalmazza azt, hogy melyik periódusban mennyi késztermék legyen a beszállító raktárában. Az, hogy mikor történjen(ek) a gyártás(ok), a megoldás során kapott raktározott mennyiségekből és az igények várható értékéből számolhatók rövid iterációval. Az iteráció során a $q_i - I_i \leq 0$ feltétel fennállásakor, amikor a raktáron lévő mennyiség több, mint amennyi az adott hétre vonatkozó optimális késztermék darabszám, akkor az adott héten nem történik gyártás, csak tárolás és lehívás. A következő ábra szemléletesen mutatja az egyed felépítését:



4.5. ábra. A genetikus egyed

A kromoszómák száma mindig az időhorizont heteinek számával megegyező. Ebből következően belátható, hogy a számítási idő az időhorizont hosszának növelésével szintén növekedni fog. Új egyedek létrehozásakor az egyedek kromoszómáinak értéke az alkalmazott eloszlásnak megfelelő véletlenszám generátor segítségével kerül feltöltésre. A feltöltés természetesen a megadott határokon belül megengedett. A felső határ értéke kapacitáskorlát esetén maga a korlát értéke, az alsó határ pedig nulla.

A genetikus modell második lépése a kezdeti induló populáció egyedeinek „versenyeztetése" és megadott számú legjobb egyedek szelektálása. A szelekció folyamatához szükséges, hogy az egyes egyedek számszerű minősítéssel legyenek ellátva. Ehhez egy rátermettségi függvény [104] definiálása nyújt segítséget, amely esetünkben az egész termelési időhorizont összköltségét jelenti. A költségeket az egy periódusos költségfüggvénnyel számolva hetenként összegezve kapható a teljes időhorizont költsége. A számításhoz a korlátozás programozás módszerénél definiált feltételeket használtam fel. A fitness függvény segítségével mindig meghatározható a megadott számú legjobb egyedek csoportja. A függvény kiértékelésének ideje az időhorizont hosszától függően változik. A genetikus algoritmusokban alkalmazott szelekciós operátor problémafüggetlen és a rátermettséget veszi figyelembe. Az irodalomban számos különböző szelekciós operátorra található példa (pl. rátermettség-arányos szelekció, rulettkerék szelekció, rang szelekció, verseny szelekció, véletlenszerű szelekció) [84]. Az értekezésben tárgyalt megoldás minden esetben a populáció egy magadott számú legjobb elemhalmazát választja ki a fittness értékek rangsora alapján. A kiválasztandó halmaz darabszáma természetesen paraméter segítségével hangolható.

Adott számú legjobb egyed kiválasztása után a következő lépés a megoldás megtalálásában ezen egyedek egy új populációjának létrehozása. Az új populáció készítése a kiválasztott egyedekből történik kereszteződés (rekombináció) és mutáció útján. Ezen folyamatokra az irodalomban több módszert is találunk. A következőkben egy, az adott feladathoz jól illeszkedő megoldás változat kerül bemutatásra.

4.2.3. Kereszteződés és öröklődés

A rekombináció célja, hogy a meghatározott legjobb egyedek csoportjából kiválasztva és keresztezve azokat létrejöjjön egy új populáció. A csoportból véletlenszerűen két szülőt kiválasztva jön létre az új egyed. Jelen modellben kétféle kereszteződést, az *uniform* [104] dinamikus párosítást, és az egypontos párosítást valósítottam meg. Az uniform megközelítésben az új egyed a szülők kromoszómáit véletlen számban és véletlenszerűen kiválasztva örökli. Egypontos öröklődés során egy kereszteződési pontot kell kiválasztani. A ponttól balra az első szülő, a ponttól jobbra pedig a második szülő kromoszómája kerül át az új egyedbe. A szimulációs példákban az uniform kereszteződési forma hatékonyabbnak bizonyult.

Semmi sem garantálja azonban, hogy az így létrejött új egyed jobb a szüleinél, ezért az új populációba a szülők is átkerülnek. A legjobb egyed így mindig a populáció tagja marad, még akkor is ha az összes új egyed rosszabb nála. Ez a megoldás az irodalomból ismert elitista genetikus algoritmus [104], amely alkalmazása hatékonyabbá teszi az optimális megoldás megtalálását.

A genetikus modellezési elvnek két alapvető csoportja ismeretes: Az első csoportban a populáció egyedszáma változatlan marad az evolúciós folyamat során. A szülők és a párosított egyedek számának összege az induló populációjával lesz egyenlő. Ennél a módszernél általában a populáció száma nem nagy azért, hogy minél többször játszódjon le az evolúció folyamata (szelekció, párosítás, öröklődés, mutáció). Az iteráció addig folyik, amíg a populáció legjobb eleme már nem változik tovább egy előre megadott időtartam alatt. Az evolúciós gondolkodás másik csoportja ettől eltérő. Ennél a módszernél az induló populáció egyedeinek száma nagy. A párosítás, öröklődés és mutáció során mind kevesebb egyedszámú új populáció jön létre, így az egész folyamat végén csak egy, a győztes egyed marad. A beszállítói probléma során mindkét változatot megvalósítottam, de a hatékonyság és a pontosság szempontjából az első megoldás bizonyult jobbnak.

4.2.4. A mutáció

A mutáció egy genetikus operátor, amely a populációk kromoszómáinak genetikus diverzivitását tartja fenn. A mutáció a keresztezés folyamatában az új egyedbe átkerülő kromoszómák megváltozását jelenti. A célja az egyedek, a populáció frissítése, változatosság bevitele az evolúcióba. A készletezési politika megoldása során olyan mutációs operátorok megvalósítását tűztem ki célul, amelyek biztosítják az algoritmus számára a keresés folyamatában a lokális optimumokba való le nem „ragadást”. A problémában a megoldást két operátor kidolgozása jelentette. Az első operátor egy nagy hatókörű operátor, amely nagyobb változtatásokat eredményez a kromoszómákban. Az operátor szerint véletlen darabszámú és véletlen helyű kromoszóma mutálódhat egy előre definiált, paraméterben rögzített valószínűségi érték szerint. Maga a mutáció egy adott kro-

moszóma esetén pedig azt jelenti, hogy a kromoszóma aktuális értékével nem törődve új értéket vesz fel az adot eloszlásnak megfelelő véletlenszámgenerátor segítségével a $[0, C]$ intervallumban. Az operátor nagy előnye, hogy az algoritmus a lokális optimumból képes a keresési tér egy távoli pontjába is ugorni. Az operátor bevezetésének további oka az volt, hogy a keresés folyámán az algoritmus lépéseinek ciklikus alkalmazásával az újonnan létrejött populációk egyedei „hasonlóvá" válnak, így a következőkben tárgyalt kis hatókörű mutációs operátor nem biztosítja megfelelően a lokális optimumpontok elhagyását.

A második típusú (szomszédsági) operátor célja a keresési térben való kis elmozdulások segítése. Mivel az első típusú operátor nagy lépéseket eredményez, szükségszerű egy szomszédsági operátor megléte is azért, hogy az optimum pont környezetében állva a tényleges optimum elérhető legyen. Pl. tegyük fel, hogy a globális optimum közvetlen környezetben található egy lokális optimum pont. Ha az algoritmus a lokális pontban van, akkor első típusú operátor alkalmazásával csak nagyon kis valószínűséggel képes megtalálni a globális optimumot a $[0,C]$ intervallumban történő új kromoszóma érték generálás miatt. Az operátor az adott kromoszóma értékét egy előre meghatározott kis intervallumban véletlenszerűen generált értékkel csökkentheti vagy növelheti. Az, hogy csökkentés vagy növelés történjen, szintén véletlenül valósul meg. Pl. legyen az i. kromoszóma értéke 30 darab termék, az intervallum pedig [0,5]. Ekkor ha az intervallumban a generált véletlenszám értéke 3, és a csökkentés kerül végrehajtásra, akkor 30-3=27 darab lesz a kromoszóma új értéke.

Az algoritmus a két operátort egymással szemben véletlenszerűen alkalmazza (50%-50%) a keresési tér hatékony bejárása érdekében.

4.2.5. Szimulációs eredmények

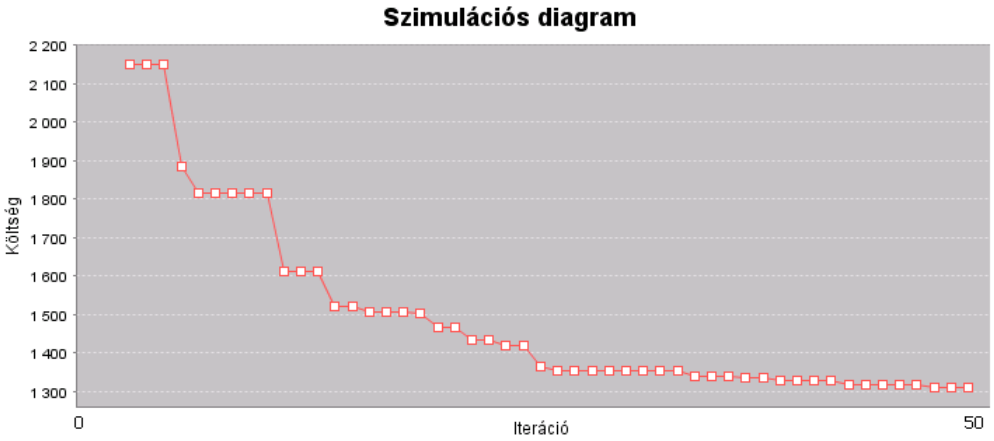
A feladat megoldásában 700 darab, állandó egyedszámú populációval dolgoztam, szelekciós operátorként a legjobb 700/2 darab egyed kiválasztását választottam. Azonos számú (700/2) rekombináció a populációs egyedszámának fenntartását biztosította. A 0.2 valószínűségi gyakorisággal alkalmazott mutáció a lokális optimumokból való kimozdulást megfelelően segítette, ahol a keresési térben való kis elmozdulásokat biztosító szomszédsági operátor a [0,3] intervallumot veszi alapul a változások kezelésére. A genetikus algoritmus módszerét egy saját fejlesztésű Java prototípus alkalmazásban valósítottam meg. A szimulációk ezen tesztkörnyzetben futottak a kapacitáskorlát modellnél tárgyalt személyi számítógép konfigurációval. Az alkalmazás a szimulációk eredményeit a kapacitáskorlát modellel azonos megoldásvektor ($q = \{q_1, q_2, ..., q_n\}$) formájában nyújtja.

Az algoritmus futási idejét különböző időhorizontok esetén a következő táblázat foglalja össze. A táblázatban a megoldásvektor nem kerül ismertetésre, mert értékei megegyeznek a korlátozás programozásával. A mérési eredmények két diagram rajzolási idejét is tartalmazzák.

4.3. táblázat. A beszállítói készletezési probléma megoldásának futási eredményei genetikus algoritmus alkalmazása esetén

	Futási idő (m.sec)				
Módszer	Hét 1	Hét 2	Hét 3	Hét 4	Hét 5
Genetikus algoritmus	906	984	1110	2844	4422

A korábbi szimulációk során a korlátozás programozás minden esetben jó eredményt adott, a genetikus megközelítés viszont néhány esetben csak egy kvázi optimum elérésére volt képes. Az abszolút hiba azonban a tényleges optimumhoz képes egyszer sem érte el az 1% -ot. A genetikus algoritmus metaheurisztika a korlátozás programozáshoz hasonlóan jó lehetőséget nyújt a különféle korlátfeltételek alkalmazására is. Ebben az esetben a keresési tér tovább szűkül, viszont a rátermettségi függvény kiértékelése több időbe kerül. A következő ábra egy példa szimulációs feladat optimális megoldásának megközelítését ábrázolja az iterációs lépések függvényében. Az ábrázolt pontok a legjobb megoldás költségfüggvény értékét jelentik. Jól látszik, hogy az iterációs lépések növelésével a megoldás egyre jobban konvergál az optimális megoldáshoz.



4.6. ábra. Közeledés az optimális megoldás felé GA-al

A beszállítói probléma genetikus algoritmussal való megközelítése tehát egy további megoldási módszert jelent, amellyel a korlátozás programozásnál lényegesen hatékonyabb számítás érhető el. A szimulációs tapasztalatok és eredmények alapján azonban belátható, hogy egy hosszabb, esetleg több termékes probléma megoldásának megtalálása már a genetikus algoritmus számára is nehéz lehet.

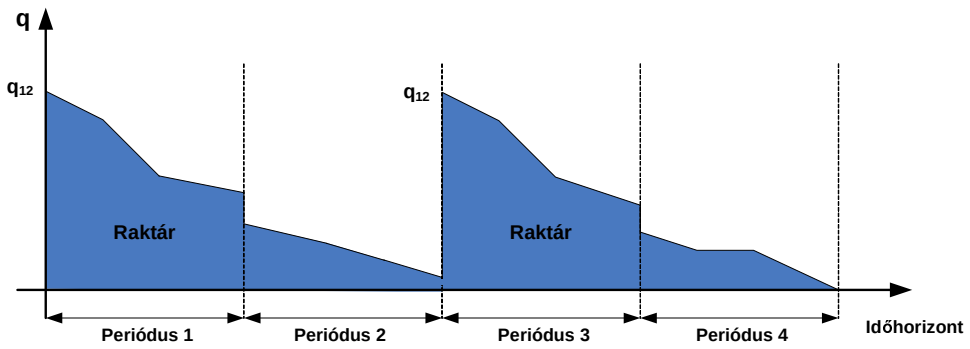
5. fejezet

A kiterjesztett újságárus modell

5.1. Az újságárus modell kiterjesztése két periódus együttes lefedésére

Az újságárus modell tömeggyártásban való alkalmazása megkövetelte a több periódusos együttes gyártás fogalmának bevezetését. A két bemutatott módszer, a korlátozás programozás és a genetikus algoritmus alapú megközelítés bár lehetővé teszi a probléma megoldását, a gyakorlatban sok termék vagy hosszú időhorizont esetében nem nyújt elég hatékony és gyors eredményt. Több tíz, vagy száz termék esetén a számítási idő rendkívül megnő.

A következőkben egy olyan modell kiterjesztést vezetek be, amely új megközelítési módja miatt közvetlenül teszi lehetővé a több hetes gyártás kezelését. Az általam javasolt és az irodalomban nem ismert, új, analitikus módszer segítségével nagy periódusszámra is hatékony megoldás kínálkozik. A kiterjesztett raktározási-gyártási politikát először a két periódusos együttes gyártás esetére mutatom be, amikor a termékek gyártása a ciklus (jelen esetben két periódus) elején történik egyszerre. A következő ábra a két periódusos gyártás modelljét mutatja be. Az ábrán két ciklus látható, amelyek mindegyike két periódusból áll. Jól látszik a periódusok együttes gyártása a gyártási ciklus elején.



5.1. ábra. Két periódusos együttes gyártásának modellje

Az újságárus modell kiterjesztésének első lépése a két periódusos modell megfogalmazása, a két periódus költségeit magába foglaló együttes célfüggvény felírása és értelmezése. A modell megfogalmazásánál célom az újságárus koncepció követése volt, így kiindulási pontnak a

klasszikus újságáus költség alapú célfüggvényét tekintettem.

Felhasználva a modellt, az első periódus költségei már ismertek. Induljunk ki abból, hogy a második periódus az első periódus folytatásaként értelmezhető és a felmerülő költségtípusok azonosak. A két periódus együttes költségeinek meghatározására kiegészített költségfüggvény így a következőként írható fel:

$$K_{12}(q_1, q_2) = c_f + c_v\left[(q_1+q_2) - I_1\right] + hE\left[(q_1+q_2) - D_1\right]^+ + hE\left[(q_1+q_2) - D_1 - D_2\right]^+ + \\ +pE\left[D_1 - (q_1+q_2)\right]^+ + pE\left[D_2 + \left[D_1 - (q_1+q_2)\right]^-\right]^+. \tag{5.1}$$

A függvény tagjai a (3.1) összefüggéshez hasonlóan értelmezhetők. Az első tagja a gyártás setup költségét jelenti. Együttes többperiódusos gyártásnál csak az első periódus előtt történik gyártás, így csak egy setup költség szerepel. Két periódus együttes gyártása esetén a második periódus szükséges mennyisége is az elsővel együtt kerül legyártásra, így a készletezési mennyiségek összeadhatók ($q_{12} = q_1 + q_2$). Ezt jelzi a második tag, ahol I_1 az első periódus kezdeti raktárkészletét jelenti. A harmadik tag azt az első periódusbeli tárolási költséget szimbolizálja, amely az első periódus igénye és a raktáron lévő mennyiségek különbségeként jelentkezik. Ha az első periódusról megmaradt mennyiség nagyobb, mint a második periódusban beérkező igény, akkor raktározási költség jelenhet meg a második periódusban is. A költség létezésének további feltétele az, ha az első hétről megmaradt mennyiség nagyobb, mint a második periódusbeli igény. Ezt a negyedik tag fejezi ki. Az ötödik tagban az első periódus ki nem elégített igényeinek költsége jelenik meg. Ha az első periódus igénye nagyobb a raktáron lévő mennyiségnél, akkor büntető költsége keletkezik. Hiány azonban nem csak az első periódusban keletkezhet, hanem a másodikban is. Ennek költségét az utolsó, bonyolultabb tag fejezi ki.

A függvény utolsó tagjának bonyolultsága miatt egyszerűsítő lépésekre van szükség. Feltételezzük, hogy az egyes periódusokban történő lehívások függetlenek egymástól. Független valószínűségi változóként értelmezve és az (A.3) függelékben alkalmazott matematikai szabályokat, észrevételeket figyelembe véve a büntető költség periódusonként külön számolható. Jelen esetben ez azt jelenti, hogy a két periódus együttes várható büntető költsége egyenlő, az egyes periódusok várható büntető költségeinek összegével. Az egyszerűsítés elvégzésével a célfüggvény alakja a következő:

$$K_{12}(q_{12}) = c_f + c_v\left[q_{12} - I_1\right] + hE\left[q_{12} - D_1\right]^+ + hE\left[q_{12} - D_{12}\right]^+ + pE\left[D_{12} - q_{12}\right]^+. \tag{5.2}$$

Az egyenlet formáján jól látszik, hogy matematikai szempontból a problémát visszavezettük az egy periódusos gyártás problémájára. Hasonlóan szélsőérték számítási feladatként értelmezve és megoldva az egyenletet a következő összefüggéshez jutunk:

$$F_{12}(q_{12}^*) = \frac{p - c_v - hF_1(q_{12}^*)}{h+p}. \tag{5.3}$$

Az összefüggésben q_{12}^* mennyiség – ami esetén az egyenlőség fennáll – kifejezi, hogy mennyi késztermékek kell a raktáron lennie a vevői igény megjelenésekor két periódust együttesen vizsgálva. A megoldásban F_{12} jelenti az igények összegének együttes eloszlásfüggvényét, F_1 pedig az első periódusben beérkező igény eloszlásfüggvénye. A két periódus együtt gyártásának kritikus faktora (CR), a ki nem fogyás valószínűsége ekkor $\xi_{12} := \left[(p - c_v) - hF_1(q_{12}^*)\right]/(p+h)$. Az (A.4) függelékben egy rövid mintafeladaton keresztül a módszer gyakorlati alkalmazása követhető figyelemmel.

A periódusonkénti gyártás modelljénél bevezetett kritikus raktárkészlet fogalma a kiterjesztett modell esetében is alkalmazható. A kritikus készlet az optimális raktározási mennyiségek meghatározása fölé egy újabb döntésszintet téve adja az optimális készletezési politikát. Az optimális mennyiségtől kisebb készlet meghatározása analóg az egy periódusos megoldással. A csonkított (3.5) függvény ekkor a második periódusra vonatkozó tagokat is tartalmazza. Jelöljük most $L_{12}(q_{12})$-vel a büntető és a tárolási költségek összegét két periódusra vizsgálva:

$$L_{12}(q_{12}) = hE[q_{12} - D_1]^+ + hE[q_{12} - D_{12}]^+ + pE[D_{12} - q_{12}]^+ \,. \tag{5.4}$$

Ettől a lépéstől kezdve a megoldási módszer minden lépése ismert az egy periódusos példa analógiája alapján. A cél az $L(s_{12}) + c_v s_{12} = c_f + c_v S_{12} + L(S_{12})$ egyenlet megoldása s_{12} -re nézve, ahol s_{12} jelöli a kritikus készletszintet két periódusra értelmezve, és S_{12} pedig a két periódus optimális raktározási mennyisége.

5.2. A készletezési probléma értelmezése n darab együttes periódusra

A két periódus együttes gyártásának modellje alapján felmerül a kérdés, hogy az alkalmazott módszer adaptálható-e tetszőleges hosszú, véges, n számú rendelési periódus (hetek) egységes lefedésének modellezésére. A kérdésre sikerült pozitív választ adni. Bemutatom, hogy az (S,s) modell és az „együttes gyártás" gondolatmenetét követve hogyan fogalmazható és határozható meg a kívánt optimális készletezési politika.

Mindenekelőtt a két periódusos gyártás analógiája alapján, néhány feltevést fogalmazok meg. Összevont periódusos gyártás esetén a tervezési időszak elején n számú periódus együttes készletezési (raktározási) mennyiségéről születik döntés. Természetesen ekkor csak egy fix költséggel kell számolni, hiszen több periódus raktározási mennyiségének legyártása egyszerre történik. Feltételezzük, hogy a szükséges termelői kapacitások rendelkezésre állnak, valamint hogy az összevont periódusokban beérkező igények függetlenek egymástól.

Célunk olyan költségfüggvény megfogalmazása, amely n darab periódus esetén reprezentálja a készletezési politika költségeit. A két periódusos gyártás gondolatmenetét követve tárolási és büntető költségek minden periódusban keletkezhetnek, így az új költségfüggvény ezekkel a tagokkal kiegészítve válik teljessé.

$$\begin{aligned} K_{123\ldots n}(q_{123\ldots n}) &= c_f + c_v\left[q_{123\ldots n} - I_1\right] + hE\left[q_{123\ldots n} - D_1\right]^+ + hE\left[q_{123\ldots n} - D_1 - D_2\right]^+ + \ldots + \\ &+ hE\left[q_{123\ldots n} - D_1 - D_2 - \ldots - D_n\right]^+ + pE\left[D_1 - q_{123\ldots n}\right]^+ + pE\left[(D_1 + D_2) - q_{123\ldots n}\right]^+ + \ldots + \\ &+ pE\left[(D_1 + D_2 + \ldots + D_{n-1}) - q_{123\ldots n}\right]^+ + pE\left[D_n + \left[\ldots + \left[D_2 + \left[D_1 - q_{123\ldots n}\right]^-\right]^-\right]^-\right]^+ . \end{aligned} \tag{5.5}$$

A függvény utolsó tagja a korábbiakhoz képest tovább bonyolódott, de az (A.3) függelékben, a két periódusos gyártásnál bemutatott matematikai formalizmus segítségével az alábbi egyszerűbb alakra hozható:

$$\begin{aligned} K_{123\ldots n}(q_{123\ldots n}) &= c_f + c_v\left[q_{123\ldots n} - I_1\right] + hE\left[q_{123\ldots n} - D_1\right]^+ + hE\left[q_{123\ldots n} - D_1 - D_2\right]^+ + \ldots + \\ &+ hE\left[q_{123\ldots n} - D_1 - D_2 - \ldots - D_n\right]^+ + pE\left[(D_1 + D_2 + \ldots + D_n) - q_{123\ldots n}\right]^+ . \end{aligned} \tag{5.6}$$

A függvény minimumának megkeresése során megkapjuk az n periódusos együttes gyártás optimális készletezési mennyiségét az igények együttes eloszlásfüggvényeinek ismeretében.

$$F_{123...n}(q^*_{123...n}) = \\ = \frac{p - c_v - hF_1(q^*_{123...n}) - hF_{12}(q^*_{123...n}) - hF_{123}(q^*_{123...n}) - ... - hF_{123...n-1}(q^*_{123...n})}{p+h}. \quad (5.7)$$

Az összefüggésben $q^*_{123...n}$ – ami kielégíti az egyenlőséget – kifejezi, hogy mennyi késztermékenek kell a raktáron lennie a vevői igény megjelenésekor n darab periódusra előrenézve. A modell megoldásának nagy erénye, hogy a megoldás független az alkalmazott eloszlásfüggvény típusától, csupán a valószínűségi változók összegének együttes eloszlásfüggvényének ismerete szükséges.

A gyakorlati számításokban $F_1(q^*_{123...n}), F_{12}(q^*_{123...n}), F_{123}(q^*_{123...n}), ..., F_{123...n-2}(q^*_{123...n})$ összefüggések értékei 1 -el jól közelíthetők. Például egyenletes eloszlásokat feltételezve az $F_{123}(q^*_{123})$ értéke nagy valószínűséggel 1, mivel az első három periódus eloszlásfüggvényeinek összegét fejezi ki, és az argumentumában szereplő q^*_{123} összeg nagyobb, mint $q_{1,max} + q_{2,max} + q_{3,max}$ (az egyed periódusokhoz tartozó maximális q mennyiségek), így a függvényérték biztosan 1 lesz. Ezt felhasználva a megoldás a következő egyszerűbb alakra hozható:

$$F_{123...n}(q^*_{123...n}) = \frac{p - c_v - (n-2)\cdot h - hF_{123...n-1}(q^*_{123...n})}{p+h}. \quad (5.8)$$

Mind az eredeti, mind az így kapott egyszerűsített megoldás esetében a számláló negatív értéket vehet fel abban az esetben, amikor a termékek periódusonként keletkezett tárolási költségének értéke meghalad egy bizonyos küszöbértéket. Természetesen ebben az esetben nincs optimális megoldás, mivel a beszállító számára ekkor a „nem gyártás” költsége kisebb, mint a gyártásé. Az egyszeri gyártásindítással lefedni kívánt periódusok számának redukálásával az optimálási feladat ismét értelmet nyer. Érdemes itt megjegyezni, hogy a feladat láthatóan csak „nagy” p értékre, azaz hiánymentes vagy csak nagyon ritka és kisméretű hiányt megengedő folyamatokra értelmes. A rugalmas tömeggyártás esetén azonban éppen ez a helyzet. Később a p „vezérlő”, „hangoló” szerepével még részletesebben foglalkozom.

Az optimális készletezési mennyiség azonban önmagában még nem elég a kívánt teljes készletgazdálkodási politika kialakításához. A kritikus raktárkészlet a kiterjesztett n periódusos modell esetén is alkalmazandó. Értékének meghatározása hasonló módszerrel történik, mint a két periódusos esetben, csupán az $L_{12}(q_{12})$ függvény új tagokkal való bővítéséről kell gondoskodni:

Jelöljük most $L_{123...n}(q_{123...n})$-el a büntető és a tárolási költségek összegét n darab periódusra. Ekkor

$$L_{123...n}(q_{123...n}) = hE\left[q_{123...n} - D_1\right]^+ + hE\left[q_{123...n} - D_1 - D_2\right]^+ + ... + \\ +hE\left[q_{123...n} - D_1 - D_2 - ... - D_n\right]^+ + pE\left[(D_1 + D_2 + ... + D_n) - q_{123...n}\right]^+. \quad (5.9)$$

A megoldási módszer célja megtalálni azt az n periódusra értelmezett $s_{123...n}$ kritikus készletet, ahol a gyártás és a nem gyártás költségei megegyeznek.

Ez pedig az $L(s_{123...n}) + c_v s_{123...n} = c_f + c_v S_{123...n} + L(S_{123...n})$ egyenlet megoldása lesz $s_{123...n}$ -re, ahol $S_{123...n}$ jelöli az optimális készletezési mennyiséget n darab periódusra értelmezve.

5.3. Fajlagos költségmodell

Az igény szerinti tömeggyártás széles termékskála gyártását teszi szükségessé, jól hangolható, rugalmas gyártórendszerek segítségével. A tapasztalatok azt mutatják, hogy az átállítható de magas fokon automatizált gyártás setup költségének (magas) értéke jelentősen befolyásolja a termelési költségeket. Gyakori gyártásindítás esetén a sorozatos setup költségek, ritkább gyártásindítás esetén viszont a tárolási és forgótőke lekötési költségek dominálhatnak. A piaci előrejelzésekből származó igényinformációk alapján, a szerelvény, komponens és speciális anyag gyártó beszállító cégek termelésütemezésében fontos az egyszeri gyártásindítással kielégíthető időszakok (ciklusok) helyes megválasztása, amely a termelés menedzsment irodalomban a „mikor és mennyit gyártás" probléma egyik megjelenési formája. A következőkben egy olyan módszert mutatok be, amelynek segítségével mind az egyszeri gyártásindítással kielégíthető periódusok optimális száma, mind az optimális készletezési mennyiség meghatározható. A módszer közvetlenül alkalmazza az előzőekben tárgyalt n periódusos együttes gyártás modelljét.

A modellben szereplő valószínűségi változókat most normális eloszlásúnak tételezem fel. A módszer tetszőleges eloszlás esetén is alkalmazható, de a normális eloszlást a könnyebb kezelhetőség indokolja. Ennek oka az, hogy egyenletes eloszlású véletlen valószínűségi változók összegéből képzett új változó (pl. $D_{123} = D_1 + D_2 + D_3$) eloszlás, illetve sűrűségfüggvénye bonyolulttá válik. Normális eloszlás esetében viszont az új változó σ és μ értékei az összeadandó változók σ valamint μ értékeinek összegeként meghatározható [79]. A módszer egyszerűbb bemutatása érdekében feltételezem továbbá, hogy a σ és μ értékek minden egymást követő periódus esetén azonosak.

A módszer alapgondolata a következő: A bemutatott n periódusos modell költségfüggvényének segítségével tetszőleges hosszú, véges időhorizontra vonatkozó optimális készletezési mennyiség és kritikus mennyiség meghatározható. A kapott megoldás azonban érdekes módon független a gyártási fix költség értékétől, ami a célfüggvény megválasztásából következik. Az így nyert készletezési politika is minimális számú setup-ot eredményez, de a setup költség nagyságára érzéketlen. Célunk ezért olyan további modell kiegészítések keresése, amelyek a megoldást valamilyen formában a gyártásindítási költségre érzékenyebbé teszik.

Vezessük be a fajlagos beszállítói költség fogalmát a következőképpen: Jelölje $\hat{K}_i = \frac{K_i}{q_i}$ az adott időhorizontra vonatkozó termékegységre eső beszállítói költséget, ahol K_i jelenti a korábban definiált i darab együtt gyártott periódus termelési költségét, q_i^* az i darab együtt gyártott periódus optimális készletezési mennyisége és $i = 1, ..., n$.

Feltételezem, hogy a fajlagos költség értéke a különböző darabszámú összevontan gyártott periódusok esetén különböző lesz. Költség alapú politika esetén a cél ezen értékekből a minimális megtalálása. Az a minimális fajlagos költséggel rendelkező $\hat{K}_{min}$, amely kielégíti az alábbi összefüggést, az egyszeri gyártásindítással kielégíthető periódusok optimális darabszámát egyértelműen meghatározza a hozzá tartozó i változó értékével.

$$\hat{K}_{min} = min\{\hat{K}_1, \hat{K}_2, \hat{K}_3, ..., \hat{K}_n\}. \tag{5.10}$$

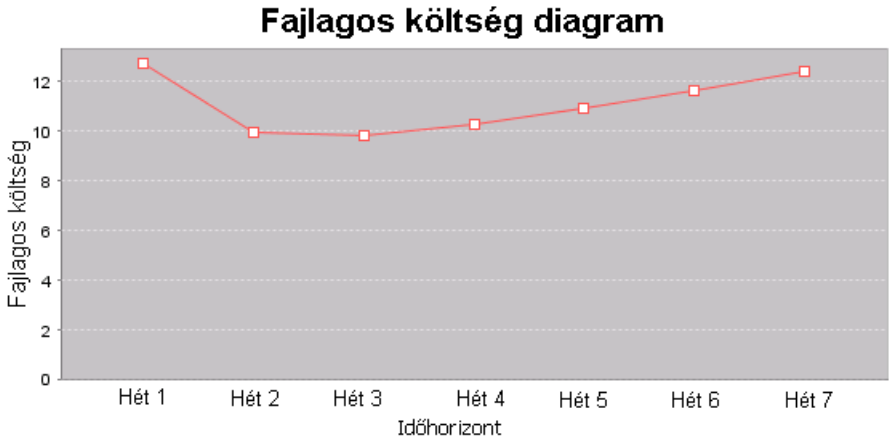
A következőkben egy rövid gyakorlati példán keresztül mutatom be feltételezéseim helyességét. A példa a teljes időhorizont első optimális együttgyártási periódusszámának meghatározását tárgyalja.

Tekintsük egy periódus hosszának egy hétnyi időegységet. A termékekre való igény normális eloszlást követ 15/hét középértékkel és $\sigma = 3$ szórással. Legyen a büntető költség minden elem esetén $p = 40$ egység. A kumulált raktározási költség $h = 2$ egység / periódus. A gyártási költség fix része $c_f = 120$ egység/sorozat. A változó költség értéke pedig $c_v = 5$ egység. A periódus elején a raktár üres. A számítások során $n = 1, ..., 7$ db hét együttes gyártásának fajlagos költségeit és készletezett optimális q mennyiségeket a következő táblázatban foglaljuk össze:

5.1. táblázat. Példa optimális együttgyártási hétszám meghatározására

	Hét 1	Hét 2	**Hét 3**	Hét 4	Hét 5	Hét 6	Hét 71
Optimális mennyiség	16.9135	33.2634	**49.1625**	64.6729	79.8314	94.6601	109.1720
Fajlagos költség	12.6830	9.9330	**9.7844**	10.2182	10.8671	11.6133	12.4070

A táblázat oszlopai az együtt gyártott hetek számát jelentik. Az első sor jelzi az optimális mennyiséget az együtt gyártott hetek esetén, az utolsó sor pedig a fajlagos költséget szimbolizálja. Jól látható, hogy a fajlagos költség a harmadik oszlop esetében a legkisebb. Ez azt jelenti, hogy a definiált paraméterek függvényében három hét együttes gyártása esetén lesz a beszállító készletezési költsége minimális. A következő ábra segítségével szemléletesebben megfigyelhetjük a fajlagos költségváltozását az együttgyártott hetek függvényében:



5.2. ábra. Fajlagos költség az együtt gyártott periódusok függvényében

Az ábra x tengelyén a gyártási időhorizontot ábrázoltuk „hét” egységekben, az y tengelyen pedig a fajlagos költség értékét az együtt gyártott hetek függvényében. Látható, hogy fajlagos költség értéke három hét (periódus) együttgyártása esetén a legkisebb. Három heti igény együtt gyártása során a költségünk valóban minimális lesz.

Az elvégzett szimulációk eredményei egyértelműen alátámasztják, hogy bármely termék esetén meghatározható egy, a példához hasonló fajlagos diszkrét pontokból álló költséggörbe. A görbe minden esetben egyetlen minimum ponttal rendelkezik, amely egyértelműen meghatározza az együtt gyártott periódusok számát.

Természetesen a meghatározott ciklusok elején nem feltétlenül szükséges gyártásindítás. Amikor elegendő termék van a raktáron, akkor felesleges a gyártás elindítása. Ebben az esetben a gyártás „eltolása” a követendő alternatíva. A mododellben az, hogy valóban szükséges-e a gyártás elindítása, a fajlagos költség számításánál derül ki. Tekintsük k-t valamely ciklus kezdő periódusának és I_k-t a kezdő raktárkészletének. Ha k-tól számított együttgyártott periódusoknak (i) megfelelő költség számításánál teljesül a $c_v(q_i^{k*} - I_k) \leq 0$ (q_i^{k*} jelentése: a k. periódustól i darab periódust együtt gyártva, $i = 1, 2, ..., n-k$) feltétel, azaz induló raktárkészletként legalább annyi termék van raktáron, mint a modell szerint az adott együttgyártási periódusszámnak megfelelő optimális megoldás, akkor a gyártás ideje eltolódik. Természetesen ekkor a teljes terv újraszámítása szükséges, hiszen az eltolódás miatt a korábban kiszámított optimális periódusszám így már nem állja meg a helyét. A fenti példánál maradva abban az esetben, ha a raktáron legalább 34 darab termék van, s mivel $c_v(16.9135 - 34) \leq 0$ és $c_v(33.2634 - 34) \leq 0$, nem szükséges a gyártás elindítása csak két hét múlva az újraszámolt értékek segítségével.

A fajlagos költég modell egyszeri alkalmazása mindig a teljes időhorizont első optimális együttgyártási periódusszámát adja meg, azaz az első ciklus hosszát. Ahhoz, hogy a teljes időhorizont összes ciklusát meghatározzuk, a módszer ismételt (iterációszerű) alkalmazására van szükség az időhorizonton folyamatosan előre haladva.

A teljes terv előállításának lépései az alábbi pontokban fogalmazhatók meg:

1. Optimális mennyiségek meghatározása különböző darabszámú összevontan gyártott periódusonként a k. periódustól indulva (kezdetben $k = 1$): (q_i^{k*}, $i = 1, 2, ...,\ n-k$).

2. Az optimális készletezési mennyiségek alapján az együttgyártási periódusszámnak megfelelő költségek számítása: $(\hat{K}_k, \hat{K}_{k+1}, \hat{K}_{k+2}, ..., \hat{K}_{k+(n-k)})$.

3. Ha valamely periódus költségszámítása során teljesül a $c_v(q_i^{k*} - I_k) \leq 0$ feltétel, ahol I_k jelenti a k. periódus kezdő raktárkészletét, akkor a gyártás ideje eltolódik. Az eltolódás idejét egyfajta virtuális ciklusnak is nevezhetjük. Ugrás az 1. pontra a következő ciklus számítására $k = k + i$ értékkel, ahol i az eltolt periódusok száma.

4. Fajlagos költégek számítása. Legkisebb fajlagos költség, optimális együttgyártási periódusszám meghatározása. Ugrás 1. pontra $k = k + \hat{K}_{min}$ értékkel, ahol $\hat{K}_{min}$ jelenti az egyszeri gyártáindítással kielégíthető időszakok optimális darabszámát. Egy ciklus ekkor $\hat{K}_{min}$ darab periódust tartalmaz.

Természetesen az iterációt addig kell folytatni, amíg a meghatározott ciklusok lefedik az időhorizont teljes egészét. Az időhorizonton előre haladva egyre bizonytalanabb információk állnak rendelkezésre a számításhoz. Továbbá nem várt események is bekövetkezhetnek. Ezért bizonyos számú periódus eltelte után a terv újragenerálása javasolt a pontosabb előrejelzés értékekkel és/vagy a váratlan felmerülő problémák figyelembevételével.

5.3.1. Szimulációs eredmények

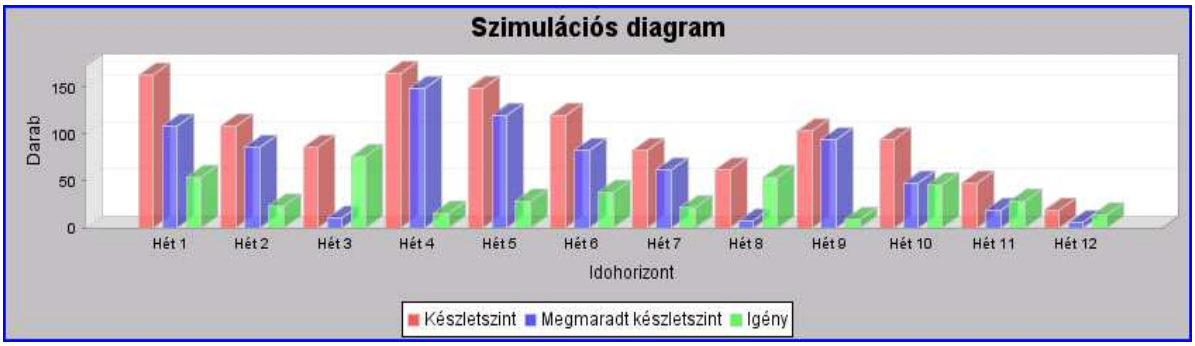
A továbbiakban szimulációs eredményeket mutatok be a tárgyalt modellről. A szimulácókat a korábban említett saját fejlesztésű prototípus alkalmazás segítségével végeztem el, amelyet

kiegészítettem mind a kiterjesztett, mind pedig a fajlagos költségmodellel. A legfontosabb számításokat MAPLE matematikai programcsomaggal ellenőriztem.

Az első szimuláció egy 12 hetes időhorizont teljes, kiszámított tervét mutatja be. Mind a szimulációhoz felhasznált adatokat, mind az eredményt a következő táblázat tartalmazza. Kezdetben feltesszük, hogy a raktár üres.

5.2. táblázat. 12 hetes mintaszimuláció

	Igény (μ)	**Szórás** (σ)	**Gyártási mennyiség**
Hét 1	55	4	163
Hét 2	25	4	0
Hét 3	76	10	0
Hét 4	15	3	166
Hét 5	30	1	0
Hét 6	35	3	0
Hét 7	23	3	0
Hét 8	56	5	0
Hét 9	10	3	103
Hét 10	43	3	0
Hét 11	29	3	0
Hét 12	15	3	0



5.3. ábra. Minta szimuláció a fajlagos költségmodell segítségével

A fajlagos költségmodell segítségével meghatározásra kerültek az egyszeri gyártásindítással kielégíthető időszakok optimális darabszámai, melyet az ábra jól mutat. Jelen tervben három ciklus szerepel, amely háromszori gyártást jelent: az első, a negyedik és a kilencedik periódusban.

A készletgazdálkodási modelleknél nagyon hangsúlyos szempont, hogy az egyes módszerek milyen gyorsan képesek a feltételekben megfogalmazott feladat megoldását szolgáltatni. A „mi lenne ha?” típusú kérdések megválaszolását ugyanis csak gyors és hatékony megoldás teszi lehetővé.

A következőkben a korábban bemutatott két megoldás és a kiterjesztett modell hatékonyságát vizsgálom ugyanazon elvégzett szimulációk mellett. A szimulációban a modellek feladata egy (egyszerűbb) hét periódusból álló időhorizont teljes (optimális) készletezési tervének előállítása. Ez magába foglalja az egyes gyártási ciklusok meghatározását az optimális együttgyártási

periódusszámmal, valamint a készletezési mennyiségekkel együtt. Egy periódus időegységén ismét egy hét értendő, s továbbá a feladat paraméterei újra megegyeznek a korábbi fejezetben ismertetekkel.

Az következő táblázatban a három különböző módszer futási idejét foglaltam össze.

5.3. táblázat. Módszerek összehasonlítása

	Futási idő (m.sec)						
Módszerek	Hét 1	Hét 2	Hét 3	Hét 4	Hét 5	Hét 6	Hét 7
CP	605	994	2895	368375	n.a.	n.a.	n.a.
Genetikus	906	984	1110	2844	4422	9609	12484
Heurisztikus	10	10	20	50	50	50	50

A táblázat első sorában a korlátozás programozás eredményei láthatók. *na.* szimbólum került azon mezőkbe, ahol a futásidő meghaladta a 30 percet. Látható, hogy a módszer – bár a pontos optimum megadására képes – rendkívül lassú. A genetikus algoritmus eredményei sokkal inkább bíztatóak, de mégsem kielégítők. Megjegyezendő, hogy míg a korlátozás programozás és a heurisztikus megoldások eredményei minden esetben optimálisok voltak, addig a genetikus algoritmus több esetben csak kvázi optimális megoldást nyújtott, melyek hibái a valódi optimumtól számítva 1% -ot sem érték el. A heurisztikus megoldás futásideje a tesztek során soha nem érte el az 1 másodpercet.

A fajlagos költségmodell bevezetése új utat nyit meg a kiterjesztett készletezési-irányítási modell előtt. Fontossága rendkívüli. Az egyszeri gyártásindítással kielégíthető periódusok optimális darabszámának meghatározásával a modell kilép a hagyományos (t, S) periodikus modellek családjából, mert t „ellenőrzési" ciklus hossza változó igények és feltételek mellett változni fog.

A módszer helyességét a korábbiakban tárgyalt korlátozás programozás és a genetikus algoritmus is egyértelműen igazolja. A módszer rendkívüli előnye az, hogy nagyságrendekkel gyorsabb, mint a teljes leszámlálás (*bruteforce*) vagy a genetikus algoritmus. További előnye az analitikus eljárásnak, hogy a megoldás elméletileg mindig pontos lesz, vagy legalábbis a hiba előre becsülhető.

5.4. A beszállítói készletezési politika n. gyártási periódusra vonatkozó (várható) költsége

A helyes beszállítói politika meghatározásában nagy szerepet kap a költségek előkalkulációja. Fontos kérdésként merül fel, hogy az n. periódusban mennyi lesz a beszállító várható költsége. A becsült költségértékek segítségével a készletezési politika tovább finomítható.

A várható költségek meghatározásához először a rendelési periódusok közötti kapcsolatok tisztázására van szükség. Az egyes periódusok nem függetlenek egymástól, mert az i. periódusban a lehívás során a raktárban megmaradt termék az $i+1$. periódus kezdő raktárkészletében is megjelenik. Az i. periódusban történt tényleges lehívás értéke csak statisztikai információk alapján ismert. Ez a bizonytalanság így a további periódusok kezdő raktárkészleteiben rekurzívan fog megjelenni a várható érték definíciója alapján a következőképpen:

$$I_i = E\left[q_{i-1} - D_{i-1}\right]^+ = \int_0^\infty \max\left(q_{i-1} - x_{i-1}, 0\right) f_{i-1}(x_{i-1}) dx_{i-1}, \tag{5.11}$$

ahol I_i jelenti az i. rendelési periódus várható raktárkészletét. q_{i-1} jelenti az $i-1$. periódus optimális raktározási mennyiségét, D_{i-1} az $i-1$. periódus várható igényét és $f_{i-1}(x_{i-1})$ pedig az $i-1$. periódus igényének sűrűségfüggvénye.

Az n. periódus költségének meghatározása rekurzív folyamat, ahol célunk az n. periódus induló készletszintjének számítása. Az első lépés az első periódus optimális raktárkészletének meghatározása, majd ebből a várható igények után megmaradt második periódusbeli induló készletszint következik. Minden periódusra sorban elvégezve ezeket a műveleteket végül megkapjuk az n. periódus készletszintjét. Tehát:

$$I_1 = \int_0^\infty \max\left(q_1 - x_1, 0\right) f_1(x_1) dx_1, \quad I_2 = \int_0^\infty \max\left(q_2 - x_2, 0\right) f_2(x_2) dx_2, \dots ,$$

$$I_n = \int_0^\infty \max\left(q_{n-1} - x_{n-1}, 0\right) f_{n-1}(x_{n-1}) dx_{n-1}.$$

A meghatározott készletszintet a költségfüggvénybe helyettesítve a periódus várható költsége már számolható. A kiterjesztett modell segítségével lehetőség nyílik gyártási ciklusok várható költségeinek számítására is. Ekkor az (5.8) összefüggésben q_w^{i-1} az $i-1$. gyártási ciklus w darab együtt gyártott periódus optimális mennyiségét jelenti. Hasonlóan D_w^{i-1} pedig az $i-1$. gyártási ciklus w darab periódus igényeinek összege.

Ezek alapján az egyes gyártási ciklusok várható költségei képezhetők. Példaképpen $w = 2$ esetben az i. gyártási ciklus költségfüggvénye a következő:

$$K_w^i\left(q_w^i\right) = c_f + c_v\left(q_w^i - E\left[q_w^{i-1} - D_w^{i-1}\right]^+\right) + \\ + hE\left[q_{w-1}^i - D_{w-1}^i\right]^+ + hE\left[q_w^i - D_w^i\right]^+ + pE\left[D_w^i - q_w^i\right]^+. \quad (5.12)$$

A gyártási ciklusok költségének meghatározása után felírható az n darab gyártási ciklus várható költsége is az egyes ciklusok várható költségeinek összegeként. Azaz:

$$E(K_n) = \sum_{i=1}^{n} E[K_{w_i}^i(q_{w_i}^i)]. \quad (5.13)$$

Az összefüggésben w_i jelenti azt, hogy minden gyártási ciklus egyszeri gyártásindítással kielégíthető optimális periódusszáma más és más lehet.

A bemutatott módszer segítségével előre becsülhető az időhorizont várható költsége. A becslés jósága természetesen a kapott előrejelzések pontosságán múlik.

5.5. A termékkifutás problémájának értelmezése

A piaci felmérések egyértelműen igazolják, hogy a termékek életciklusaiban a kereslet-ingadozások mellet határozott rövidülés figyelhető meg. Gyakori, hogy az igényekhez igazodó speciális termékek (pl. szezonális (karácsonyi) csomagolóanyagok) esetében a kereslet egy idő után teljesen megszűnik, és újra fel nem használható készletek („dög") keletkeznek. Az ily módon keletkezett felesleges készletek nem csak a komponens gyártó cég számára okoznak költségnövekedést, de

jelentős veszteséget jelenthetnek a teljes ellátási lánc (SC) számára is. Napjainkban a problémával szinte minden kereskedő, beszállító cég szembesül, és rendszerint tapasztalatokon alapuló menedzser döntések segítségével próbál ellene védekezni.

A kereslet nem várt csökkenése, esetleg teljes megszűnése számos estben szinte megjósolhatatlan. Más esetekben vannak előjelei. A készletgazdálkodásban egy ilyen komplex probléma kezelésére az emberi intelligencia nélkülözhetetlen. A döntések támogatására a készletgazdálkodási modellt olyan elemekkel kell kiegészíteni, amelyek az emberi intuíciót kiegészítve megkönnyítik a probléma kezelését. Ily módon a beszállítónak lehetőség nyílik – a kapott előrejelzésekre építve – különböző megoldási alternatívák, készletezési politikák, „verziók" költségvonzatának felmérésére. A „termékkifutás" modellezésével tehát a beszállítói készletezési politika hatékonyabb megválasztása válhat lehetővé.

A készletgazdálkodás irodalmában e problémával kapcsolatos megjelent publikációk száma még kevés, a közölt megoldási javaslatok leginkább a logisztikus eloszlás [111] (*logistic distribution*) alkalmazásán alapulnak. Egri és Váncza [34] publikációjukban szintén e megoldást alkalmazzák.

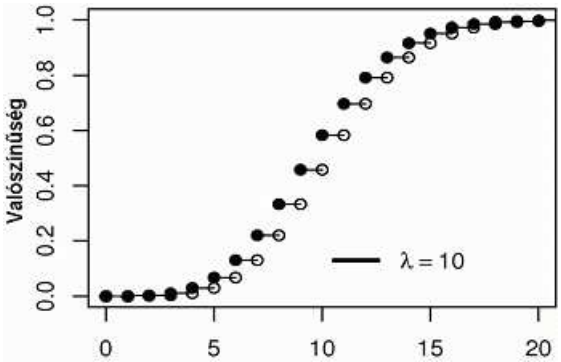
A továbbiakban a probléma kezelésének céljából kísérletet teszek egy olyan új megközelítésű kiegészítés bevezetésével, amelynek segítségével a termékkifutás problémája több periódus együttes gyártása esetén értelmezhető lesz. A „termékkifutás" terminológia azt fejezi ki, hogy a tényleges igény az adott termék iránt bizonyos idő elteltével nullára csökken. Ilyenkor van még előre jelezve bizonyos igény a végtermékgyártó rendszeréből, de a szezonalítás miatt az adott termék valószínűleg kifut. Ennek modellezésére olyan kiegészítő elemet (függvényt) kerestem, ami kifejezi a termékkifutás időben növekvő kockázati tényezőjét.

Kutatómunkám során több különböző függvényt megvizsgálva arra jutottam, hogy a Poisson eloszlás eloszlásfüggvénye úgy paraméterezhető, hogy a modell természetes értelmezési tartományában a bal oldalon a 0-hoz, jobb oldalon pedig az 1-hez simul. Ez kifejezi a kifutás hirtelenségét a „középső sávban" és könnyen illeszthető a modellbe szorzótényezők formájában.

A Poisson eloszlás diszkrét, azaz a valószínűségi változó a természetes egész számok halmazából vehet fel értékeket. A Poisson eloszlás formulája [44]:

$$P(\zeta = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}, \quad n = 0, 1, 2, ..., \quad n \in N. \tag{5.14}$$

A következő ábrán a Poisson eloszlás diszkrét eloszlásfüggvénye látható, $\lambda = 10$ paraméter esetén.



5.4. ábra. A Poisson eloszlás diszkrét eloszlásfüggvénye $\lambda = 10$ esetén

Jelen példában a $\lambda = 10$ azt fejezi ki, hogy az esemény 10 időegység (periódus) alatt nagy valószínűséggel 1-szer bekövetkezik. Az ábrából látszik, hogy az első 5 héten a bekövetkezés valószínűsége csekély ($P(\xi < 5) \approx 0.07$, azaz körülbelül 7% valószínűséggel fut ki az igény az első 5 héten. A példa jól mutatja, hogy a módszer alkalmazható a termékkifutás problémájának kezelésére, de a kiterjesztett modellben való bevezetéshez további megfontolásra és finomításra van szükség.

5.5.1. A termékkifutás egy lehetséges modellezése

Jelölje $R(i, \lambda)$ függvény a Poisson eloszlás eloszlásfüggvényét, ahol i a periódusokat jelölő pozitív egész szám. $\lambda = [0..\infty]$ pedig a Poisson eloszlás valós paramétere. Értékét azzal a periódusszámmal célszerű megadni, amikor a kifutás várhatóan be fog következni. Kifejezi a termék szezonalítását; azaz minél kisebb az értéke, annál nagyobb a kifutás veszélye. Legyen d a raktáron maradt, kifutott termék virtuális büntetését reprezentáló pozitív egész változó. Ekkor a $d \cdot R(i, \lambda)$ szorzat kifejezi az adott termék kifutásának időben növekvő kockázati tényezőjét, valamint $1 - d \cdot R(i, \lambda)$ pedig a nem kifutás tényezőjét.

Ahhoz, hogy ez a tag a kiterjesztett modellben megfelelő módon legyen alkalmazva, egy további megfontolásra van szükség. Ha az igény hirtelen megszűnése miatt a termék hirtelen kifutott, akkor ez azt jelenti, hogy a termék bizonyos mennyiségének százaléka a raktáron maradt egy többé már nem hasznosítható felesleget képezve. A termékkifutás kockázati tényezője a modellben így a következőképpen vezethető be:

A raktáron marad termékekre új büntető tagot vezetünk be a $dR\,(i, \lambda)$ és a megmaradt termékmennyiség szorzattal. A költségfüggvényben eddig is szerelő raktározási költség tagokat pedig $1-dR\,(i, \lambda)$ összefüggéssel szorozzuk. A kifutás után büntető költség már nem jelentkezhet, ezért a függvényben megjelenő büntető tagokat szintén $1 - dR\,(i, \lambda)$ összefüggéssel szorozzuk.

A módszert a két periódusos gyártáson keresztül mutatjuk be. Noha két periódus esetén nem nagyon lehet termékkifutásról beszélni, a példa célja a megértés egyszerűsítése. A két periódusos modell költségfüggvénye a bevezetett újabb tagokkal a következőképpen írható fel:

$$K_{12}(q_{12}) = c_f + c_v\,(q_{12} - I) + h(1-a)E\,[q_{12} - D_1]^+ + h(1-b)E\,[q_{12} - D_{12}]^+ + (1-a)pE\,[D_1 - q_{12}]^+ + \\ +(1-b)pE\left[D_2 + [D_1 - q_{12}]^-\right]^+ + \; aE\,[q_{12} - D_1]^+ + bE\,[q_{12} - D_{12}]^+\,, \tag{5.15}$$

ahol $a = dR\,(1, \lambda)\,,\, b = dR\,(2, \lambda)$.

A feladat jelen esetben is a költségek minimalizálása. A korábbiakhoz hasonlóan célunk a szélsőérték számítás eszközét alkalmazva a célfüggvény minimumának megtalálása, amely során a következő összefüggéshez jutunk (a részletes levezetést az (A.8.1) függelék tartalmazza):

$$F_{12}\,(q_{12}^*) = \frac{p - c_v + F_1(q_{12}^*)\,[(1 - dR(1,\lambda))\,(p - h - 1) - pdR(2,\lambda)] - pdR(1,\lambda)}{p + h + dR(2,\lambda)(1 - h - p)}. \tag{5.16}$$

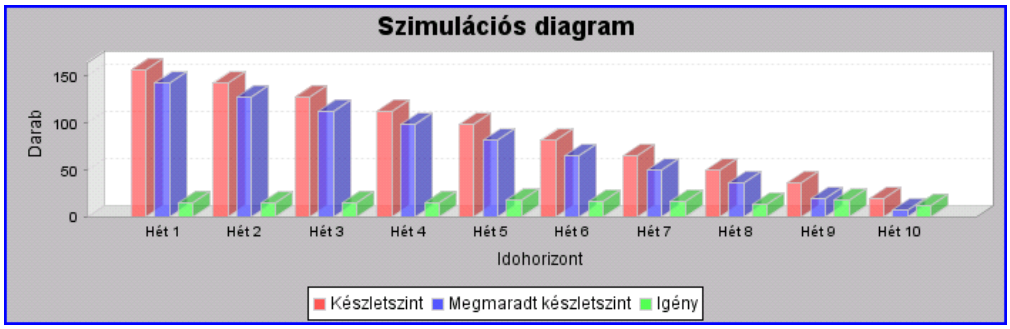
A termékkifutás problémája az n periódusos gyártás esetén nyeri el igazi értelmét, amely a bemutatott példához hasonlóan értelmezhető. Természetesen ilyenkor n darab periódus költségeinek megfogalmazása szükséges az 5.15 alapján. A megoldás ebben az esetben (nem részletezzük,

de az (A.8.1) és (A.8.2) függelékek alapján igazolható):

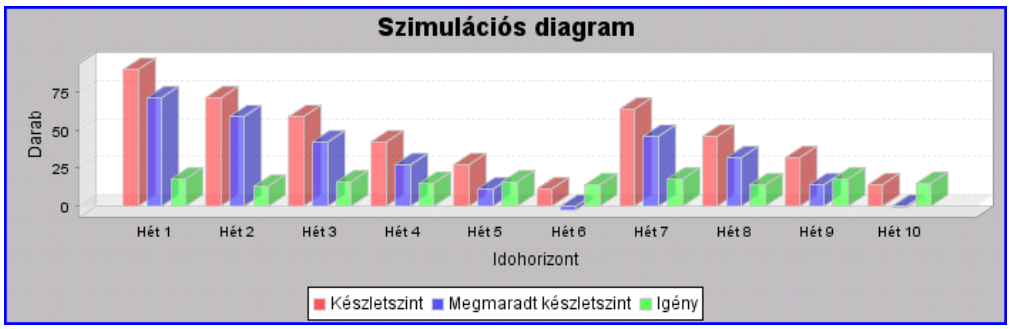
$$F_n^1(q^*_{123\ldots n}) = \frac{p - c_v - \left(\sum_{i=1}^{n-1} F_i^1(q^*_{123..n})\right)(h + pdR(n,\lambda))}{p + h + dR(n,\lambda)(1-h-p)} + \\ + \frac{\left(\sum_{i=1}^{n-1} dR(i,\lambda)F_i^1(q^*_{123..n})\right)(h+p-1) - p\left(\sum_{i=1}^{n-1} dR(i,\lambda) - dR(n,\lambda)\right)}{p + h + dR(n,\lambda)(1-h-p)} . \quad (5.17)$$

Az összefüggésben új jelölésrendszer bevezetése vált szükségességé az áttekinthetőbb forma érdekében. F_i^1 jelenti az i darab periódus együttes gyártásakor megjelenő együttes eloszlásfüggvényt (korábbi jelölése: $F_{123\ldots i}$).

A számításokban a d paraméter értékének a megválasztása kulcsfontosságú, hiszen annak megfelelő hangolásával érhető el a kívánt politika. A paraméter hangolása mindig a $d = 0$ értéktől kezdődik. Amikor a számláló értéke negatívvá válik, ez azt jelenti, hogy az adott d érték mellett a termék kifutott az adott periódusban. Ebben az esetben az együtt gyártott periódusok számának redukálása a cél. d értékét mindaddig kell hangolni, amíg a termék a megadott λ periódusban ki nem fut. Az alábbi ábrák ennek a folyamatát mutatják be röviden egy 10 hetes szimuláció segítségével. Legyen $\lambda = 6$, azaz várhatóan a 6. héten fut ki a termék.



5.5. ábra. Készletezési politika a termékkifutás alkalmazása nélkül ($d = 0$)



5.6. ábra. Készletezési politika a termékkifutás alkalmazásával $d = 12$ érték esetén

A 5.6 ábra jól mutatja, hogy a termék kifutott a 6. héten $d = 12$ paraméterérték beállítása segítségével. Bár az ábra a kifutás után is mutat további gyártást, de ezt jelen esetben ne vegyük figyelembe, az alkalmazás az időhorizont további periódusait is kiszámolta. A modellben

a d paraméter felfogható, mint büntetőköltség, hasonlóan a p paraméterhez. Értékének megfelelő megválasztásával a kívánt politika tovább hangolható.

Az 5.17 összefüggés jól mutatja, hogy sikerült elérni a kitűzött célt, miszerint egy olyan új megközelítésű matematikai részmodellt sikerült bevezetni a termékkifutás problémájának kezelésére, amely megoldása koncepciójában és az eloszlásfüggetlenség jellegéből fakadóan nagyon jól illeszkedik a korábbi eredményekhez.

5.5.2. Gyakorlati alkalmazás

Valós környezetben a kifutás pontos idejét nem ismerjük. Ennek ellenére a problémával, a termékkifutás bizonytalanságával mégis számolni kell a készletezési politika meghatározásában. A folyamat gyakorlati alkalmazhatósága és a menedzseri döntések támogatása szempontjából ezt úgy tehetjük meg, hogy rögzített d, λ párokat képezünk és „fuzzy szerű” változókat rendelünk hozzájuk úgy, mint például: „nagy a kifutás veszélye”.

Ez a fajta gyakorlati megközelítés lehetővé teszi a könnyű integrálhatóságot a már létező rendszerekbe.

6. fejezet

Termelői kapacitáskorlátok alkalmazása a kiterjesztett modellben

Az eddigiekben olyan megoldásokat mutattunk be, amelyek egy termékre vonatkoztak és feltételrendszerükben minden esetben szerepelt a korlátlan, szabad termelői kapacitások megléte is. Ez azonban általában nem felel meg a valóságnak, hiszen a beszállító vállalat, amely esetleg több száz terméket gyárt megadott határidőre, véges gyártási erőforrásokkal rendelkezik. A termeléstervezés és a készletgazdálkodás során egyaránt számolni kell ezekkel. Mivel a gyártó több kapacitást nem tud felhasználni, mint ami a rendelkezésére áll, így az a kérdés merül fel, hogy a különböző termékből együttesen mikor és mennyit lehet gyártani a készletezési politika megvalósításához. A probléma már több tíz termék esetén is rendkívül bonyolult, már csak azért is, mert a különböző termékek különböző költség paraméterekkel rendelkeznek, és így a költségfüggvények bonyolult rendszert alkotnak. A kapacitáskorlátok is termékenként vagy termékcsoportonként jelentkezhetnek, ezért a készletezés optimálási feladat az NP-nehéz feladatok osztályába tartozik.

A továbbiakban megkísérlem a bemutatott modellek feltételrendszerét a kapacitáskorlát feltételével kibővíteni. A megoldási módszerek ismertetésénél az egyszerű egy termékes, egy periódusos problémától haladok a bonyolultabb esetek felé.

6.1. Az egy termékes, egy periódusos modell

Az egy periódusos, egy termékes modell a kapacitáskorlát probléma legegyszerűbb esete. A klasszikus modellt alkalmazva korábban már beláttuk, hogy a felírt 3.1 költségfüggvény egy periódusra vizsgálva egy termék optimális mennyiségének meghatározására alkalmas. Beláttuk, hogy a büntető költség növelésével a hiány mértéke tetszőleges kicsinyre csökkenthető. A büntető költség növelése esetén a modell a készletszint növelésével védekezik a hiány ellen. Ez azonban meghatározott periódusokban többlet kapacitást igényelhet, ami kapacitáskorlát esetén nem mindig áll rendelkezésre.

Könnyen belátható, hogy a készletezési feladat megoldása a korlátfeltételnek megfelelően változni fog. A változás mértéke a kapacitáskorlát értékétől függ.

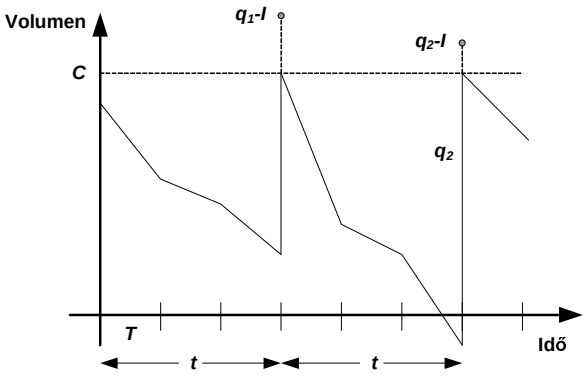
Diszkrét komponens gyártása esetén jelölje C pozitív egész az időegység vagy az időperiódus alatt gyártható komponens mennyiségét. Jelölje q^* a 3.1 költségfüggvény optimális megoldását, ami azt jelenti, hogy mennyi termék legyen a raktáron az igény megjelenésekor. A gyártandó m mennyiség ekkor kifejezhető a következő összefüggéssel:

$$Ha \begin{cases} 0 < q^* - I \leq C, & \text{akkor} \quad m = q^* - I, \\ q^* - I > C, & \text{akkor} \quad m = C, \\ q^* - I \leq 0, & \text{akkor} \quad m = 0, \end{cases} \tag{6.1}$$

azaz

$$m = max(min((q^* - I), C), 0).$$

Az $m = 0$ eset azt jelenti, hogy a beszállító a raktáron elegendő mennyiséggel rendelkezik, ezért a gyártás ideje eltolódik. Továbbá, ha a beszállító kritikus raktárkészletet is alkalmaz, akkor a gyártás ideje szintén eltolódik, amennyiben az $I > s$ feltétel teljesül, ahol s jelöli a kritikus raktárkészletet. A következő ábra a kapacitáskorlát hatását mutatja nem „eltolt” gyártás esetén:



6.1. ábra. Kapacitáskorlát alkalmazása egy termék és periodikus gyártás esetén

6.2. A több termékes egy periódusos modell

Több termék esetében a megoldás bonyolultabb. A gyakorlatban a probléma két további alesete fordulhat elő. Amennyiben az egyik termék gyártásakor lekötött kapacitás nem befolyásolja az összes többi másik termék gyártását, akkor n darab független egy termékes, egy vagy több periódusos problémát kapunk (a több periódusos modell megoldását a későbbiekben ismertetem). Egy második esetben a termékek ugyanazon közös erőforráson osztoznak. A cél az, hogy termékenként meghatározzuk azt az optimális készletezési mennyiséget, amelyekből következő gyártandó mennyiségek összege kielégíti a kapacitáskorlát feltételét, valamint az, hogy a termékenként jelentkező költségek összege minimális legyen.

A megoldás első lépése a termékenkénti optimális készletezési mennyiségek kiszámítása. Ha az ezekből számolt gyártandó mennyiségek összege nagyobb, mint C értéke, akkor a klasszikus értelemben vett optimum(ok) módosítására van szükség. A termékeknek egymástól eltérő tárolási, gyártási és büntető költségei lehetnek, ezért a probléma bonyolult. A megoldásban ekkor a

termékek költségének az összegét kell minimalizálni. Tehát:

$$\left[\sum_{i=1}^{n} K^i(q^i) = \sum_{i=1}^{n} c_f^i + c_v^i(q^i - I^i) + h^i E\left[q^i - D^i, 0\right]^+ + p^i E\left[D^i - q^i, 0\right]^+\right] \longrightarrow \min, \tag{6.2}$$

ahol i=1,2,...,n a termék sorszámát jelenti. Jelölje $u^i > 0$ valós szám az i. termék kapacitásigényét. A szélsőérték számítást ekkor a következő feltétel figyelembevételével kell elvégezni:

$$\sum_{i=1}^{n} u^i \cdot (q^{i*} - I^i) \leq C, \tag{6.3}$$

ahol q^{i*} jelenti az i. termék optimális készletezési mennyiségét, I^i pedig a kezdő raktárkészletet. Vannak olyan esetek, amikor bizonyos termékek gyártása az időben előre eltolható . Ez akkor fordul elő, amikor az adott termékből elegendő mennyiség áll rendelkezésre a raktáron. Ezért azon i termék, amelyre fennáll a $(q^{i*} - I^i) \leq 0$ összefüggés, nem szerepel a kapacitáskorlát vizsgálatában. Ilyenkor azonban a kapacitáskorlát feltételének újraellenőrzése szükséges a gyártásból kimaradt terméktípusok nélkül.

Amennyiben a beszállító kritikus raktárkészletet alkalmaz, akkor szintén nem indul gyártás, ha a rendelkezésre álló készlet nagyobb, mint a kritikus készletszint. Tehát ha az $(I^i \geq s)$ feltétel – ahol s jelöli a kritikus raktárkészletet – teljesül, akkor az adott termék gyártása szintén eltolódik.

A továbbiakban, az egyszerűbb bemutatás érdekében feltesszük, hogy nincs ilyen termék. A megoldási eljárás Hadley és Whitin módszerét, és jelölésrendszerét követve [49] a következőképpen összegezhető:

Jelöljük most α^i-vel az i. termék optimális kiszolgálási szintjét: $\alpha^i = \frac{p^i - c_v^i}{p^i + h^i}$. Legyen $\beta^i = \frac{u^i}{p^i + h^i}$, valamint $\delta = 0$ egy valós segédváltozó. Ekkor

1. Minden i termékre meghatározzuk a kapacitáskorlát nélküli optimális készletezési mennyiséget, q^{i*}-ot. Ha $\sum_{i=1}^{n} u^i \cdot (q^{i*} - I^i) \leq C$, akkor stop. A megoldás optimális.
2. Válasszunk tetszőleges kicsiny kezdő értéket δ-nak úgy, hogy legyen $\delta > 0$.
3. Határozzuk meg azon q^i értékeket $i = 1, 2, ..., n$ esetén, amelyek kielégítik a következő egyenletet:
$$F^i(q^i) = \alpha^i - \delta\beta^i \text{ és } q^i > 0. \tag{6.4}$$
4. Ha
   - $\sum_{i=1}^{n} u^i \cdot (q^{i*} - I^i) = C$, akkor stop. A q^i megoldások optimálisak.
   - $\sum_{i=1}^{n} u^i \cdot (q^{i*} - I^i) < C$, akkor ugrás a 3 -as lépésre egy kisebb δ érték alkalmazásával.
   - $\sum_{i=1}^{n} u^i \cdot (q^{i*} - I^i) > C$, akkor ugrás a 3 -as lépésre egy nagyobb δ érték alkalmazásával.

A folyamat során δ értéktartományának szűkítése felezéssel történik. Az iteráció végén megkapjuk a kapacitáskorlát feltételét kielégítő mennyiségeket minimális költségek mellett.

6.3. Egy termékes, több periódusos modell

A továbbiakban a kiterjesztett, n darab periódus lefedésére alkalmas modellt vizsgálom kapacitáskorlát, egy és több termék esetén. Látni fogjuk, hogy az értelmezés kicsit eltér az eddigiektől.

A több periódusos kiterjesztett újságárus modell globális kapacitáskorlát feltételének bevezetésekor figyelembe vesszük a modell jellegzetességét, a periódus időegység alapú politikát. Ennek megfelelően alapvetően kétféle optimalizálási módszert, politikát különböztetünk meg:

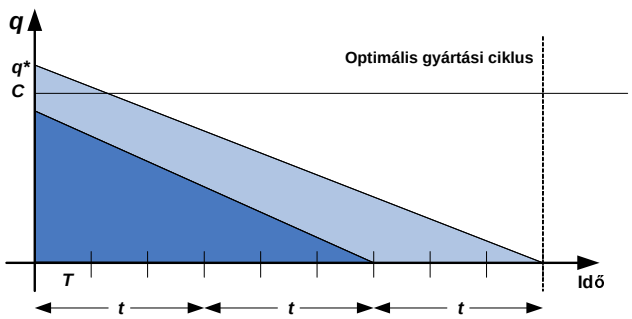
- Kiszolgálási szint alapú politika.
- Költség alapú politika.

A két politika nyilvánvalóan ellentétben áll egymással, adott esetben vagy az egyik, vagy a másik érvényesülhet csak.

6.3.1. A kiszolgálási szint alapú politika

A kiszolgálási szint alapú készletgazdálkodás során a cél az előre megadott kiszolgálási szint (*Service Level*) folyamatos és szigorú betartása. Ez a szint a vállalat stratégiai céljainak és a végtermékgyártóval való kapcsolatnak megfelelően kerül meghatározásra. A kapacitáskorlát alkalmazása ebben az esetben azt jelenti, hogy a ki nem elégített rendelések száma nem eshet egy meghatározott kiszolgálási szint alá. A kiszolgálási szint be nem tartása kockáztatja a beszállító megrendelői kapcsolatát, s akár a vásárló elvesztésével is járhat.

A probléma megoldását az egyszeri gyártásindítással kielégíthető periódusok számának redukálása adja. Ha a kiterjesztett modell segítségével előre kalkulált optimális együttgyártási periódusszámhoz tartozó optimális mennyiség túllépi a kapacitáskorlát értékét, akkor az előre meghatározott kiszolgálási szint értéke csakis úgy tartható, hogy redukáljuk az együttgyártási periódusok számát mindaddig, amíg az adott periódusszámhoz tartozó optimális mennyiség ki nem elégíti a kapacitáskorlát feltételét. Ennek oka a következő: A legfontosabb korlát a kiszolgálási szint biztosítása. A modell ezen kiszolgálási szintnek megfelelően számítja ki az optimális együttgyártási periódusszámot. Ha a kapacitáskorlát miatt ezen mennyiség gyártása nem lehetséges, akkor biztosan kevesebb termék gyártására van szükség. A termékmennyiségek csökkentése viszont csakis periódusegységenként történhet, mert az egyes periódusokhoz tartozó készletezési mennyiségek a kiszolgálási szint feltétele alapján kerülnek meghatározásra. A következő példa jól szemlélteti ezt.



6.2. ábra. Kapacitáskorlát alkalmazása kiszolgálási szint alapú politika esetén

Példa: Legyen az „A” termék optimális együttgyártási periódusszáma 3 hét, és a kiszolgálási szint értéke 95%, amely jelentsen 80 darab terméket. A kapacitáskorlát (C) értéke legyen 75 darab, amely nem teszi lehetővé az előírt kiszolgálási szint tartását az optimális együttgyártási periódusszám mellett. Csökkentsük a termék együttgyártási hétszámát 2-re. Számítsuk ki a kiszolgálási szintnek megfelelő optimális mennyiséget 2 hétre. Legyen ez 65 darab termék, amely megfelel a kapacitáskorlátnak. Ha a kapacitáskorlátnak megfelelő 75 darabot gyártottunk volna, akkor a 3. periódus előírt kiszolgálási szintje nem biztosítható, az igények így nem elégíthetők ki maradéktalanul. A periódusszám redukálás miatt azonban a két hétnek megfelelő optimális mennyiséggel biztosítható a kiszolgálási szint .

6.3.2. A költség alapú politika

A költség alapú készletgazdálkodás során a legfontosabb cél, a költségek minimálása. Ez a modell olyan beszállító esetét modellezi, amely vagy közvetlenül a piaccal áll kapcsolatban, vagy erős pozíciói vannak a végszerelővel való viszonyában. A vállalat maga dönt a megengedhető hiány mértékéről, a modell büntető költségét ezalapján határozza meg. Költség alapú politika esetén mivel a kiszolgálási szint tartása nem elsődleges cél és hiány is megengedett, a gyártási költségek optimálásánál a *setup darabszámának csökkentése* vagy a *„büntetés” kockázatának vállalása* lehet alternatíva.

A hiány megengedésével kapcsolatos megoldás nem analóg az előző esetben tárgyaltakkal. Nem biztos, hogy az együttgyártási periódusszám redukálása lesz minimális költségű. Lehet, hogy valamilyen mértékű büntetés bevállalása kedvezőbb a vállalatnak.

A módszer alapgondolata a következő: Tegyük fel, hogy a rendelkezésre álló kapacitások nem teszik lehetővé az optimális készletezési mennyiségből számolt gyártandó mennyiség (m) legyártását. Az egyik megoldás az lehet, hogy a kapacitáskorlátnak megfelelő mennyiséget gyártunk. Ekkor a gyártási ciklus (több logisztikai periódus) végén nagy valószínűséggel hiány keletkezik, amely büntető költséggel jár. Második megoldásként tegyük fel, hogy redukáljuk a ciklus periódusszámát (ez akár több periódust is jelenthet) úgy, hogy a gyártási mennyiség már kielégíti a kapacitáskorlátot. Ebben az esetben a redukált ciklusnak megfelelő rendelések kielégítődnek, viszont új setup (gyártásindítás) beiktatás szükséges a teljes ciklus rendeléseinek a kielégítéséhez. A két politika közötti kapcsolat a következő: Az első politika esetén az utolsó periódus(ok)ra szánt mennyiség biztosan elfogy a kapacitáskorlátnak megfelelően gyártott mennyiség miatt. Több periódus együttgyártásakor ez a mennyiség a ciklus elejétől kezdve azonban a raktárban van, így mind tárolási, mind raktározási költséget jelent mindaddig, amíg el nem fogy teljesen. Az utolsó periódus mennyiségét, amely már nem tudja kielégíteni maradéktalanul az adott periódus igényeit, a továbbiakban *csonka periódus*nak nevezzük.

A döntési szabály megfogalmazása tehát a következő: Ha a kapacitáskorlátnak megfelelő mennyiség gyártása esetén jelentkező hiány költsége, plusz a csonka periódus mennyiségének az időhorizont elejétől való folyamatos tárolásából fakadó költségének az összege kisebb, mint egy új setup beiktatásának költsége, akkor a hiány vállalásának kockázata a megfelelő magatartás. Ellenkező esetben az együttgyártási periódus-szám redukálása a megfelelő politika.

A következőkben bevezetünk egy összefüggést, amely a fent megfogalmazott politikát forma-

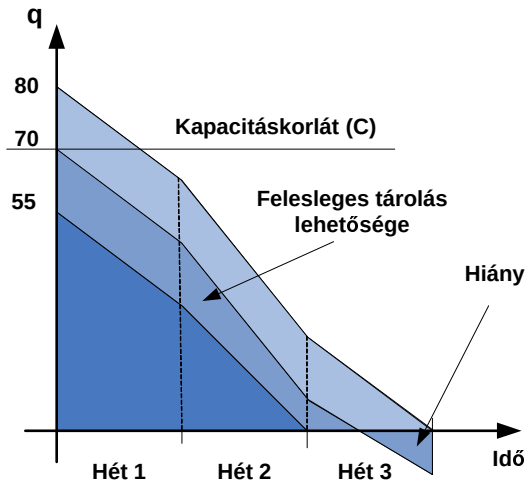
lizálja. Jelöljük a bekövetkező hiányból fakadó büntetés költségét P-vel [Ft]. Ekkor a döntés a következő feltétel alapján hozható meg:

$$Ha \begin{cases} P + \sum_{i=1}^{a} h \cdot (C - q_a) \leq c_f, \text{ akkor a kockázat vállalása,} \\ P + \sum_{i=1}^{a} h \cdot (C - q_a) > c_f, \text{ akkor a periódusszám redukálása a követendő.} \end{cases} \tag{6.5}$$

Itt h a termékenkénti kumulált raktározási költség, és $q_a \leq C$ pedig az első olyan redukált együttgyártási periódusszámnak megfelelő készletezési mennyiség, amely még 100%-ban kielégíti a csökkentett periódusnak megfelelő igényeket. A képletben a index jelöli azt a periódusszámot, amelyhez tartozó q_a mennyisége még kisebb, mint a C kapacitáskorlát értéke. Ekkor

$$h \cdot a \cdot (C - q_a) = \sum_{i=1}^{a} h \cdot (C - q_a) \tag{6.6}$$

jelenti azt a tárolási költséget, amely amiatt keletkezik, hogy kapacitáskorlátnak megfelelő mennyiség és a redukált együttgyártási periódusszám mennyiségének különbségeként jelentkező árumennyiséget a folyamatosan tároljuk a ciklus kezdetétől a raktárban. A következő ábra egy példán keresztül szemlélteti a költség alapú politika hatását.



6.3. ábra. Kapacitáskorlát alkalmazása egy termék és több periódus együttes kezelése esetén

Példa: Tegyük fel, hogy az „A” termékből 3 hetet érdemes együtt gyártani, amely 80 darab terméket jelent. A kapacitáskorlát (C) értéke viszont 70 darab. Vizsgáljuk meg a fent leírt feltétel alapján a költségek viszonyát. Abban az esetben, ha a $P + h \cdot a \cdot (70 - 55) \leq c_f$, akkor a kapacitáskorlátnak megfelelő mennyiséget kell legyártani, azaz 70 darabot. Ellenkező esetben a periódus-szám csökkentését kell vállalni. Jelen példában $a = 2$, mert a második hét q mennyisége még megfelel a kapacitáskorlát feltételének. A kapacitáskorlát miatt 10 termék biztosan nem kerül legyártásra. Legyen $h = 2$, $c_f = 300$, $p = 20$, ekkor $P = 20 \cdot 10 = 200$. Az egyenlet bal oldala ekkor: $200 + 2 \cdot 2 \cdot (70 - 55) = 260$. Mivel $260 < 300$, ezért a megfelelő politika a beszállító számára a büntetés vállalása lesz.

6.4. Több termékes, több periódusos modell

A több termék együttes gyártásakor felmerülő globális kapacitásproblémák megoldására leginkább az irodalomban ismert ABC analízis elnevezésű módszert alkalmazzák. Ebben az esetben az elkészített Pareto-diagram alapján következtetések vonhatók le a termék halmaz elemeinek „fontossági" eloszlásáról [16]. A módszer azonban nem ad mindenre kiterjedő választ a tényleges készletezési mennyiségek meghatározásának problémájában. Az eljárást részletesen bemutatják a [35][43][45] könyvek.

A következőkben egy heurisztikus módszert mutatok be a „kiszolgálás alapú" készletezési politika több termékes, kapacitáskorlátos optimalizálási problémájának megoldására. Úgynevezett „globális" kapacitáskorlátot feltételezek, azaz a termékek egyetlen közös „gyártó" kapacitáson osztoznak (megjegyzés: ez a kapacitáskorlát feltételezés az egyszerű, homogén komponensekből szerelt végtermék tömeggyártása esetén jól használható). Feltételezem továbbá, hogy a készletezési politika döntései hosszú távú időhorizontra vonatkoznak.

A bemutatott megoldásban a kiszolgálási szint alapú politikát választom alapul. Több termék esetén a cél összetettebb: meghatározni a termékenkénti redukált együttgyártási periódusszámokat úgy, hogy a legyártásra kerülő mennyiségek összege kielégítse a kapacitáskorlát feltételét, és a költségek a kiszolgálási politika feltételei között minimálisak legyenek. A probléma megoldásához meg kell tudni határozni, hogy mely termék(ek) optimális együttgyártási periódusszámát kell csökkenteni ahhoz, hogy a termelés a kapacitáskorlátnak megfelelő határok között maradjon. Nagyon fontos megfigyelni azt, hogy míg az egy termékes modellnél csak az együttgyártási periódusszám csökkentése volt a feladat, több termék esetén azonban megjelenik a költség, mint további optimalizálási feltétel, hiszen több olyan megoldás is lehetséges, amely megfelel a kapacitáskorlátnak. Ezekből a megoldásokból a minimális költségű megtalálása a cél.

Mivel az egyes termékek költségfüggvényei minden paraméterben különbözhetnek, ezért nehéz triviális szabályszerűséget találni abban, hogy mely termékek együttgyártási periódusszámát kell redukálni. Az összes esetet kipróbáló *bruteforce* algoritmussal természetesen meghatározható a legjobb esetet, azonban ez rendkívül időigényes. A továbbiakban egy olyan heurisztikus módszert mutatok be, amely a fajlagos költségmodellre alapozva egyértelműen meghatározza a keresés célját. A módszer alapgondolatát felhasználva a továbbiakban bemutatásra kerül egy saját megoldó algoritmus, amely irányított iteráció segítségével a kiszolgálási szint alapú politikára nézve optimális megoldást határoz meg.

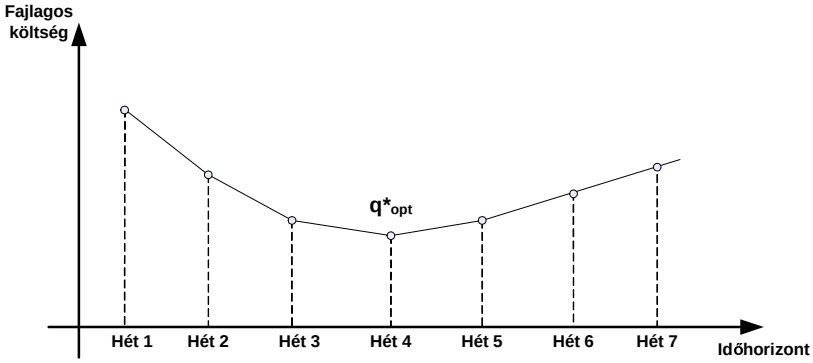
6.4.1. A heurisztikus megközelítési módszer

Tegyük fel, hogy a beszállító n darab terméket gyárt, és a kiterjesztett modell segítségével kiszámolt optimális legyártandó mennyiségek összege nagyobb, mint a kapacitáskorlát értéke. Ebben az esetben a megoldás korrigálása szükséges a feltételrendszernek megfelelően. Képletben kifejezve:

$$\text{Ha } \sum_{i=1}^{n} u^i \cdot (q^{i*}_{opt_j} - I^i) \leq C, \text{ akkor jó a megoldás.}$$

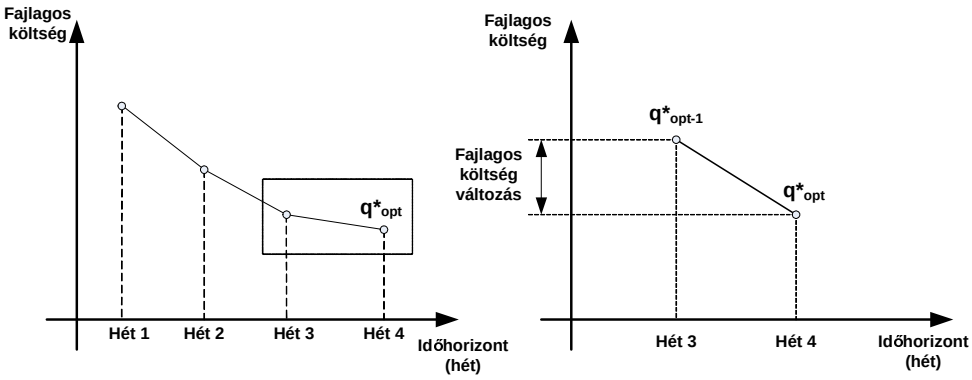
Az összefüggésben i ($i = 1, ..., n$) jelenti a termékek darabszámát, $q^{i*}_{opt_j}$ az i. termék optimális mennyiségére utal opt_j ($opt_j = 1, ..., m$) darab együtt gyártott periódusra nézve, ahol opt_j az optimális együttgyártási periódusszám, értéke termékenként más és más lehet. I_i az i. termék kezdeti raktárkészlete. Kapacitástúllépés esetén a kiszolgálási politikának megfelelően a termékek együttgyártási periódusszámának módosítására van szükség. A kérdés az, hogy mely termék(ek)nél milyen mértékű periódusszám csökkentés történjen, hogy az így kapott megoldás minimális költségű legyen?

A heurisztikus módszer alapgondolata a termékek fajlagos költségmodelljének jellegzetes tulajdonságára épül. A következő ábra egy termék fajlagos költségének változását mutatja az együtt gyártott periódusok függvényében. A módszer bemutatása során egy periódus időegységnek egy hét felel meg.



6.4. ábra. Fajlagos költséggörbe változása hét hetes időhorizont esetén

n darab termék esetén n darab hasonló, de nem azonos görbe rajzolható. Induljunk ki a termékek fajlagos költséggörbéjének vizsgálatából. A következő ábra a 6.4. ábrát módosítva, a 4. hétig ábrázolja a fajlagos költségváltozását.



6.5. ábra. Fajlagos költségnövekedése az együtt gyártott periódusok csökkentésének függvényében

Az ábrát megvizsgálva látható, hogy ha a 4 hetes optimális együttgyártási hétszámot 3 hétre csökkentjük, akkor a fajlagos költség értéke biztosan növekedni fog. Belátható ez alapján, hogy mivel minden termék fajlagos görbéje a példához hasonló, és melyek minimumpontja az optimális együttgyártási periódusszám, így a kapacitáskorlátnak megfelelő optimális megoldás olyan megoldás, ahol az egyes termékeknél elvégzett együttgyártási periódusszám csökkentésből fakadó

fajlagos költségnövekedések összege minimális. Az így kapott megoldás teljesíti a kiszolgálási szint követelményeit és ezzel a feltétellel minimális költségű is egyben. Jelölje FKV_i az i. terméknél elvégzett fajlagos költségváltozások összegét. Ekkor:

$$\sum_{i=1}^{n} FKV_i \longrightarrow \min . \tag{6.7}$$

A probléma megoldása, tudva a keresés irányultságát, sem könnyű feladat. Szükség van egy hatékony keresési eljárásra, amely nagy számú termék és tetszőleges hosszú időhorizont esetén is kellő gyorsasággal tudja számolni ezen fajlagos költségváltozások összegét az együtt gyártott periódusok függvényében, és szolgáltatni a megoldást. Az 5. fejezetben tárgyalt kiterjesztett modell analitikus megoldása és szimulációs eredményei révén hatékony eszköznek ígérkezik. A feladatban tetszőleges keresési eljárás alkalmazható, de a következőkben egy, a problémára, és a kiterjesztett modellhez illeszkedő, egyedi megközelítésű keresési algoritmust ismertetek.

6.4.2. Az algoritmus és a módszer további részletei

Az algoritmus kiinduló pontja a kapacitáskorlát feltétel nélküli optimális megoldások megléte. Az eljárás célja az, hogy a keresési teret a minimális fajlagos költségváltozások mentén járja be, hiszen korábban beláttuk, hogy az optimális megoldás csakis olyan megoldás lehet, ahol a fajlagos költségnövekedések összege minimális.

Az algoritmus alapjában véve három fő részre a bontható:

1. Az eljárás indítása és a kapacitás feltételének vizsgálata.
2. Optimum esélyes módosítás(ok) kiválasztása.
3. Összevonás kombináció kiválasztása egy lehetséges jobb megoldás érdekében.

A megoldás keresése során ezek a lépések folyamatosan ismétlődnek, míg végül előáll a kapacitáskorlátnak megfelelő beszállítói politika. Az eljárás lépéseit logikai sorrendben mutatom be. A módszer bonyolultsága miatt az értekezés A.6. és A.7. függelékeiben az eljárás általános programnyelven megírt algoritmusa, és egy mintafeladat segíti a megértést.

6.4.2.1. Az eljárás indítása és a kapacitáskorlát feltétel vizsgálata

A módszer első lépése az optimális együttgyártási periódusszám meghatározása a fajlagos költségmodell segítségével. Ezt a művelet csak egyszer kell elvégezni a módszer elején. Majd megvizsgáljuk, hogy van-e olyan termék, amelynek a gyártása időben előre „eltolható”. Ezt a raktáron lévő termékek mennyiségének és az együttgyártási periódusszámnak megfelelő optimális mennyiségek összehasonlításával végezhető el az 5. fejezetben ismertetett módszer szerint. Az első ciklus meghatározására vonatkoztatva (I_1^i az i. termék kezdő raktárkészlete az első periódusban):

$$c_v(q_j^{i*} - I_1^i) \leq 0, \qquad i = 1, 2, ..., \ n, \quad j = 1, 2, ..., \ m. \tag{6.8}$$

Amennyiben van olyan termék (i), amelyre teljesül a feltétel a fajlagos költségek számítása során, akkor az adott termék gyártása a többivel nem egy időben fog történni, így a továbbiakban az nem számít bele az összetermék mennyiségbe és nem képezi részét a feladatnak. Az eljárás további, egyszerűbb tárgyalása érdekében tegyük fel, hogy nincs olyan termék, amelyre e feltétel teljesülne.

Következik a kapacitáskorlát feltételének vizsgálata, a kapott periódusszámokhoz tartozó optimális mennyiségek segítségével. Tehát:

$$\sum_{i=1}^{n} u^i \cdot (q^{i*}_{opt_j - L_i} - I^i) \leq C, \tag{6.9}$$

ahol $q^{i*}_{opt_j}$ jelenti az i. termék optimális, opt_j darab együttgyártási periódusszámához tartozó optimális készletezési mennyiséget. Észrevehető, hogy az összefüggésben megjelenik egy, az optimális periódusszámot módosító L_i index. Az L_i index az optimálási probléma megoldásvektorára utal, amely az algoritmus iterációs lépései végén tartalmazni fogja, hogy mely termékeknél hány darab periódus-redukálás szükséges a kapacitáskorlátnak megfelelő megoldáshoz.

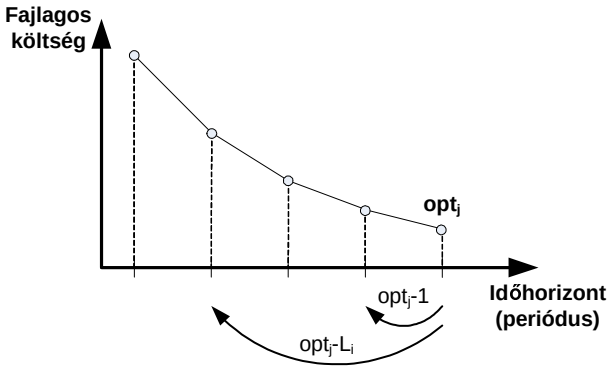
Az iteráció elején természetesen a vektor minden eleme zérus, így az eljárás indulásakor a feltétel módosítások nélkül számítható. Ha a 6.9 feltétel teljesül, akkor a megoldás megfelel a kapacitáskorlátnak, nincs szükség további módosításra. Amennyiben nem, az eljárás további lépései következnek.

6.4.2.2. Optimum esélyes módosítások kiválasztása

Ha a kapott megoldás az első lépésben, vagy a korábbi iterációban nem felelt meg a kapacitáskorlát feltételének, a megoldás módosítására van szükség. Az eljárás második lépésében így azon termékeket választjuk ki a folyamatos iteráció során, amelyek alkalmasak lehetnek a kapacitáskorlátnak megfelelő optimális megoldás meghatározásában. A 6.4.1 megállapításai miatt az optimum esélyes módosítás kiválasztást mindig a minimális fajlagos költségváltozású termék képezi. Ennek meghatározása a következőképpen történik: Minden termékeknél a korábban kiszámított optimális együttgyártási periódusszámot „virtuálisan” redukáljuk az éppen aktuális módosításaihoz (L_i) képest 1 periódussal. Az i. termék esetén ez a következőt jelenti: $opt_j - (L_i + 1)$. A redukálás elvégzése előtt és után a termékek fajlagos költsége számolható. Ennek során minden termékre nézve megadható, hogy mennyi a fajlagos költségváltozása $L_i + 1$ periódus redukálása esetén.

Optimum esélyes megoldásként egy iterációs lépésben mindig csak egy terméket választunk ki, mégpedig azt, amelyik fajlagos költségváltozása a periódusok „virtuális” redukálása során a legkisebb. Ha az i. termék került kiválasztásra, akkor a megoldásvektor i. elemét növeljük 1 értékkel ($L_i = L_i + 1$), a többi termékhez tartozó megoldásvektor értéke változatlan marad. (Példa: Ha az „A” termék optimális együttgyártási periódusszámát (pl. 3 darab hét) csökkentettük az iterációk során már két héttel, akkor a megoldásvektor értéke az „A” termék esetében $L_A = 2$). Természetesen a redukálás csakis akkor végezhető el, ha $opt_j - (L_i + 1) \geq 0$. Ha a feltétel nem teljesül, akkor a második legkisebb fajlagos költségváltozású termék kerül kiválasztásra.

A következő ábra az i. termék esetében mutatja a periódusszám redukciót.

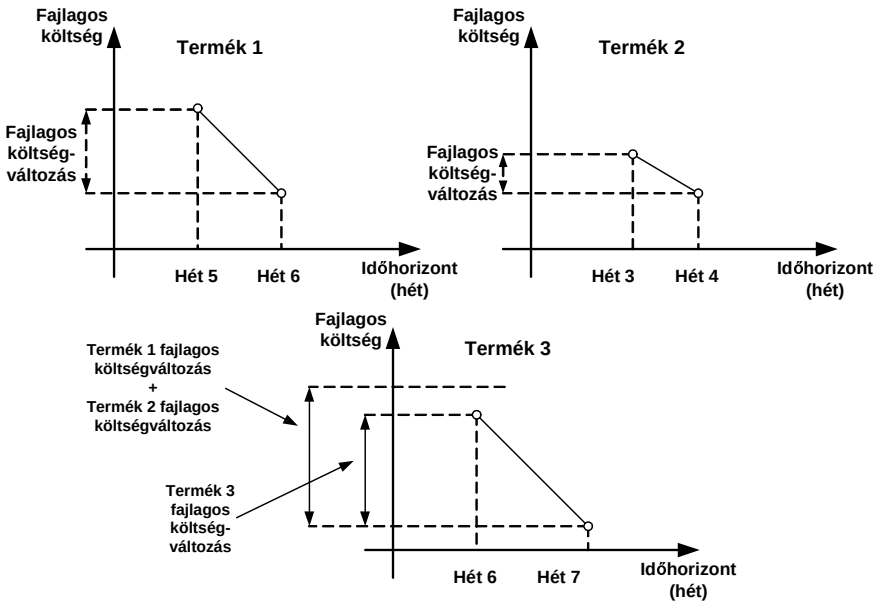


6.6. ábra. Együttgyártási periódusszám redukálás a megoldásvektor függvényében

Az algoritmus ezen részében a minimális fajlagos költségváltozású termék kiválasztása mellett a maximális fajlagos költségváltozású termék indexének meghatározása is szükséges, de csakis akkor, ha az előző iterációban összevonás történt. A maximális elem meghatározása az eljárás harmadik lépésének támpontja, amely megakadályozza, hogy hurkok alakuljanak ki az iterációk során (részletezés a későbbiekben). Az, hogy mit jelent az összevonás, az algoritmus következő lépésének bemutatásánál kerül tárgyalásra.

6.4.2.3. Összevonás kombináció kiválasztása egy lehetséges jobb megoldás érdekében

A minimális fajlagos költségváltozású termékek kiválasztása önmagában nem elég az optimális megoldás megtalálásához. Lehetnek olyan esetek is, amikor az iterációk során két kiválasztott termék fajlagos költségváltozásainak összege helyettesíthető egy harmadik termék fajlagos költségcsökkentésével egy jobb megoldás érdekében. A következő ábra három termék fajlagos költségváltozását és a helyettesítés lehetőségét ábrázolja.

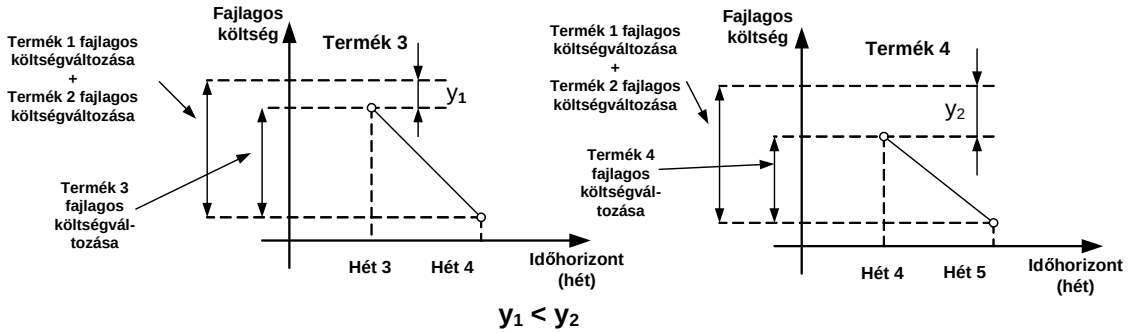


6.7. ábra. Fajlagos költségnövekedések összehasonlítása és helyettesítése

Az ábra értelmezése a következő: Feltesszük, hogy a számolt eredeti megoldás nem felel meg a kapacitáskorlát feltételének, ezért a módszer segítségével redukáljuk az együttgyártott periódusszámokat. A redukálás első lépése szerint minimális fajlagos költségű terméket választjuk ki. Legyen ez az első termék. Tegyük fel, hogy a 6 együtt gyártott hétről 5 együttgyártott hétre való csökkentés révén a kapott megoldás még mindig nem felel meg a kapacitáskorlát feltételének. Egy termék kiválasztása esetén nem beszélhetünk helyettesítésről, így az algoritmus tovább fut. Második lépésben ismét a minimális fajlagos költségű terméket választjuk ki. Legyen ez most a második termék. Nem biztos azonban, hogy a két kiválasztott termék periódusszámainak redukálásával nyert kapacitás megtakarítás már optimális megoldás. Ezért megvizsgáljuk, hogy a két termék együttgyártási periódusszámának redukálásából nyert fajlagos költségnövekedések összege nem-e helyettesíthető egy kisebb fajlagos költségváltozással. Az ábrán jól látszik, hogy jelen esetben a harmadik termék fajlagos költségváltozása kisebb, mint az első két termék fajlagos költségváltozásainak összege.

Ez azt eredményezi, hogy az első és második terméknél vett együttgyártási periódusszám csökkentések helyettesíthetők a 3. termék együttgyártási periódusainak 1-el való csökkentésével. A helyettesítést akkor is el kell végezni, ha a két termék együttgyártási periódusszámának redukálása már megfelelne a kapacitáskorlát feltételének. Ennek oka az, hogy a helyettesítés lehetősége miatt a helyettesítés elvégzésével biztosan jobb megoldás (alacsonyabb költségű) adódik a további iterációk során.

Vizsgáljuk meg azt az esetet is, amikor 4 darab termékünk van. A következő ábrán a 3. és 4. termék fajlagos költségváltozása látható együttgyártási periódusszámainak 1 héttel való csökkentése esetén.



6.8. ábra. A helyettesítés lépése háromnál több termék esetén

Háromnál több termék esetén felmerül a kérdés, hogy helyettesítés esetén melyik terméket válasszuk ki helyettesítésre, ha több is alkalmas lenne rá. Az ábrán látható, hogy a 3. és a 4. termék fajlagos költségváltozása is egyaránt kisebb, mint az első kettőnek az összege. Ebben az esetben azt a terméket kell kiválasztani, amelyik a legnagyobb távolságra esik a két termék fajlagos költségváltozásának összegétől. Ennek oka a következő: ha a helyettesítés elvégzése után kapott megoldás még mindig nem felel meg a kapacitáskorlátnak, akkor az algoritmus a következő lépésben ismét kiválasztja a legkisebb fajlagos költségváltozású elemet. Jelen példában ismét az első termék lesz. Tegyük fel, hogy ekkor megvan a megoldás. Ha a 4. terméket választottuk ki helyettesítésre, akkor az 1. és a 4. termék fajlagos költségváltozásának összege biztosan kisebb lesz, mintha a 3. termékét választottuk volna helyettesítésre.

A helyettesítés során felhasználjuk a 2. lépésben megtalált maximális fajlagos költségváltozással rendelkező elemet. Korábban megjegyeztük, hogy ezen elem megjegyzése csakis a start fázisban, és az összevonás fázisa után szükséges. Ennek oka az, hogy a maximális elem képezi azt a viszonyítási alapot a fajlagos költségváltozások vizsgálatában, amelyhez képest elemezzük az összevonás lehetőségét. A maximális fajlagos költségváltozású elem sohasem szerepelhet az összevonásban. A következő kis példa bemutatja miért fontos ezen elem kihagyása.

Példa: Alkalmazzuk az algoritmust 3 termékre. A megoldásvektor kezdetben ekkor: 000. Első lépésben az 1. termék kerül kiválasztásra. A megoldásvektor ekkor: 100. Tegyük fel, hogy ez még nem felel meg a kapacitáskorlát feltételének. Második lépésben a kiválasztott termék legyen a 2. A megoldásvektor ekkor: 110. Elvégezzük a helyettesítés műveletét úgy, hogy most jelen példában feltesszük, hogy az 1. és 2. termék fajlagos költségváltozásainak összege nagyobb, mint a 3. terméké. A megoldásvektor ekkor: 001 lesz. Tegyük fel, hogy még így sem elégül ki a kapacitáskorlát feltétele. A következő lépésben az algoritmus ismét az 1. terméket választja ki. A megoldásvektor ekkor: 101 lesz. A helyettesítés műveletében ha most az 1. és a 3. termék fajlagos költségváltozását adnánk össze, akkor ezt az összeget kellene összehasonlítani a 2. termékével, hiszen az nem változott. Az összeg egyértelműen nagyobb a 2. termék fajlagos költségváltozásánál, de ez a pont a megoldás szempontjából nem jó, mert hurkok alakulhatnak ki az algoritmus futásában (Ennél a példánál maradva: 000 - 100 - 110 - 001 - 101 - 010 - **110** - **001**...). Azért, hogy ezt elkerüljük, a helyettesítésnél a 3. terméket nem vesszük figyelembe, mert az ő fajlagos költségváltozása a legnagyobb az előző helyettesítés vagy az algoritmus indulásakor fennálló állapothoz képest (most a 3. terméknek a 0-hoz képest).

Ha az összevonás kombinációk ellenőrzése nem eredményez egyetlen egy helyettesítést sem, akkor az algoritmus a következő iterációba lép.

Abban az esetben, ha sikerül helyettesítést elvégezni, a következő iteráció és helyettesítési lépés előkészítése szükséges. Legelső lépés a megoldásvektor korrigálása, hiszen a helyettesítésre kiválasztott elemek helyén pozitív egész érték szerepel (pl. $L_1 = 2$, $L_2 = 1$ helyett $L_3 = 1, L_1 = 0, L_2 = 0$). A helyettesítésre kiválasztott elemekhez tartozó értéket nullára állítjuk. Így biztosítjuk, hogy a folyamatos iterációk során biztosan a fajlagos költségváltozási sorrend szerint haladjunk előre a megoldás keresésében.

A korrigáció után a következő iteráció következik elölről mindaddig, amíg a megoldás meg nem felel a kapacitáskorlát feltételének.

A gyakorlati estekben a megoldás megtalálása nem áll túl sok iterációs lépésből. Egy adott termék esetében az egyszeri gyártásindítással kielégíthető periódusok optimális száma általában maximálisan 7-8 periódus. A kiterjesztett újságárus modell több lépéses, de analitikus megoldásának futási gyorsasága jó alapot biztosít a több termékre vonatkozó globális kapacitáskorlát feltételét is kielégítő optimális mennyiségek meghatározására, hosszabb időhorizont esetén is. A heurisztikus algoritmus működésének hatékonyságát egy konkrét példán keresztül mutatom be az (A.7) függelékben. Az értekezés (A.6) melléklete tartalmazza a megoldó algoritmus általános programnyelvi kódját is.

7. fejezet

A büntető költség, mint kontroll paraméter

A készletezési politika kiterjesztése több logisztikai periódus vizsgálatára szükséges, de nem elégséges feltétele az optimális készletezési politika meghatározásának. A modell alkalmazása szerződésben rögzített kiszolgálási szintek mellett megköveteli a modell paraméter-értékeinek pontos megadását, mert a megoldás mindig csak a célfüggvény paramétereknek megfelelően lesz optimális.

A büntető költség paramétere különösen fontos szerepet kap a modellben, mert a partnerek közötti kooperációs érdekek ezen keresztül nyílvánulhatnak meg. Ebben a szemléletben a fajlagos büntető költség, mint „kontroll" paraméter alapjában befolyásolja a beszállítói politikát. A gyakorlatban a modell ezen paraméterének meghatározása nem triviális feladat. Ha egy adott termelési időhorizonton megadott mennyiségű hiány megengedett, akkor a beszállító előtt a döntés, hogy milyen „büntető paraméter" értéket kell alkalmazzon az optimális raktározási készletek meghatározása során, hogy a szerződésben vállalt kötelezettségek teljesüljenek. A modell többi paraméter-értékeinek meghatározása a vállalati adatbázis adatai alapján már kevésbé komplikált. A termelés fix (setup) költségeire, a gyártás változó költségeire, a tárolási és eszközlekötési költségekre a beszállítók elviekben tudnak megfelelő értékeket adni.

Az irodalomban, a hiányt megengedő periodikus modellek a problémát leginkább elméleti szempontból vizsgálják, mivel a célfüggvényben megjelenő büntető költség értékének megválasztására legtöbbször nincs utalás. Váncza és Egri publikációjukban [34] a modellben megjelenő „virtuális" büntetést egyedi megközelítésben kezelték. Hiányt meg nem engedve a büntetés értékét a mindig magas gyártásindítási költséggel modellezték, melyben új gyártásindítás akkor következik be, ha a megadott büntetés értékével számított megoldás már nem elégíti ki maradéktalanul a vásárlói igényeket.

A gyakorlati alkalmazhatóság feltétele azonban megkövetelheti a büntető költség értékének pontos meghatározását, a hosszú távú szerződés, a középtávú kockázatmegosztás elve és a rövidtávú hiánymentes kiszolgálás követelményeit figyelembevétele mellett. A büntető paraméter így egyfajta tömörített „kontroll" paraméter szerepet töltheti be a végtermékgyártó és a beszállító cég közötti együttműködésben.

A továbbiakban egy olyan eljárást mutatok be, amely a büntető költség értékének pontos meghatározását analitikus úton teszi lehetővé. A módszert a periodikus gyártás alapmodelljén (az időhorizont minden periódusában történik gyártás) keresztül vezetem be, majd kiterjesztem az alkalmazhatóságot több periódust magába foglaló gyártási időhorizontra.

7.1. Egy periódusos gyártás

A büntető költségnek, mint a készletezési politikát vezérlő paraméter értékének meghatározása érdekében induljunk ki a várható hiány nagyságából. Egy periódusos költségfüggvény esetén a várható hiányt a következő formula fejezi ki:

$$v = E[D - q]^+, \tag{7.1}$$

ahol v (mint pozitív egész szám, $v = 0, 1, 2, ..., D$) a várható hiány darabszáma, az egyenlet jobb oldala pedig a várható hiány összefüggése. Célunk a várható, azaz jelen esetben a megengedett hiány kontrollálása. Feltételezzük, hogy $v \geq 0$, tehát legalább 0 darab hiány keletkezik. Ennek megfelelően a $max()$ operátor elhagyható. Feltételezzük továbbá, hogy a beszállító optimális mennyiséget gyárt, így q értéke is ismert:

$$q^* = F^{-1}\left(\frac{p - c_v}{p + h}\right).$$

Helyettesítsük be az optimális q^* kifejezést a várható hiány összefüggésébe. Ekkor kapjuk, hogy:

$$v = E\left[D - F^{-1}\left(\frac{p - c_v}{p + h}\right)\right].$$

Feladatunk p paraméter értékének meghatározása, amelyet az egyenlet átrendezésével végezhetünk el:

$$p = \frac{-c_v - hF\left(E\left(D\right) - v\right)}{F\left(E\left(D\right) - v\right) - 1}. \tag{7.2}$$

Az így kapott formula a beszállítói költség paraméterek, az igény eloszlás és a megengedett hiány függvényében meghatározza a p értékét. A tervezésnél ezt az értéket kell használni. Vizsgáljuk meg az eredményt egy egyszerű mintafeladaton keresztül: Legyen $c_v = 5$ egység, $h = 2$ egység / periódus. A termékekre való igény egyenletes eloszlást követ, 10 db/hét és 20 db/hét intervallumban. Keressük azt a p paraméter értéket, ahol a $v = 1$, azaz 1 darab hiány keletkezik. Behelyettesítve az értékeket 7.2 összefüggésbe:

$$p = \frac{-5 - 2F\left(15 - 1\right)}{F\left(15 - 1\right) - 1} = \frac{-5 - 0,8}{0,4 - 1} = 9,666.$$

A meghatározott büntető paraméter értékének visszahelyettesítésével ellenőrizhetjük a kapott eredményt:

$$v = E\left[D - q^*\right]^+ = 15 - F^{-1}\left(\frac{9,666 - 5}{9,666 + 2}\right) = 15 - 14 = 1.$$

Az ellenőrzés tehát egyértelműen igazolja p értékének helyességét. A módszer értelmezése a következő: mivel a képletben az igények hosszú távú várható értékével számoltunk, így a megoldás is csak ugyanilyen hosszú távra értelmezhető. Ez pedig jelen példában azt jelenti, hogy ha minden

héten 14 darab árut gyárt a beszállító, akkor az igények várható értékének megfelelően, ahogy az idő tart a végtelenhez, a hiány gyakorisága úgy tart a $v = 1$ értékhez (ami az átlagos hiány gyakoriságát fejezi ki). Ez azt jelenti, hogy egy adott periódusban a ki nem elégített rendelések száma lehet 2 vagy akár 3 darab is, de hosszú időhorizontra nézve végeredményben az átlagérték tart az 1 darabhoz.

Abban az esetben, ha az időhorizont nagysága nem nagy (pl. 1 hét) és a hiány darabszáma szerződésben minimalizált, akkor a módszer ebben az értelmezésben nem alkalmazható. Ahhoz, hogy a megoldás rövid időhorizont esetében is használható legyen, az igények lehetséges maximális értékének alkalmazása szükséges a várható értékkel szemben. A korábban bemutatott példánál maradva az egyenletes eloszlás maximális értéke 20 db/hét, amelyet a 7.2 összefüggésbe visszahelyettesítve p értékére az alábbi eredményt kapjuk:

$$p = \frac{-5 - 2F(20-1)}{F(20-1) - 1} = \frac{-5 - 1,8}{0,9 - 1} = 68.$$

A meghatározott büntető paraméter értékének visszahelyettesítésével ismét ellenőrizzük a kapott eredményt:

$$q^* = F^{-1}\left(\frac{68-5}{70}\right) = 19.$$

A megoldás azt fejezi ki, hogy legyen az optimális gyártási mennyiség 1-el kevesebb, mint az igények lehetséges maximuma. Ez azt jelenti, hogy bármekkora is a beérkező rendelés, a hiány átlagos, és tényleges értéke maximálisan mindig csak $v = 1$ lehet. A módszer a korábbiakhoz hasonlóan nem függ az eloszlásfüggvény típusától, azonban érdemes néhány szót szólni a gyakorlatban előszeretettel alkalmazott normális eloszlás esetéről. Egyenletes eloszlás alkalmazása esetén elégséges volt az igények alsó és felső határának ismerete. Normális eloszlás esetén megjelenik egy másik paraméter is, a σ szórás. Ha a beszállítónak rendelkezésre állnak (közvetlenül a végtermékgyártótól, vagy piaci előrejelzések alapján) előrejelzés (forecast) információk, akkor a normális eloszlás haranggörbéjének csúcsát ezekre az értékre helyezzük. A σ paraméter az előrejelzések megbízhatóságát jellemzi. A normális eloszlás az egyenleteshez hasonlóan viselkedik. Ha az $E(D)$ helyére az igények hosszú távú várható értékét, azaz az előrejelzést írjuk, akkor a kiszámított p paraméter érték alkalmazásával kapott optimális készletmennyiség és a megengedett hiány csak ugyanilyen hosszú távon teljesül. Ezért ha a cél a rövidtávú, periódusonkénti hiányok betartása, akkor az egyenletes eloszlás esetén alkalmazott második módszer használható. A σ paraméter ismeretében a rendelések „maximális" értékei jó közelítéssel meghatározhatók. Ez lehet például az $E(D)+3\sigma$. Ezt a D mennyiséget az $E(D)$ helyére írva elérjük a kívánt célt. A továbbiakban egy egyszerű mintapéldán keresztül mutatom be a módszer alkalmazhatóságát. Legyen az igényelőrejelzés értéke 15 darab termék, valamint legyen $\sigma = 3$. A többi paraméter értéke megegyezik a korábbi példában alkalmazottakkal. $\sigma = 3$ jelen esetben azt jelenti, hogy az előrejelzéstől való 9 egység $\pm$ eltérésen belüli igények mennyisége 99.73%-os valószínűségű [114]. Keressük azt a p paraméter értéket, ahol a $v = 2$, azaz maximálisan 2 darab hiány keletkezik. Tehát:

$$p = \frac{-5 - 2F(24-2)}{F(24-2) - 1} = 711.17.$$

Az eredmény ellenőrzése:

$$q^* = F^{-1}\left(\frac{711.17-5}{711.17+2}\right) \approx 22.$$

Látható tehát, hogy ha 22 darab termék kerül legyártásra, akkor a maximális hiány értéke a beérkező maximális igény $(15 + 9 = 24)$ mellett csakis $v = 2$ lehet.

7.2. Több periódusos összevont gyártás

Abban az esetben, ha a kiterjesztett modell segítségével határozzuk meg a készletezési politikát, és alkalmazzuk az 5.1 -es fejezetben leírt összefüggéseket, a büntető paraméter számításának értelmezése hasonló az eddigiekhez. A kiindulási pont ismét a várható hiány összefüggése, amelybe visszahelyettesítjük az együttes gyártás optimumára kapott megoldást, majd egy további fontos kiegészítéssel megoldjuk p-re. n darab periódus együttes gyártásánál a büntető paraméter érték meghatározása pedig a két periódusos gyártásnál alkalmazott módszer alapján szintén elvégezhető.

Első lépés tehát az, hogy a $v_{12} = E\left[D_{12} - q_{12}\right]^+$ összefüggésbe a q_{12}-re behelyettesítjük a két periódusos együttes gyártás megoldását:

$$v_{12} = E\left[D_{12} - F_{12}^{-1}\left(\frac{p - c_v - hF_1(q_{12}^*)}{h+p}\right)\right]^+.$$

Itt v_{12} jelenti a két periódusban bekövetkezhető együttes hiány darabszámát. Az analitikus megoldhatóság érdekében q_{12}^* újra értelmezésére van szükség, amihez felhasználjuk a várható hiány már ismert formuláját. Ismerve az igény várható értékét, eloszlásfüggvényét és szórását, és a hiány megengedett mennyiségét (pl. $v \geq 0$), q_{12}^* értéke a következőképpen határozható meg:

$$v_{12} = E\left[D_{12} - q_{12}^*\right]^+ \longrightarrow q_{12}^* = E(D_{12}) - v_{12}.$$

Ekkor olyan összefüggéshez jutunk, melyből p már ismét kifejezhető a már bemutatott módon:

$$v_{12} = E\left[D_{12} - F_{12}^{-1}\left(\frac{p - c_v - hF_1(E(D_{12}) - v_{12})}{h+p}\right)\right]^+,$$

p-re kifejezve:

$$p = -\frac{F_{12}\left(E(D) - v_{12}\right)h + c_v + hF_1(E(D_{12}) - v_{12})}{F_{12}\left(E(D) - v_{12}\right) - 1}. \tag{7.3}$$

A következő mintapéldán keresztül ellenőrizzük a kapott összefüggés helyességét. Az egyszerűbb számítás érdekében tekintsük az előrejelzés értékét mind a két egymást követő periódus esetében 15 darab terméknek, valamint legyen az előrejelzés megbízhatósága $\sigma = 3$-al jellemezhető. A többi paraméter értéke megegyezik a korábbi példában alkalmazottakkal. $\sigma = 3$ jelen esetben azt jelenti, hogy az előrejelzéstől való 9 egység $\pm$ eltérésen belüli igények mennyisége 99.73%-os valószínűségű mind a két periódus esetén. A lehívások periódusonként érkeznek, gyártás azonban csak az első periódus elején egyszer történik. A különböző periódusokban a $\sigma = 3$ paraméterérték miatt a lehívás „maximális” értéke 99.73% valószínűséggel nem haladhatja meg a 24 darabot, ezért az összigény ugyanilyen valószínűséggel nem haladhatja meg a $24 + 24 = 48$ darabot. Keressük azt a p paraméter értéket, amely mellett a $v_{12} = 2$, azaz a megadott 99% konfidencia szinten átlagosan 2 darab hiány keletkezik a két periódus alatt összesen. Tehát:

$$p = -\frac{F_{12}\left(E(D_{12}) - v_{12}\right)h + c_v + hF_1(E(D_{12}) - v_{12})}{F_{12}\left(E(D_{12}) - v_{12}\right) - 1} = -\frac{0.9967 * 2 + 5 + 2}{0.9967 - 1} = 1825.49.$$

Ellenőrzés:

$$q_{12}^* = F_{12}^{-1}\left(\frac{1825.49 - 5 - 2}{1825.49 + 2}\right) \approx 46.$$

Az eredmény jól mutatja, hogy miszerint ha a beszállító két periódust együttesen gyártva 46 darab terméket gyárt, és az igény mindkét periódusban a konfidencia szintnek megfelelően „maximális" (összesen 48 darab), akkor a beszállítónak maximálisan pontosan $v_{12} = 2$ darab ki nem elégített rendelése lehet. A módszer az átlagos hiány esetére az igények várható értéke alapján számítható a korábbiakhoz hasonlóan.

A megoldás természetesen adaptálható n periódus együttes gyártásának esetére is. Az összefüggés ekkor a következőképpen módosul:

$$v_{123\ldots n} = E\left[D_{123\ldots n} - F_{123\ldots n}^{-1}\left(\frac{p - c_v - hF_1(q_{123\ldots n}^*) - hF_{12}(q_{123\ldots n}^*) - \ldots - hF_{123\ldots n-1}(q_{123\ldots n}^*)}{p+h}\right)\right]^+.$$

A megoldásban alkalmazzuk a már ismert összefüggést:

$$v_{123\ldots n} = E\left(D_{123\ldots n} - q_{123\ldots n}^*\right)^+ \longrightarrow q_{123\ldots n}^* = E(D_{123\ldots n}) - v_{123\ldots n}.$$

Az így kapott formulát p -re kifejezve megkapjuk a büntető paraméter értékét:

$$p = \\ = -\frac{c_v + hF_1(E(D_{123\ldots n}) - v_{123\ldots n}) + hF_{12}(E(D_{123\ldots n}) - v_{123\ldots n}) + \ldots + hF_{123\ldots n}(E(D_{123\ldots n}) - v_{123\ldots n})}{F_{123\ldots n}\left(E(D_{123\ldots n}) - v_{123\ldots n}\right) - 1}. \tag{7.4}$$

Az összefüggés paramétereit megfigyelve látható, hogy a büntető paraméter értékének meghatározásoz tisztában kell lenni a tervezési időhorizont hosszával. Dönteni kell arról is, hogy az átlagos hiányt, vagy a megengedhető maximális hiányt akarjuk limitálni. A gyakorlatban a beszállító sem az együtt gyártott ciklusok számát, sem pedig a büntető paraméter értékét nem ismeri. Az optimális politika meghatározása ekkor ciklikus folyamatként történik: Első lépésként a büntető paraméter értékét kell meghatározni 1,2,..., n periódusos egyszeri gyártásindítással kielégíthető időszakok esetére az adott időhorizontnak megfelelően. A kapott büntető paraméter értéke más és más együttgyártási periódusszám esetén más és más lehet. Ezután – a kapott büntető paraméter értékek segítségével – kiszámíthatók az egyszeri gyártásindítással kielégíthető időszakokhoz tartozó optimális készletezési mennyiségek. A kapott mennyiségek és a fajlagos költségmodell segítségével pedig az egyszeri gyártásindítással kielégíthető időszakok optimális darabszáma is meghatározható, amellyel előáll a minimális költségű, és a hiány feltételeket kielégítő készletezési politika.

A kiterjesztett modell büntető paraméter-értékének pontos hangolása elengedhetetlen lépés a megfelelő készletezési politika biztosításához. A bemutatott módszerek hatékony lehetőséget biztosítanak erre. Segítségükkel a paraméter értéke a beszállító illetve a kooperatív hálózat céljainak megfelelően meghatározható és a tervezésnél alkalmazható.

8. fejezet

Web alapú készlet-irányítási rendszer

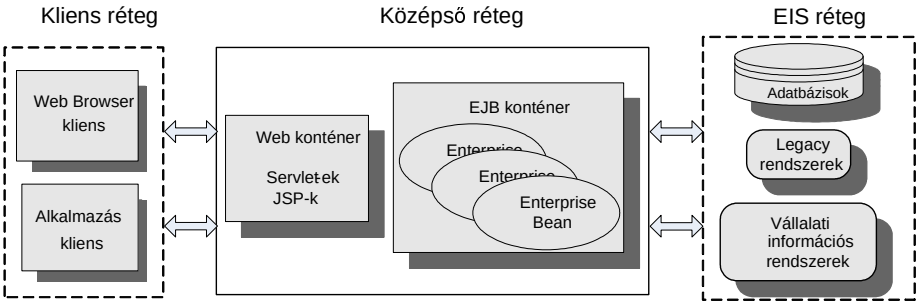
A kutatás során folyamatosan kialakult eredmények tesztelésére és szimulációjára egy modern eszközöket felhasználó prototípus alkalmazás kifejlesztését tűztem ki célul. A kifejlesztett rendszer elsődleges célja a kidolgozott eljárások működésének igazolása, valamint egy olyan környezet biztosítása amely hatékonyan, gyors szimulációkkal segíti a megfelelő készletgazdálkodási politika kialakítását.

Napjainkban egyre nagyobb az igény az elosztott erőforrásokat használó vállalati szintű szoftver alkalmazások fejlesztése iránt. Fontos követelmény a szerver oldali technikák rugalmasságának, sebességének, biztonságának és a rendelkezésre állási idejének növelése. A megvalósítás modern eszközeként az objektum orientált programozási módszertan és a komponens alapú technológia jelentkezik, amely lehetővé teszi, hogy az alkalmazási rendszert együttműködő entitásokkal modellezzük; a tervezés és az implementáció során ezeket az objektumokat megvalósító programegységeket alakítjuk ki részben új, részben előre elkészített komponensek jól definiált halmazából. Ezeknek a követelményeknek a Java 2 Platform, Enterprise Edition (J2EE) [71] technológia kifogástalanul eleget tesz, amely napjainkban kvázi-szabványként segíti a többrétegű, osztott, integrált vállalati szoftver alkalmazások tervezését és fejlesztését. A platform szabványosított, moduláris komponenseivel egyszerűsíti a vállalati alkalmazások felépítését, biztosítva a komponensek viselkedésének automatikus kezelését komplex programozás nélkül. A J2EE fontos szerepet tölt be a modern szoftverfejlesztésben, ezért esett a választásom erre a platformra.

Napjaink legismertebb J2EE implementációi [109] közül (pl. WebLogic Server (BEA), JBoss (Red Hat), WebSphere (IBM), JRun (Adobe), Oracle OC4J (Oracle Corporation), GlassFish (Sun)) az open-source JBoss-t [42] választottam kitűnő referenciái miatt. A kliens oldali felhasználói felület felépítéséhez az MVC (Modell–View–Controller) architektúrális tervezési paradigmát [74] követtem, amelynek megvalósításához a JSF szabványt, és az első open-source megvalósítását, az Apache MyFaces-t [2] találtam a legmegfelelőbbnek, amely J2EE környezetbe kitűnően integrálható. A szimulációs oldal bonyolultabb, dinamikus tartalmának generálása miatt a JSF mellett a JSP technika alkalmazása is szükségessé vált. A diagrammok valós idejű generálására a JFreeChart renderelő motorjára épülő Cewolf [22] volt a legalkalmasabb. A Web oldal elrendezését a Struts keretrendszer Tiles komponensének segítségével és a CSS (*Cascading Style Sheets*) stílusleíró nyelv felhasználásával készítettem. A valószínűségi eloszlások hatékony számításában a nyílt forráskódú COLT könyvtár [97] segített.

8.1. J2EE platform

A J2EE teljes körű bemutatása itt természetesen nem lehet célom, ezért a következő rész egy rövid lényegi áttekintést tartalmaz. Maga a J2EE platform egy többrétegű, elosztott alkalmazási modell. Az alkalmazás lényegi eljárásai (*business logic*) a funkcióknak megfelelően több különböző rétegbe kerülnek. Minden modern elosztott és integrált vállalati szoftver rendszer logikailag legalább három rétegre bontható: (1) kliens, (2) üzleti logika, és (3) adatbázis réteg. Elvileg mindegyik réteg megvalósítható azonos, és/vagy különböző szervereken (többszörözve is), ami nagyon rugalmas architektúrához vezet.



8.1. ábra. A J2EE támogatás a háromrétegű architektúrákhoz

A kliens réteg (client tier) az adatok reprezentálásáért (bevitel, megjelenítés, értelmezés) felelős. Magába foglalja mind a böngésző alapú, mind az önálló klienseket. A középső réteg (middle tier) azon komponensek és modulok támogatója, amelyek alkalmazásszintű szolgáltatásokat, számítási eljárásokat biztosítanak a kliens akciói számára. Ezeket a funkciókat az alkalmazás üzleti logikája határozza meg. A vállalati információs rendszer (Enterprise Information System – EIS) réteg a vállalati információs rendszerek kezelője. Magába foglalja az integrált vállalatirányítási rendszereket is, mint például az ERP rendszer, más egyedi tranzakció feldolgozó rendszerek, relációs vagy objektum orientált adatbázis kezelő rendszerek, és egyéb „örökölt” (legacy) információs rendszerek. A rétegek funkcionális dekompozíciója lehetővé és egyben szükségessé is teszi a rétegek szerinti természetes elkülönítést a szoftver alkalmazásokban [71]. A J2EE keretrendszer az elosztott alkalmazások fejlesztését tranzakció menedzsment, biztonsági ellenőrzések, állapot – és erőforrás menedzsment alapvető szolgáltatások biztosításával támogatja. Az alkalmazásszerver az a komponens, amely a J2EE keretrendszer aktuális megvalósításáról gondoskodik.

8.2. Modern grafikus felhasználói felület

A grafikus felhasználói felület (Graphics User Interface – GUI) elengedhetetlenül fontos szerepet tölt be a modern szoftver alkalmazások világában. Már az első informatikai alkalmazásoknál felmerült az igény egy olyan komponens kifejlesztése iránt, amely segítséget nyújt az ember-gép kommunikációban, egyszerűsíti annak folyamatát. Manapság az informatika rohamos fejlődése már megköveteli a modern, logikusan áttekinthető, vizuális felhasználói felületeket, melyek megvalósításához, a dinamikus tartalom elkészítéséhez kész keretrendszereket kínál fel. Az ember

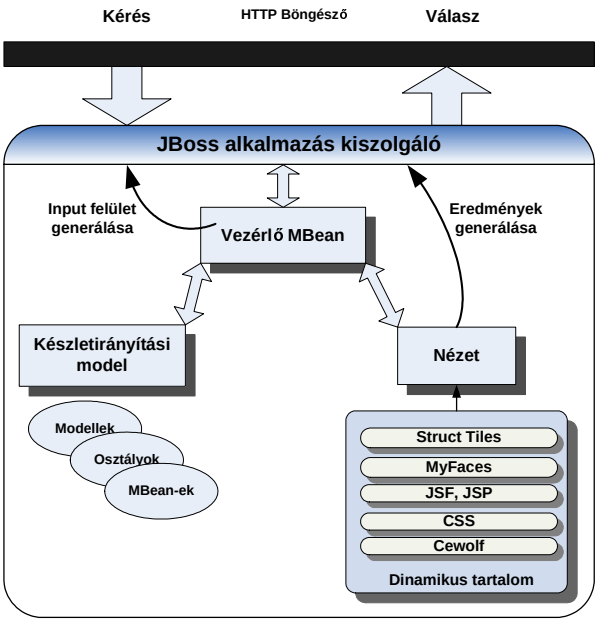
gép közötti kétirányú kommunikáció alapvetően két különböző megközelítésű technikával történhet: ezek az u. n. „vastag kliens”, és „vékony kliens” technikák. A hagyományosabb vastag kliens magába foglalja a megjelenítési módszert is, a szoftver szerves része a megjelenítést végző komponens. Java alapú alkalmazások grafikus felületeinek fejlesztésében az AWT (Abstract Windowing Toolkit), SWING és a JFC (JavaTM Foundation Classes) kínál ilyen lehetőségeket, melyek a Java technológia szerves részét alkotják. Az ember gép interakció másik formája a Web alapú interakció, mely az internet rohamos fejlődésével fokozatosan alakult ki az elmúlt évtizedben. Ekkor a felhasználó a böngészőprogram segítségével vezérli a szerver oldali alkalmazást. Nagy előnye, hogy a vezérelendő alkalmazás nem igényli a kliens gépre való telepítést, és tetszőleges számú kliens egyszerre párhuzamosan is képes használni azt. A párhuzamosítást ez esetben nem az alkalmazás végzi, hanem a futtató környezet maga. A megközelítés hátránya az, hogy bonyolult vizuális elemeket, kapcsolókat, dinamikus tartalmat nehezebb megvalósítani.

Értekezésemben a továbbiakban erre a Web-Java alapú technológiára koncentrálok. Az évek során számos, a Web-es alkalmazások fejlesztését segítő open-source alkalmazás keretrendszer fejlődött ki, melyek tipikus funkciói közé tartozik az adatbázis elérés, sablonok kezelése és a session menedzsment. A fontosabbak közül megemlíthető: Apache Struts, Apache Cocoon, AppFuse, Spring Framework, Google Web Toolkit, Apache MyFaces, Ajax, Tiles, JavaServer Faces (JSF), stb [109]. A dinamikus tartalom megvalósításában nagy segítséget nyújt a JavaServer Pages (JSP).

8.3. A „Modell – Nézet – Vezérlő” tervezési minta és a készlet-irányítási rendszer

A készlet-irányítási alkalmazás tervezésekor a napjainkban egyre szélesebb körben alkalmazott MVC (Modell–View–Controller) paradigmát követtem, és a vékony kliens jellegű kliens-szerver architektúrát választottam. Célom egy jól áttekinthető, rugalmas alkalmazási rendszermodell kidolgozása volt. Az MVC tervezési minta segítségével logikailag csoportosíthatjuk a tervezett szoftver alkalmazás kódját, elősegítve az újrahasznosítást, a karbantarthatóságot, és általában véve is egy áttekinthetőbb, strukturáltabb, jobb kód létrehozását. Az MVC paradigma egy módszer arra, hogyan osszunk egy alkalmazást, vagy akár egy alkalmazás egy részét három részre: a Modellre, a Nézetre és a Vezérlőre. Eredetileg arra tervezték, hogy a hagyományos „Input”, „Feldolgozás” és „Output” felépítésű feladatokat leképezzék a grafikus interfésszel rendelkező alkalmazásokban. Az MVC elvei alapján felépített rendszer esetén a rendszert alkotó osztályokat három csoportba sorolhatjuk. A modell részben szereplők felelősek az üzleti logikáért, a nézet részben lévők feladata a megjelenítés, végül a vezérlő részben lévők a program menetének lefolyását szabályozzák. A tervezési mintát részletesen összefoglalja a [74] publikáció.

A készlet-irányítási rendszer MVC modellje a következő ábrán látható.



8.2. ábra. Vékony kliens modell

Az alkalmazás szerver oldali része folyamatosan várja és fogadja a felhasználói kéréseket. A kérések fogadását egy alkalmazás szerver végzi, amely tovább értelmezi azokat. A kérés típusától függően feldolgozza, majd generálja az adott klienshez tartozó dinamikus választ. A dinamikus válasz végül egy tetszőleges böngésző segítségével értelmezhető HTML lap formájában jut el a kliens gépére. A szoftver alkalmazás kiszolgáló technológiájaként a JBoss alkalmazás szerverre esett választásom. Ennek oka a JBoss rendkívüli rugalmassága és megbízhatósága. A rendszerben a vezérlő szerepét egy saját készítésű, a J2EE-ben ismert MBean (Managed Bean) [71] képviseli. A HTTP protokollon keresztül a JBoss kiszolgálóhoz érkező kéréseket fogadja, átalakítja és továbbítja a modell komponens felé. A modell komponens több sub-komponensből áll, a készletezési modell egészét alkotó részmodelleknek megfelelően. Ezek osztályokat, struktúrákat és további MBean-eket jelentenek. A modell által feldolgozott adatok a vezérlő osztályon keresztül a nézet részbe továbbítódnak, ahol megtörténik a dinamikus tartalom generálása a már bemutatott módon. Az elkészült válaszlap(ok) ismét a vezérlőn keresztül jut(nak) el a kliens gép(ek)re.

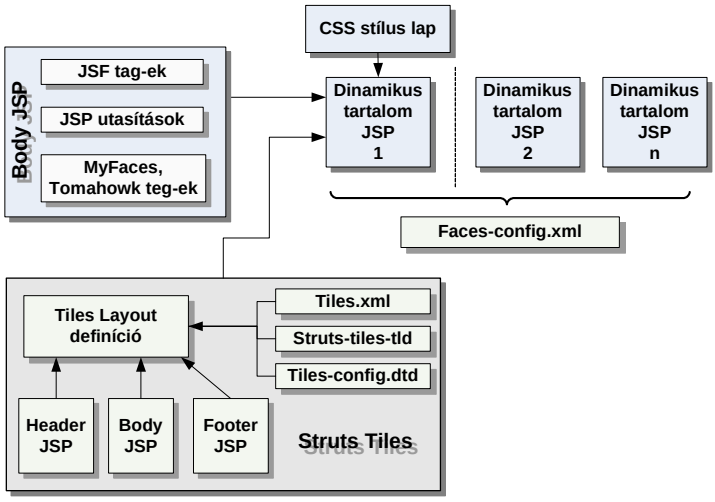
8.3.1. Általános válaszlap felépítése

A válaszlapok létrehozásánál célom egy egységes koncepció, egy általános felépítésű „sablon oldal” (layout) kidolgozása volt a Structs Tiles segítségével. Minden válaszlap egységes sémából indul ki, örökölve a szülő sablon tulajdonságait. Az így létrehozott sablon definíciója három fő részből tevődik össze: (1) fejléc (Header JSP), (2) test (Body JSP) és (3) lábléc (Footer JSP). A válaszlapok fejléce és lábléce jelen alkalmazásban a járulékos információk tartalmazása miatt minden oldal esetében azonos. A definíció lehetőséget nyújt akár az eltérő tartalom generálására is. A sablon definíciójában a test-rész jelen alkalmazásban csak egy üres keretet, egy virtuális

testet jelöl, ahová a dinamikus tartalomnak megfelelő információk kerülnek majd be a későbbiek folyamán. A továbbiak során csak az alkalmazás szempontjából kiemelkedően fontos definíciós leíró fájlokat mutatom be. Az általános sablon definícióját a Struts keretrendszerhez tartozó Tiles.xml, Structs-tiles.tld, Tiles-config.dtd file-ok segítségével valósítottam meg. A sablon definiálásának leírásából egy rövid részlet a Tiles.xml-ből:

```
<tiles-definitions>
    <definition name="layout.ICweb" path="/layout/template.jsp" >
        <put name="header" value="/layout/header.jsp" />
        <put name="footer" value="/layout/footer.jsp" />
    </definition>
<definition name="/main.tiles" extends="layout.ICweb" >
        <put name="body" value="/main.jsp" />
</definition>
```

A rövid részletben megfigyelhető a sablon layout definíciója (layout.ICweb). A kész sablon oldal a template.jsp nevű file lesz, ahol a fejléc (header.jsp) és a lábléc (footer.jsp) mindig rögzített tartalmú. Ezt fejezi ki az első definíciós rész. Látható, hogy a sablon definícióból hiányzik a test rész. Ennek oka a dinamikus beépülő tartalom. A sablon definíció után a konkrét dinamikus tartalmat meghatározó oldalak megadása szükséges. A kiragadott kódrészlet éppen a fő oldal definícióját mutatja be, miszerint az oldal felépítése a korábban definiált „layout.ICweb” stílusból öröklődik. Mivel a template.jsp-nél már meghatározott a fejléc és a lábléc, ezért csak a test részének definíciója szükséges (main.jsp). A rendszer további lapjai a főoldalhoz hasonló sémát követve generálódnak. A következő ábra a válaszlapok generálásának legfontosabb lépéseit mutatja be:



8.3. ábra. A dinamikus válaszlap generálás lépései

Az általános válaszlap séma felépítése után egy tényleges válasz a lap test részének specifikálásával valósul meg. A dinamikus tartalom megjelenítéséért ez a rész a felelős. A kód JSF, JSP, MyFaces és Tomahawk utasítások sorozatából építi fel a grafikus felhasználói felületet.

A lapok 3 alapvető logikai részre bonthatók.

1. Tag könyvtár definíció: meghatározza a lap által alkalmazni kívánt „teg” könyvtárakat. Részlet az alkalmazás egy oldalának test részéből:

```
<%@ taglib uri="http://java.sun.com/jsf/html" prefix="h"%>
<%@ taglib uri="http://myfaces.apache.org/tomahawk" prefix="t"%>
<%@ taglib uri="http://java.sun.com/jsf/core" prefix="f"%>
```

2. Dinamikus tartalom: Az oldal ezen része a dinamikus struktúrájú grafikus felhasználói felület elemeinek megjelenítésért felelős. A modern eszközök alkalmazása lehetővé tette, hogy az alkalmazáslogika bizonyos kisebb részeit itt lehessen megvalósítani, beleértve a dinamikus nyelvváltást is.

3. „Action” esemény: Navigáció a lapok között, jelzés az alkalmazás vezérlő moduljának további feladatok végrehajtására.

A különböző logikai egységek együttesen alkotják a kész oldalt. A már dinamikus tartalommal rendelkező lapok a CSS stíluslapok alkalmazásával nyerik el végleges formájukat. A stíluslap tartalmazza mindazokat a megjelenítési struktúrákat és paramétereket, amelyeket a grafikus felhasználói felület tervezési szabályai előírnak.

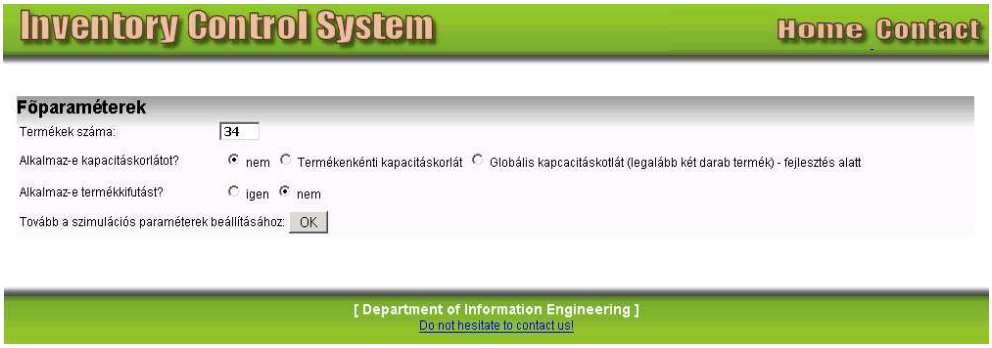
Az alkalmazás összetartozó oldalait és azok egymás közötti kapcsolatait a szerveren belüli faces-config.xml, MyFaces konfigurációs állomány írja le. A következő rövid részlet világosan mutatja az oldalak kapcsolatának definícióját:

```
<navigation-rule>
    <from-view-id>/mainParameterPage.jsp</from-view-id>
        <navigation-case>
            <from-outcome>
                nextToGlobalSimulationParameterInit
            </from-outcome>
            <to-view-id>/globalParameterPage.jsp</to-view-id>
        </navigation-case>
</navigation-rule>
```

A navigációs szabály egyértelműen definiálja azt, hogy az adott oldalról mely további oldalakra lehet tovább lépni. Minden navigációhoz egy egyedi azonosító is tartozik. A kidolgozott prototípus alkalmazás hat darab ilyen oldalt foglal magába.

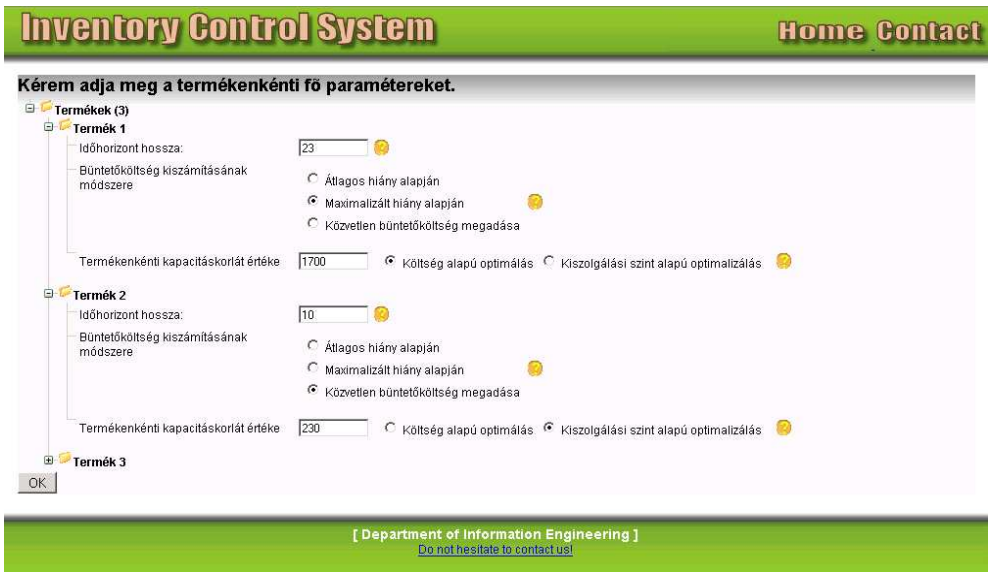
8.4. Az alkalmazás bemutatása

A prototípus alkalmazás a http://alpha.iit.uni-miskolc.hu/ICWeb/ címen online úton érhető el. A rendszer oldalainak tervezésekor célom egy logikus, áttekinthető felület megvalósítása volt, amely a készletezési politika kialakítását megfelelő módon segíti. A következőkben egy példa szimuláción keresztül mutatom be a szoftvert. Új szimulációt kezdeményezve az alábbi oldal tárul elénk:



8.4. ábra. A készletezési politika fő paraméterek beállítása

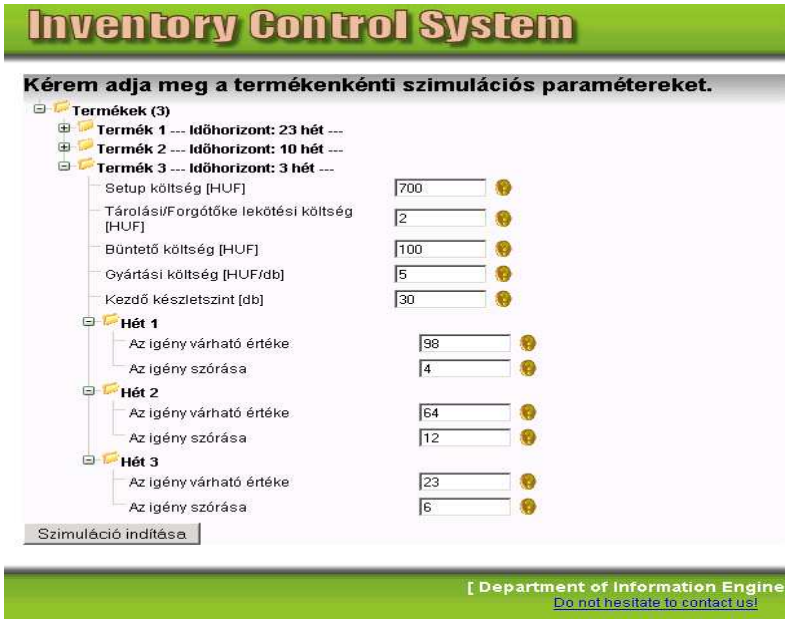
A szimuláció indításának első lépése az azt meghatározó, legfontosabb paraméterek beállítása. A rendszer ezen értékek alapján készíti fel a készletezési modellt és generálja a további grafikus felületeket. Az első megadandó paraméter a termékek darabszáma. Az alkalmazás elméletileg tetszőleges termékszámú modellt képes kezelni, de a gyakorlatban ez mindig az alkalmazást futtató számítógép memóriának méretétől függ. A szerveren megtekinthető alkalmazás a beépített korlátozások miatt jelenleg 99 darab termék együttes szimulációját képes kezelni. További paraméterként a termelő kapacitáskorlátok alkalmazásáról dönthetünk. A választható opciók megfelelnek a 6. fejezetben leírtaknak. Az utolsó paraméter a termékkifutás modellezését támogatja a szimulációban. A paramétereket megfelelően beállítva és tovább haladva, további fontos input-paraméterek megadása szükséges a következőképpen:



8.5. ábra. A szimulációhoz szükséges további paraméterek

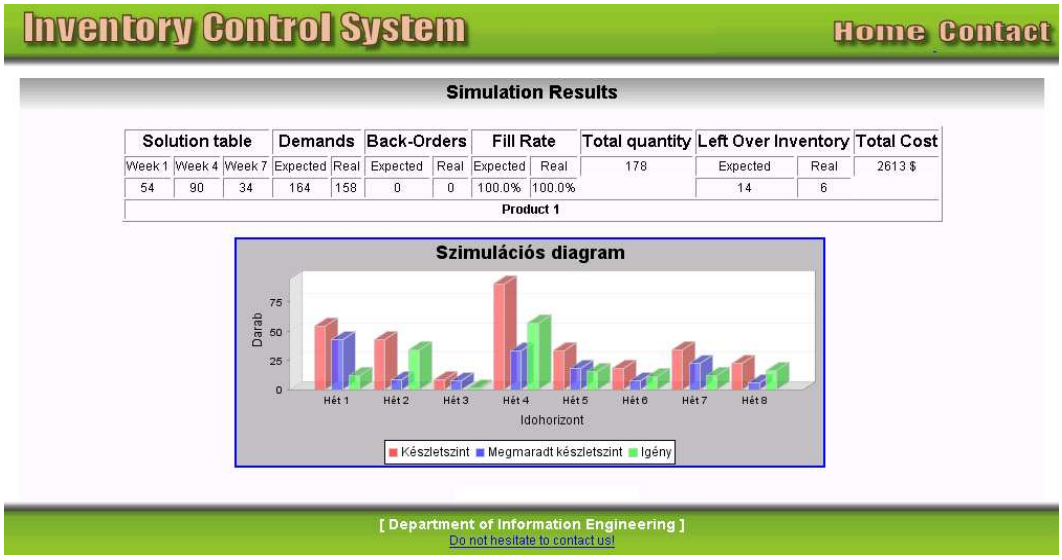
Az alkalmazás egyik kihívása az összetartozó adatok átlátható megjelenítése volt. Megjelenítési módszerként így a nyitható és zárható többszintű fa struktúra mellett döntöttem. A fában így az egyes termékekhez tartozó további paraméterek jól elkülönülnek. Az ábrán látható, hogy három termék szimulációját szeretnénk elvégezni. A legfontosabb paraméter az „Időhorizont hossza”. Az időhorizont egésze fix periódusokból tevődik össze, megadása jelen modellben

hetekben értelmezett. További paraméterként a büntető költség lehetséges alkalmazási módjai állíthatók be. Az itt választható opciók megfelelnek a 7. fejezetben tárgyaltakkal. Ha korábbi felületen a termékenkénti kapacitáskorlátot választottuk, akkor az utolsó megadandó paraméter a kapacitáskorlát értéke és az alkalmazott modell típusa. Értelmezésük megegyezik a 6. fejezetben vázoltakkal. Tovább haladva a fő paramétereknek megfelelő készletezési modell szintjére érkezünk, ahol már a modell paraméterek megadása szükséges a szimuláció elvégzése előtt.



8.6. ábra. A szükséges modell paraméterek megadása

A grafikus felhasználói felületen a már megszokott modell paraméterek tűnnek fel. Számuk a korábban választott opcióknak és a beállított paraméter értékeknek megfelelően változhat. A rendszer fel van készítve tetszőleges eloszlás kezelésére is, de a megvalósítás jelen szintjén a normális eloszlás használható a grafikus felület segítségével. A „Szimuláció indítása” gomb segítségével a rendszer elvégzi a megadott szimulációkat, és meghatározza a paramétereknek megfelelő optimális készletezési politikát az időhorizont egészére tekintve. Az eredmények táblázatos és diagramm formában jelennek meg a 42. ábrához hasonlóan.



Solution table			Demands		Back-Orders		Fill Rate		Total quantity	Left Over Inventory		Total Cost
Week 1	Week 4	Week 7	Expected	Real	Expected	Real	Expected	Real	178	Expected	Real	2613 $
54	90	34	164	158	0	0	100.0%	100.0%		14	6	
Product 1												

8.7. ábra. A példa szimuláció eredménye

Minden szimuláció eredményéhez egységesen egy táblázat és egy diagram tartozik. A táblázatban a készletezési politika legfontosabb paraméterei, mértékei találhatók hét részre bontva. Az első rész a megoldási tábla, amelyben csak azok a hetek jelennek meg (a hozzájuk tartozó szükséges gyártási készletezési mennyiségekkel), amikor gyártásindítás szükséges. A második részben a várható és a ténylegesen bekövetkezett igények (lehívások) összege jelenik meg. A táblázat harmadik részében a várható és a ténylegesen bekövetkezett hiány mennyisége található. A negyedik rész a várható és a tényleges kielégítési rátát mutatja százalékos formában kifejezve. Ezután a teljes időhorizontra értelmezett készletezési mennyiségek láthatók. A hatodik eleme a táblázatnak a raktáron megmaradt termékek várható és tényleges darabszámát jelöli. Az utolsó rész pedig a készletezési politika teljes költségét mutatja. A táblázatban megjelenő adatok alapján a készletezési politika jósága egyértelműen eldönthető és/vagy összehasonlítható más politikákkal, döntési változatokkal. Az alkalmazás, a szimuláció táblázatban összefoglalt eredményeit diagram formában is megjeleníti, amely vizuálisan is hozzájárul a készletezési politika további értékeléséhez. Egy megfelelőnek ítélt alternatívát „érvényes terv”-nek lehet minősíteni, amely a kijelölt időhorizontra a beszállító készletezési és gyártásindítási tervét reprezentálja.

9. fejezet

Új tudományos eredmények

1. tézis: Új, kiterjesztett „újságárus” típusú készletezés-irányítási modell a rugalmas tömeggyártás kooperatív beszállítási feladatainak támogatására.

Az igény szerinti tömeggyártás kooperatív beszállítói rendszerének követelményeiből kiindulva kidolgoztam egy új, a gyártás-indítási (setup) költséggel bővített klasszikus „újságárus” feladatra épülő, kiterjesztett költségfüggvényű, több rendelési periódus együttes kezelésére alkalmas, sztochasztikus készletgazdálkodási modellt.

A modellt a következők jellemzik:

- A klasszikus modellt bővítve egy új költségfüggvényben fogalmaztam meg a beszállító költségét tetszőleges, véges hosszúságú gyártási időhorizonton.

$$K_{123\ldots n}(q_{123\ldots n}) = c_f + c_v(q_{123\ldots n} - I) + hE\left[q_{123\ldots n} - D_1\right]^+ + hE\left[q_{123\ldots n} - D_1 - D_2\right]^+ + \ldots +$$
$$+hE\left[q_{123\ldots n} - D_1 - D_2 - \ldots - D_n\right]^+ + pE\left[D_1 - q_{123\ldots n}\right]^+ + pE\left[(D_1 + D_2) - q_{123\ldots n}\right]^+ + \ldots +$$
$$+pE\left[(D_1 + D_2 + \ldots + D_{n-1}) - q_{123\ldots n}\right]^+ + pE\left[D_n + \left[\ldots + \left[D_2 + \left[D_1 - q_{123\ldots n}\right]^-\right]^-\right]^-\right]^+.$$

- Az új modell segítségével analitikus módszerekkel meghatározható (a) a beszállítói bizonytalansággal terhelt, (b) a végszerelői igényt kielégítő, (c) tetszőleges, véges hosszúságú gyártási időhorizontot figyelembe vevő (d) költség-optimális készletezési politika zárt alakban.

- A készletpolitikát jellemző raktározási és indítandó gyártási mennyiség számítása a végszerelő gyártási igény valószínűség-eloszlás típusától független.

$$F_{123\ldots n}(q^*_{123\ldots n}) = \frac{p - c_v - hF_1(q^*_{123\ldots n}) - hF_{12}(q^*_{123\ldots n}) - \ldots - hF_{123\ldots n-1}(q^*_{123\ldots n})}{p + h}.$$

- Az új, kiterjesztett készletgazdálkodási modell lehetővé teszi a túl kevés vagy túl sok komponens legyártásával keletkező járulékos beszállítói költségek minimalizálását. A büntető paraméter megfelelő megválasztásával a beszállítói felelősség kockázati szintje is tetszőlegesen állítható.

- Rámutattam arra, hogy az (s, S) típusú modelleknél ismert kritikus raktárkészlet fogalma (az a készletszint, amikor a gyártásindítás és a nem indítás költségei megegyeznek) a kiterjesztett modell esetén is bevezethető.

- A modell helyes működésének igazolására megterveztem és megvalósítottam egy Web alapú, J2EE technológiára épülő prototípus készlet-irányítási rendszert.

2. tézis: A beszállító optimális gyártási ciklusainak meghatározása egy fajlagos költségmodell segítségével, figyelembe véve a kooperatív partnerek együttműködésében „kontroll" paraméterként megjelenő, „büntető költség" finom hangolásának igényét.

Az első tézis eredményei alapján felismertem, hogy a kiterjesztett újságárus probléma fajlagos költségmodell fogalmának bevezetése kulcsfontosságú az egyszeri gyártásindítással kielégíthető időszakok optimális darabszámának meghatározásában. Egy heurisztikus módszert dolgoztam ki az optimum meghatározására.

- Igazoltam, hogy az egyszeri gyártásindítással kielégíthető periódusok optimális darabszáma mindig a minimális fajlagos költséggel rendelkező együttgyártási periódusszámmal nyert megoldás lesz.

- A kiterjesztett készletezés-irányítási modell az optimális együttgyártási ciklusok pontos meghatározásával kilép a hagyományos (t, S) periodikus modellek családjából, mert t „ellenőrzési" periódus hossza változó igények és feltételek mellett változni fog.

Rámutattam arra, hogy a kiterjesztett modell büntető költsége a partnerek közötti kooperatív kapcsolati viszonyban „kontroll" paraméterként értelmezhető, és alkalmas eszköz a megfelelő kiszolgálási szint biztosításában. Analitikus összefüggést dolgoztam ki értékének pontos meghatározására a megengedett hiány függvényében.

- A kiterjesztett újságárus modellben szereplő „büntető költség" paraméter értéke a megengedett hiány függvényében analitikus összefüggéssel visszaszámítható.

$$p = -\frac{c_v + hF_1\left(E(D_{123\ldots n}) - v_{123\ldots n}\right) + \ldots + hF_{123\ldots n}(E(D_{123\ldots n}) - v_{123\ldots n})}{F_{123\ldots n}\left(E(D_{123\ldots n}) - v_{123\ldots n}\right) - 1}.$$

- Az összefüggés sztochasztikus tulajdonsága miatt a megoldás további két értelmezése áll elő: (1) $v_{123\ldots n}$ a rendelési periódusokban bekövetkezhető hiány átlagos értéke, (2) $v_{123\ldots n}$ a rendelési periódusokban bekövetkezhető hiány maximális értéke.

- Igazoltam, hogy a tervezett kiszolgálási szint a büntető költség értékének, és az egyszeri gyártásindítással kielégíthető időszakok optimális számának ismerete nélkül is biztosítható úgy, hogy a kapott megoldás minimális fajlagos költséggel bír.

3. tézis: Eljárás a termékkifutás részmodelljének meghatározására a többé újra fel nem használható készletek („dög") miatt keletkező költségnövekedések ellen.

Az 1. és 2. tézis eredményeire támaszkodva kidolgoztam egy olyan matematikai modellt, mely a tömeggyártás bizonytalan piaci környezetének hatására jelentkező termékkifutási probléma kezelésére tesz javaslatot.

A modellt az alábbiak jellemzik:

- A 1. tézisben bemutatott kiterjesztett készletezés-irányítási modellt új költségfüggvény taggal egészítettem ki, amely segítségével a termékkifutás kockázati tényezője Poisson típusú eloszlásfüggvényt alkalmazva modellezhető.

$$K_n^1(q_{123\ldots n}) =$$
$$c_f + c_v\left(q_{123\ldots n} - I\right) + h\sum_{i=1}^{n}(1-dR(i,\lambda))E\left[q_{123\ldots n} - D_i^1\right]^+ + p\sum_{i=1}^{n-1}(1-dR(i,\lambda))E\left[D_i^1 - q_{123\ldots n}\right]^+$$
$$+ p(1-dR(n,\lambda))E\left[D_n + \left[\ldots + \left[D_2 + \left[D_1 - q_{123\ldots n}\right]^-\right]^-\right]^-\right]^+ + \sum_{i=1}^{n}(dR(i,\lambda))E\left[q_{123\ldots n} - D_i^1\right]^+ .$$

A modellben $K_n^1(q_{123\ldots n})$ jelenti a termékkifutással kiegészített költségfüggvényt n darab rendelési periódus esetén, ahol $dR(i,\lambda)$ tényező kifejezi az adott termék kifutásának időben növekvő kockázati tényezőjét.

- Az analitikus megoldás jól illeszkedik a korábbi eredményekhez: a célfüggvény kiegészítése az első tézisben ismertetett eloszlásfüggvény függetlenséget nem befolyásolja:

$$F_n^1(q^*_{123\ldots n}) = \frac{p - c_v - \left(\sum_{i=1}^{n-1} F_i^1(q^*_{123\ldots n})\right)(h + pdR(n,\lambda))}{p + h + dR(n,\lambda)(1-h-p)} +$$
$$+ \frac{\left(\sum_{i=1}^{n-1} dR(i,\lambda)F_i^1(q^*_{123\ldots n})\right)(h+p-1) - p\left(\sum_{i=1}^{n-1} dR(i,\lambda) - dR(n,\lambda)\right)}{p + h + dR(n,\lambda)(1-h-p)} .$$

- Az új részmodell segítségével, a bizonytalanság függvényében egy hatékonyabb beszállítói készletezési politika alakítható ki. A definiált paraméterekkel a politika jól hangolható.

4. tézis: Heurisztikus módszer és megoldási javaslat a beszállítónál jelentkező globális kapacitáskorlát hatásának megoldására a készletezési politikában, több termék és tetszőleges hosszú, véges időhorizont esetén.

A modellbeli kiterjesztések és bővítések eredményeire alapozva kidolgoztam a kiterjesztett újságárus probléma termelői kapacitáskorlát feltételt figyelembe vevő modelljeit. A gyakorlatban

leginkább előforduló (n darab termék, tetszőleges hosszú véges időhorizont) esetre egy több lépésből álló, a termékek kapacitásigényét figyelembe vevő heurisztikus módszert fejlesztettem ki, amely biztosítja a minimális költségű, kiszolgálási szint alapú készletezési politikát.

A modellek jellemzői:

- A periodikus modellek esetén felmerülő kapacitásproblémák megoldása két szemléleti mód alapján fogalmazható meg. A *kiszolgálási szint alapú politika* esetén a vállalat stratégiai céljainak leginkább megfelelő kiszolgálási szint biztosítása a cél. *Költség alapú politika* esetén a minimális költségű készletezési megoldás a legfontosabb cél.

- A kiszolgálási szint alapú politika az egyszeri gyártásindítással kielégíthető időszakok számának redukálásával nyújt megoldást a kapacitásproblémára.

- Költség alapú politika esetén a ki nem elégített rendelések büntetésének vállalása, vagy az egyszeri gyártásindítással kielégíthető időszakok számának csökkentése választható alternatívák közül, a kisebb költségű a kedvezőbb megoldás.

- Több termék és több rendelési időszak esetén a *kiszolgálási szint alapú* politika kapacitáskorlátnak is megfelelő optimális megoldása olyan politika, ahol az egyszeri gyártásindítással kielégíthető időszakok redukálásából nyert fajlagos költségváltozások összege minimális. A módszer alapján kidolgozott heurisztikus algoritmus három fő logikai lépéssel modellezhető: (1) Kapacitáskorlát feltétel nélküli optimális megoldások számítása. Kapacitáskorlát feltétel ellenőrzése. (2) Optimum esélyes módosítás kiválasztása. (3) Összevonási kombináció kiválasztása egy lehetséges jobb megoldás érdekében.

- A kidolgozott heurisztikus megoldó algoritmus a termékenként értelmezett kapacitáshasználtsági faktorral lehetővé teszi a termékek közötti prioritások kezelését.

10. fejezet

Eredmények hasznosítása

Az összefoglalt tudományos eredmények a Miskolci Egyetem Alkalmazott Informatikai Tanszékén folytatott kutatásokhoz kapcsolódnak. A kutatómunka eredménye hozzájárul az MTA-SZTAKI által vezetett *„VITAL" Valósidejű, kooperatív vállalatok* (NKTH 2/010/2004) kutatási projekthez, amelynek keretében a General Electric (GE) magyarországi leányvállalatai, beszállítói, a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem (BME) és a Miskolci Egyetem (ME) kutatócsoportjai a kooperatív beszállítói láncok azon tervezési, készletgazdálkodási és logisztikai problémáival foglalkoznak, amely a hálózati kooperáció előfeltétele. Az értekezés a tanszéken végzett kutatómunka során született, és elkészítésének fő célja (a doktoranduszi munka mellett) a nagyméretű, komplex alapkutatási feladat támogatása volt.

Az értekezésben összefoglalt eredmények a kooperatív beszállítói láncban jelentkező valós készletezési problémák kezelésére alkalmazhatók. A nagyrészt analitikus eredményekre alapozott algoritmusok hatékony készletezést tesznek lehetővé a gyors döntések és „mi lenne ha?" típusú elemzések támogatásával. A kifejlesztett alkalmazás a modern informatikai eszközöknek köszönhetően nem igényli a felhasználói számítógépekre való hosszadalmas telepítést, így megkönnyíti az integrációt bármely konkrét, már korábban bevezetett rendszerrel. A szoftver lehetőséget nyújt arra, hogy tetszőleges számú felhasználó egy böngésző program segítségével könnyen kezelhető, interaktív felületen online szimulációkat futtasson egy-időben és párhuzamosan. Az értekezésben bemutatott eredmények új megközelítése bővíti a készletgazdálkodás irodalmát, és lehetővé teszi a felsőfokú oktatásban való felhasználását (pl. ME Alkalmazott Informatikai Tanszéken oktatott „Termelési rendszerek és folyamatok" [99], „Számítógépes termelésirányítás" és a „Számítógépes gyártásirányítás" c. tárgyak oktatásának keretein belül).

11. fejezet

További kutatási feladatok

Az értekezésben tárgyalt modellek és módszerek a készletgazdálkodás területének csak egy kis szeletét érintik, különösképpen a beszállítói oldalra koncentrálva. Jelen dokumentumban többször találunk utalást a végtermékgyártó és a beszállító közötti kooperatív, illetbe kollaboratív kapcsolati viszonyra, azonban a modellekben ez csak közvetve jelenik meg.

Napjaink modern logisztikai hálózataiban egyre fontosabb szerepet kap a partnerek szorosabb együttműködése egy közös, globális cél érdekében. Ennek oka a vállalatok gazdálkodási területén végbemenő jelentős változások. A termelési tevékenység egészében piacorientált lett, vagyis a termékek előállítását a tényleges piaci igények mozgatják. A termelés területén az egyedi piaci igények miatt a termékváltozatok száma jelentősen megnőtt, a termékek életciklusa és sorozatnagysága lecsökkent. A termelés mélysége csökkent, vagyis a beszállítók szerepe folyamatosan erősödik a termékek piaci versenyképességével való összefüggésben. A termékek átfutási ideje csökken, rövid szállítási időket, gyakori, kismennyiségű szállításokat várnak a beszállítóktól. A szállítások területén általánosabban magas szállítási készséget és rugalmasságot, megfelelő megbízhatóságot és versenyképes árakat várnak el. Az SCM figyelmének középpontjában a minőség és az idő áll, mint a versenyképesség növelésének eszközei.

A kapcsolati rendszer átalakulásának további oka annak a felismerése, hogy egy együttműködő partnerekből álló ellátási lánc globális célja (optimuma) eredményesebb lehet, mint egy szoros kapcsolat, információ megosztás nélküli rendszeré. Ennek hátterében rendszertechnikai okok húzódnak, miszerint egy rendszer szigetszerű részeinek lokális optimumai általában nem valósítják meg globális optimumot. A számítástechnika fejlettsége és az informatika eszközrendszerének rohamos fejlődése hatékony eszközt biztosít a megfelelő kapcsolati rendszer kialakítására és megvalósítására.

Mindezekből kiindulva legfontosabb további kutatási iránynak az együttműködő ellátási láncokban a végtermék gyártó és a beszállítók közötti kapcsolati rendszer mélyebb vizsgálatát tekintem. További cél lehet egy olyan közös modell kidolgozása, amelyben az egyes felek felelősséggel tartoznak döntéseikért, ahol a partnerek közötti „kiszolgáltatottság” nem jelenhet meg. A probléma vizsgálatához jó eszközt biztosít a matematikai egyik mellékágának tekinthető, a racionális szereplők stratégiai interakcióinak elemzésével foglalkozó játékelmélet.

Az együttműködés matematikai megfogalmazása mellett szükség van egy komplex informatikai rendszerre is, amely biztosítja a partnerek, mint autonóm ágensek közötti információcserét.

Egy fontos további kutatási lehetőségként szeretném megjelölni a készletgazdálkodási és a termelésütemező rendszerek integrációjának és kapcsolatának mélyebb vizsgálatát. Továbbá egy modern informatikai eszközökkel kifejlesztett olyan ágens alapú rendszer létrehozását kutatási, oktatási céllal, amely egyfajta virtuális logisztikai hálózatként képes szimulálni a teljes ellátási lánc működését.

Applying an extended newsvendor model in the inventory control problems of the customized mass production

PhD thesis

written by

Péter Mileff

Summary

The strictly spoken objective of the research was to develop, examine and implement experimental inventory control models, which could also be applied among the today's circumstances of the customized mass production. These basic properties are handling specific uncertainties, making effort to calculate the optimal solution from the point of view of the total cost and considering real practical constraints. Together with these, another objective is to have fast response time and make possible to apply them in „What if" type manager decisions, where more alternatives is needed almost immediate to evaluate.

The thesis basically consists of two main parts. The first part emphasizes the former results. We can get acquainted with the motivation of the work, then the objectives, the fundamental stockpiling concepts and model categorization are discussed. The research work is based on a periodic-review, cost based, stochastic model, which is known as „newsvendor problem" in the literature. Chapter 3, presents the opportunities and properties of the model applying together with the critical inventory level, clearly shows that the adjusting of the model to solve real problems appearing in the customized mass production can be very complicated in its original. Solving multi-period problems with constraint programming and genetic algorithm using the classical model had the consequence, analytical model is needed to reach enough efficiency.

The further part of the thesis discusses the analytical results of the new extensions of the newsvendor model. The extended model, following the classical newsvendor concept, makes possible to handle more periods jointly and fast in an analytical way. On the basis of demand information arising from market forecasts, the proper chosen number of jointly produced periods has a main role at the production scheduling of the component and special material producing supplier companies. Introducing the elaborated per-unit cost model and using this for determining the optimal number of jointly produced periods, the model grow out of the family of the traditional (t,S) periodic-review models.

Almost all of the retailer and supplier companies face with the problem of natural fluctuations appearing at the product lifecycle. In general they try to defend themselves with the help of manager decisions based on human experience. On the basis of the previous results, the thesis introduces a feasible analytical model to handle the „production run-out" problem. Modeling the run-out with a Poisson stochastic variable, the whole process of the „run-out" effect can be expressed with a closed form solution, which is independent from the type of stochastic properties

of the demand.

According to the experience, companies being in market contention make effort to accept the most possible order. At this time capacity constraint problems often appear. Chapter 6 proposes different solution methods decomposing the problem to cost based and service level based groups. The presented heuristic method offers an effective solution to multi-period and multi-product problems.

The service level, established in contracts has a major role at the cooperation among the partners. Chapter 7 shows that the penalty cost appearing in the extended model can be explained as a „control" parameter. With the help of the elaborated analytic formula the compliant service level assuring control parameter can be determined.

The models and methods appearing in the theses are integrated into a prototype inventory control application, made by modern development tools and reside in a J2EE environment. The main objective of the application is to support planning and modeling of the stockpiling processes. Platform independent software is capable to determine the optimal policy performing user controlled, online simulations.

The new scientific results are summarized by the following:

Thesis 1. New, extended „newsvendor" based inventory control model supporting cooperative supplying tasks of the customized mass production.

Proceeding from the requirements of the cooperative supplier system of the customized mass production and based on the classical (setup cost extended 'newsvendor') problem, a new, multi-period stochastic inventory control model has been developed with an extended cost function.

Thesis 2. Determine the optimal number of cycles of the supplier with a per-unit cost model considering the claim of the fine adjustment of the „penalty cost" appearing like a „control" parameter in the cooperation of the partners.

Based on the results of the first thesis, it has been recognized that introducing the concept of the per-unit cost model of the extended newsvendor problem has a crucial importance to determine the optimum number of jointly produced periods, furthermore a heuristic method has been elaborated to determine the optimal solution.

The penalty cost of the extended model can be explained as a „control" parameter in the cooperative relationship among the partners and it is suitable to assure the compliant service level. An analytic formula has been developed to determine the exact value of it in function of

the allowed number of back-orders.

Thesis 3. A method to determine the production run-out part-model against the cost increases occurred because of no more reusable stocks.

Based on the results of thesis 1 and 2, a mathematical model has been developed, which presents a suggestion for the production run-out problem, which appears because of the uncertain market environment of the customized mass production.

Thesis 4. A heuristic method and solution suggestion to solve the effect of the global capacity constraints appearing at the supplier inventory policy in case of more products and optional long, finite time horizon.

Based on the results of model extensions and expansions I have elaborated models for the extended newsvendor problem considering a capacity constraint condition. For the case, mostly appearing in practice (n number of products, optional length, finite time horizon), I have elaborated a heuristic method, which considers the capacity requirement of the products, consist of multiple steps and assures the service level based stockpiling policy with minimal cost.

Irodalomjegyzék

[1] R. C. ALISTAIR and A. T. STAGGEMEIER. „A Survey of lot-sizing and scheduling models". 23rd Annual Symposium of the Brazilian Operation Research Society (SOBRAPO). *Campos do Jordao, Brazil*, pages 189–201, 2001.

[2] Apache MyFaces. http://myfaces.apache.org. 2007.

[3] F. J. ARCELUS and G. SRINIVASAN. „Inventory policies under various optimizing criteria and variable markup rates". *Management Science*, 33:756–762, 1987.

[4] K. J. ARROW, T. HARRIS, and J. MARSCHAK. „Optimal inventory policy". *Econometrica*, 19:250–272, 1951.

[5] K. J. ARROW, S. KARLIN, and H. SCARF. „Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production". *Stanford University Press*, 1958.

[6] Y. AVIV. „The effect of collaborative forecasting on supply chain performance". *Management Science*, 47-10:1326–1343, 2001.

[7] Y. AVIV and A. FEDERGRUEN. „The operational benefits of information sharing and vendor managed inventory (VMI) programs". *Washington University working paper, St Louis, MO*, 1998.

[8] H. AYHAN, J. DAI, R. D. FOLEY, and J. WU. „Newsvendor Notes". *ISyE 3232 Stochastic Manufacturing & Service Systems*, pages 67–78, 2004.

[9] L. BARBOSA and M. FRIEDMAN. „Deterministic Inventory Lot Size Models - a general root law". *Management Science*, 24(10):819–826, 1979.

[10] R. BELLMAN. „Dynamic Programming". *Princeton University Press, Princeton*, 1957.

[11] R. BELLMAN, I. GLICKSBERG, and O. GROSS. „On Some Nonlinear Integral Equations Occurring in the Theory of Dynamic Programming". *PNAS*, 41:227–229, 1955.

[12] J. BENKŐ. „Periodikus készletfigyelésű modell megoldása dinamikus programozással általános feltételek mellett". *Kutatási és Fejlesztési Tanácskozás. Gödöllő: MTA Agrártud. Osztálya. Agrár-Műszaki Bizottság*, 26:146–151, 2002.

[13] A. BENSOUSSAN, M. CAKANYILDIRIM, and S. P. SETHI. „A multiperiod newsvendor problem with partially observed demand". *Working paper SOM 200550, School of Management, University of Texas at Dallas, TX*, 2005.

[14] E. BOMBERGER. „A dynamic programming approach to a lot size scheduling problem". *Management Science*, 12:778–784, 1966.

[15] N. BRAHIMI, S. DRAUZERE-PERES, N. M. NAJID, and A. NORDLI. „Single Item Lot Sizing Problems". *European Journal of Operational Research*, 168:1–16, 2006.

[16] J. BRAMEL and D. SIMCHI-LEVI. „The Logic of Logistics: Theory, Algorithms and Applications for Logistics Management". *Springer PLACE of publication*, 1997.

[17] J. BUCHAN and E. KOENIGSBERG. „Scientific Inventory Control". *Prentice Hall*, 1963.

[18] G. P. CACHON. „Competitive Supply Chain Inventory Management". *Quantitative Models for Supply Chain Management (International Series in Operations Research & Management Science, 17)*, Chapter 5, 2003.

[19] G. P. CACHON. „Supply Chain Coordination with Contracts". *In de Kok, A. G., Graves, S. C. (eds): Supply Chain Management: Design, Coordination and Cooperation. Handbooks in Op. Res. and Man. Sci*, Elsevier, 11:229–239, 2003.

[20] G. P. CACHON and M. A. LARIVIERE. „Supply chain coordination with revenue-sharing contracts: Strengths and limitations". *Management Sci*, 51-1:30–44, 2005.

[21] G. P. CACHON and S. NETESSINE. „Game Theory in Supply Chain Analysis". *International Series In Operations Research and Management Science*, ISSU 74:13–66, 2003.

[22] Cewolf - Chart Enabling Web Object Framework.
http://cewolf.sourceforge.net/new/index.html. 2007.

[23] L. M. A. CHAN, Z. J. M. SHEN, D. S. SIMCHI-LEVI, and J. L. SWANN. „HANDBOOK OF QUANTITATIVE SUPPLY CHAIN ANALYSIS: Modeling in the E-Business Era, Chapter 9: Coordination of Pricing and Inventory Decisions: A Survey and Classification". *Springer*, 2004.

[24] C. K. CHEN and K. J. MIN. „An analysis of optimal inventory and pricing policies under linear demand". *Asia-Pacific Journal of Operational Research*, 11-2:117–129, 1994.

[25] T. C. E. CHENG. „An eoq model with pricing consideration". *Computers and Industrial Engineering*, 18-4:529–534, 1990.

[26] A. CHIKÁN. „Készletezési modellek". *Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó*, 1983.

[27] C. CHURCHMAN, R. ACKOFF, and L. Arnoff. „Introduction to Operations Researcht". *Wiley, New York*, 1957.

[28] S. COHEN and J. ROUSSEL. „Strategic Supply Chain Management: The Five Disciplines for Top Performance". *McGraw-Hill Companies*, 2005.

[29] M. DADA and K. SRIKANTH. „Pricing policies for quantity discounts". *Management Science*, 33-10:1247–1253, 1987.

[30] N. P. DELLAERT and M. T. MELO. „Approximate Solutions for a Stochastic Lot-sizing Problem with Partial Customer-order Information". *European Journal of Operational Research*, 150:163–180, 2003.

[31] V. DESHPANDE and L. SCHWARZ. „Optimal capacity allocation in decentralized supply chains". *Purdue University working paper*, 2002.

[32] X. DING, M. L. PUTERMAN, and A. BISI. „The censored newsvendor and the optimal acquisition of information". *Operations Research*, 50-3:517–527, 2002.

[33] A. DVORETZKY, J. KIEFER, and J. WOLFOWITZ. „On the optimal character of the (s, S) policy in inventory theory". *Econometrica*, 21:586–596, 1953.

[34] P. EGRI and J. VÁNCZA. „Incentives for Cooperative Planning in Focal Supply Networks". *Proc. of the 6th International Workshop on Emergent Synthesis*, pages 17–24, 2006.

[35] S. EMMETT and B. CROCKER. „The Relationship driven supply chain". *Gower Publishing*, 2006.

[36] Enterprise Archive File.
http://edocs.bea.com/wls/docs81/ConsoleHelp/applications.html. 2007.

[37] J. S. ERLEBACHER. „Optimal and heuristic solutions for the multi-item newsvendor problem with a single capacity constraint". *POMS Series in Technology and Operations Management*, 9:25–36, 2000.

[38] S. FEGYVERNEKI. „Valószínűségszámítás". *Oktatási segédlet. Miskolci Egyetem*, 2001.

[39] E. A. R. file format. In: Wikipedia the free encyclopedia.
http://en.wikipedia.org/wiki/EAR_(file_format). 2007.

[40] J. D. M. FISHER and A. HORNSTEIN. „ (S,s) Inventory policies in general equilibrium". *Federal Reserve Bank of Chicago. Working Paper*, pages 96–124, 1996.

[41] M. FISHER and A. RAMAN. „Reducing the cost of demand uncertainty through accurate response to early sales". *Operations Research*, 44:87–99, 1996.

[42] M. FLEURY and F. REVERBEL. „The Jboss Extensible Server". *In proceedings of Middleware 2003, Brazil*, 2003.

[43] D. L. GARDNER. „Supply Chain Vector: Methods for Linking the Execution of Global Business Models With Financial Performance". *J. Ross Publishing*, 2004.

[44] G. GÁT. „Valószínűségszámítás”. *Oktatási segédlet. Nyíregyháza*, 1997.

[45] J. L. GATTORNA. „Gower Handbook of Supply Chain Management (5th edition)”. *Gower Publishing*, 2003.

[46] S. GAVIRNENI, R. KAPUSCINSKI, and S. TAYUR. „Value of Information in Capacitated Supply Chains”. *Management Science*, 45-1:16–24, 1999.

[47] H. GIRLICH and A. CHIKÁN. „The Origins of Dynamic Inventory Modelling under Uncertainty”. *International Journal of Production Economics*, 71, Issues 1-3:2–16, 1999.

[48] B. GLEVITZKY. „Operációkutatás II.”. *Elektronikus közlés, mobiDIÁK könyvtár, Debreceni Egyetem, Informatikai Intézet*, pages 51–73, 2003.

[49] G. HADLEY and T. M. WHITIN. „Analysis of Inventory Systems”. *Prentice Hall, Inc., Englewood Chiffs, New Jersey*, 1963.

[50] I. HIGA, A. FEYERHERM, and A. MACHADO. „Waiting Time in an (s-1,s) Inventory System”. *Operations Research*, 1975.

[51] D. HOCHSTADTER. „Stochastische Lagergaltungsmodelle”. *Springer Verlag, Berlin*, 1969.

[52] J. HOLLAND. „Adaptation in Natural and Artificial Systems”. *University of Michigan Press, Ann Arbor*, 1975.

[53] W. J. HOPP and M. L. SPEARMAN. „Factory Physics - Foundations of Manufacturing Management”. *McGraw-Hill/Irwin, Chicago*, 1996.

[54] G. HORVÁTH. „Készletmodellezés egykor és ma”. *EU Working Papers*, 1/2003.

[55] M. HUGOS. „Essentials of Supply Chain Management”. *John Wiley & Sons*, 2003.

[56] D. IGLEHART. „Optimality of (s,S) policies in the infinite horizon dynamic inventory problem”. *Management Science*, 9:259–267, 1963.

[57] D. K. JONG. „An analysis of the behaviour of a class of genetic adaptive systems”. *PhD thesis, University of Michigan*, 1975.

[58] M. J. KHOUJA. „Optimal ordering, discounting, and pricing in the single-period problem”. *International Journal of Production Economics*, 65-2:201–216, 2000.

[59] C. KOULAMAS. „Technical Note: A Newsvendor Problem with Revenue Sharing and Channel Coordination”. *Decision Sciences*, 37-1:91–100, 2006.

[60] P. KOUVELIS and G. J. GUTIERREZ. „The Newsvendor Problem in a Global Market: Optimal Centralized and Decentralized Control Policies for a Two-Market Stochastic Inventory System”. *Management Science*, 43-5:571–585, 1997.

[61] M. E. KUHL, N. M. STEIGER, F. B. ARMSTRONG, and J. A. JOINES. „Newsvendor problem with pricing: properties, algorithms, and simulation". *Proceedings of the 2005 Winter Simulation Conference*, pages 1743–1748, 2005.

[62] R. LAL and R. STAELIN. „An approach for developing an optimal discount pricing policy". *Management Science*, 30:1524–1539, 1984.

[63] M. A. LARIVIERE and E. L. PORTEUS. „Selling to the newsvendor: An analysis of price-only contracts". *Manufacturing & Service Operations Management*, 3-4:293–305, 2001.

[64] H. LAU and A. LAU. „Some Results on Implementing a Multi-Item Multi Constraint Single-Period Inventory Model". *International Journal of Production Economics*, 48:121–128, 1997.

[65] C. C. LEE and W. H. J. CHU. „Who Should Control Inventory in a Supply Chain?". *European Journal of Operational Research*, 164:158–172, 2005.

[66] H. LEE and S. WHANG. „The impact of the secondary market on the supply chain". *Management Science*, 48:719–731, 2002.

[67] H. L. LEE and M. J. ROSENBLATT. „A generalized quantity discount pricing model to increase supplier's profits". *European Journal of Operational Research*, pages 1177–1185, Management Science.

[68] L. LI. „The Role of Inventory in Delivery-Time Competition". *Management Science*, 38:182–197, 1992.

[69] LINDFORS and M. FLEURY. „JMX: Managing J2EE with Java Management Extensions". *SAMS Publishing Inc*, 2002.

[70] S. LIPPMAN and K. MCCARDLE. „The Competitive Newsboy". *Operations Research*, 45:54–65, 1997.

[71] S. MICROSYSTEMS. „JavaTM 2 Platform, Enterprise Edition (J2EETM) Specification" java.sun.com/products/javabeans. 2003.

[72] A. MILNE. „The mathematical theory of inventory and production: The Stanford Studies after 36 years". *In Workshop, 7August 1994, Lake Balaton. ISIR, Budapest*, pages 59–77, 1996.

[73] B. K. MISHRA and S. RAGHUNATHAN. „Retailer- vs. vendor-managed inventory and brand competition". *Management Science*, 50-4:445–457, 2004.

[74] Modell - View - Controller (MVC) tervezési minta. http://www.jcorporate.com/expresso/doc/edg/edg_whatismvc.html. 2007.

[75] S. MONDAL and M. MAITI. „Multi-item fuzzy EOQ models using genetic algorithm". *Computers and Industrial Engineering*, 44, Issue 1:105–117, 2003.

[76] M. MULLER. „Essentials of Inventory Management". *American Management Association*, 2002.

[77] E. NADDOR. „Inventory Systems". *New York: John Wiley*, 1966.

[78] J. A. NIEDERHOFF. „Using Separable Programming to Solve the Multi-Product, Multi-Constraint Newsvendor Problem and Extensions". *POMS, Chicago, IL*, pages 124–132, 2005.

[79] Normális eloszlás. In: Wikipedia. http://en.wikipedia.org/wiki/normal_distribution. 2007.

[80] E. PAGE and R. J. PAGE. „Multi-Product Inventory Situations with one Restriction". *Operational Research*, 27:815–834, 1976.

[81] S. PANDA, S. SENAPATI, K. BANERJEE, and M. BASU. „Determination of EOQ of multi-item inventory problems through nonlinear goal programming". *Advanced Modeling and Optimization (AMO)*, 7-2:169–176, 2005.

[82] N. C. PETRUZZI and M. DADA. „Pricing and the newsvendor problem: A review with extensions". *Operations Research*, 47-2:183–194, 1999.

[83] E. L. PORTEUS. „Stochastic Inventory Theory". *In D. P. Heyman and M. J. Sobel, editors, Handbooks in Operations Research and Management Science*, Elsevier, North Holland, 2:605–652, 1990.

[84] Prog.hu - Bevezetés a genetikus algoritmusokba. http://www.prog.hu/cikkek/909/Bevezetes+a+genetikus+algoritmusokba.html. 2007.

[85] P. RAISZ. „Valószínűségszámítás". *Miskolci Egyetemi Kiadó*, 2005.

[86] A. RAJAN, RAKESH, and R. STEINBERG. „Dynamic pricing and ordering decisions by a monopolist". *Management Science*, 38-2:240–262, 1992.

[87] G. RAZ and E. PORTEUS. „A discrete service levels perspective to the newsvendor model with simultaneous pricing". *Working Paper, Stanford University*, 2001.

[88] G. J. RYZIN and S. MAHAJAN. „On the Relationship Between Inventory Cost and Variety Benefits in Retail Assortments". *Management Science*, 45:1496–1509, 1999.

[89] M. SASIENI and A. YASPAN. „Operations Research Methods and Problems". *Wiley, New York*, 1959.

[90] H. SCARF. „A Survey of Analytic Techniques in Inventory Theory". *In Scarf et al, editors, Multistage Inventory Models and Techniques*, 1963.

[91] G. SCHUSSEL. „Job-shop Release Sizes". *Management Science*, 14, 1968.

[92] S. P. SETHI and F. CHENG. „Optimality of (s, S) Policies in Inventory Models with Markovian Demand". *Operations Research*, 45-6:931–939, 1997.

[93] K. H. SHANG, J.-S. SONG, and P. H. ZIPKIN. „Coordination Mechanisms in Decentralized Serial Inventory Systems with Batch Ordering". *Working Paper, Fuqua School of Business, Duke University*, 2006.

[94] J. F. SHAPIRO. „Modeling the Supply Chain". *Thomson Learning, Duxbury*, 2001.

[95] su XUANMING. „Bounded rationality in newsvendor models". *Electronic Paper. Social Science Research Network*, 2007.

[96] J. SZTRIK. „Raktározási és kiszolgálási problémák matematikai modellezése". *Egyetemi jegyzet, Debreceni Egyetem Informatikai Kar*, 2004.

[97] C. O. L. T. Open source libraries for high performance scientific and technical computing in java. http://dsd.lbl.gov/ hoschek/colt/. 2007.

[98] I. TÓTH. „Operációkutatás I.: Matematika közgazdászoknak". *Tankönyvkiadó Bp.*, 2000.

[99] T. TÓTH. „Tervezési elvek, modellek és módszerek a számítógéppel integrált gyártásban". *Miskolci Egyetemi Kiadó*, 1998.

[100] Valószínűségi változók összege. http://www.math.hope.edu/tanis/cmu/menu.html. 2006.

[101] van den H. WILCO and A. P. M. WAGELMANS. „A comparison of methods for lot-sizing in a rolling horizon environment". *Operation Research Letters*, 33:486–496, 2005.

[102] van J. A. MIEGHEM. „Coordinating Investment, Production and Subcontracting". *Management Science*, 45-7:954–971, 1999.

[103] J. VÁNCZA and P. EGRI. „Coordinating Supply Networks in Customized Mass Production - A Contract-Based Approach". *Annals of the CIRP*, 55-1:489–492, 2006.

[104] K. A. VÁRKONYINÉ, G. HORVÁTH, and A. ÁLMOS. „Genetikus algoritmuso". *Typotex*, 2003.

[105] A. VEINOTT. „On the optimality of (s,S) inventory policies: New conditions and a new proof.". *J. SIAM Appl. Math.*, 14-5:1067–1083, 1966.

[106] T. VOLLMANN, L. B. WILLIAM, C. D. WHYBRAK, and F. R. JACOBS. „Manufacturing Planning and Control for supply chain management". *Fifth Edition. McGraw-Hill*, 2005.

[107] von J. NEUMANN and O. MORGENSTERN. „Theory of Games and Economic Behavior". *Princeton University Press*, 1944.

[108] H. M. WAGNER and T. M. WHITIN. „Dynamic Version of the Economic Lot Size Model". *Management Science*, 5:89–96, 1958.

[109] Web Application Frameworks. In: Wikipedia the free encyclopedia. http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_web_application_frameworks. 2007.

[110] E. W. WEISSTEIN. „CRC Concise Encyclopedia of Mathematics”. *CRC Press, London*, pages 438–523, 1999.

[111] E. W. WEISSTEIN. „Logistic Distribution”. In: MathWorld - A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/LogisticDistribution.html., 2006.

[112] T. M. WHITIN. „The Theory of Inventory Management”. *Prentice University Press, Princeton, New Jersy*, 1953.

[113] T. WILD. „Best Practice in Inventory Management”. *John Wiley & Sons*, 1997.

[114] Wolfram MathWorld - Normal Distribution. In: MathWorld - A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/NormalDistribution.html. 2007.

[115] Wolfram MathWorld - Uniform Distribution. In: MathWorld - A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/UniformDistribution.html. 2007.

[116] P. H. ZIPKIN. „Foundations of Inventory Management”. McGraw-Hill, 2000.

[117] K. ZOLLER. „Deterministic Multi-item Inventory Systems with Limited Capacity”. *Management Science*, 24:451–455, 1977.

12. fejezet

A tézisekhez kapcsolódó tudományos publikációk

Idegen nyelvű folyóiratban közölt publikációk:

[118] **Péter Mileff**, Károly Nehéz, (2006), *An Extended Newsvendor Model for Customized Mass Production*, AMO - Advanced Modelling and Optimization. Romania, Electronic International Journal, Volume 8, Number 2. pp. 169-186.

[119] **Péter Mileff**, Károly Nehéz, (2006), *Collaborative Inventory Control Policies in Supply Chains*, Production Systems and Information Engineering, University of Miskolc, Volume 3, pp. 71-83.

[120] **Péter Mileff**, Károly Nehéz, (2005), *Fuzzy Based Load Balancer for JBoss Application Server*, Production Systems and Information Engineering, University of Miskolc, Volume 3, pp. 57-71.

[121] **Péter Mileff**, Károly Nehéz, (2005), *Intelligent Dynamic Load Balancer for JBoss Application Servers*, Alkalmazott Informatika Konferencia, University of Kaposvár, Hungary, Acta Agraria Kaposváriensis (2005) Vol 10 No 1, pp. 195-207.

Magyar nyelvű folyóiratban közölt publikáció:

[122] **Péter Mileff**, Károly Nehéz, (2006), *Módosított újságárus probléma alkalmazása az igény szerinti tömeggyártásban*, Miskolci Egyetem - GÉP folyóirat, LVII. évfolyam, Vol. 2006/10, pp. 35-43.

Idegen nyelvű konferencia kiadványban közölt publikácók:

[123] **Péter Mileff**, Károly Nehéz, (2006), *Evaluating the proper service level in a cooperative supply chain environment*, MIM-2007, IFAC Workshop on Manufacturing Modelling, Management and Control, Budapest - Hungary, pp. 59-63.

[124] **Péter Mileff**, Károly Nehéz, (2006), *A new heuristic method for inventory control of customized mass production*, MITIP-2006, 8th International Conference on The Modern

Information Technology in the Innovation Processes of the Industrial Enterprises, Budapest - Hungary, pp. 353-358.

[125] **Péter Mileff**, Károly Nehéz, Tóth Tibor, (2006), *A new inventory control method for supply chain management*, UMTIK-2006, 12th International Conference on Machine Design and Production, Istanbul - Turkey, pp. 393-409.

[126] **Péter Mileff**, Károly Nehéz, (2007), *Solving Capacity Constraint Problems in an Extended Multi-Item, Multi-Period Newsvendor Model*, microCAD 2007, 21th International Scientific Conference, University of Miskolc, Hungary. pp. 135-141.

[127] **Péter Mileff**, Károly Nehéz, (2006), *Applying Analytical methods in Inventory Control Problems*, microCAD 2006, 20th International Scientific Conference, University of Miskolc, Hungary. pp. 217-222.

[128] **Péter Mileff**, Károly Nehéz, (2006), *Applying game theory in Inventory Control Problems*, microCAD 2006, 20th International Scientific Conference, University of Miskolc, Hungary. pp. 223-229.

[129] **Péter Mileff**, Károly Nehéz, (2006), *Modelling and Solving Inventory Control Problems in Customized Mass Production*, Manufacturing-2006 Hungarian Scientific Conference. In memoriam: Joe Hatvany 80 years after his birth date, Budapest. pp. 141-149.

[130] **Péter Mileff**, Károly Nehéz, (2005), *Adaptive Load Balancing in JBoss Application Servers*, 5th International Conference of PHD Student, University of Miskolc, Hungary. pp. 245-252.

[131] **Péter Mileff**, Károly Nehéz, (2005), *Application Servers in E-Commerce Applications*, microCAD 2005, 19th International Scientific Conference, University of Miskolc Hungary. pp. 327-332.

Magyar nyelvű konferencia kiadványban megjelent publikációk:

[132] **Péter Mileff**, Károly Nehéz, (2006), *Beszállítói láncok elemzése analitikus, játékelméleti és korlátozás programozás módszerével*, XI. Fiatal Műszakiak Tudományos Ülésszaka, Kolozsvár, Románia, pp. 267-270.

[133] **Péter Mileff**, Károly Nehéz, (2006), *Az igény szerinti tömeggyártás készletgazdálkodási problémáinak megoldása módosított újságárus modell segítségével*, Doktoranduszok Fóruma, Miskolc. pp. 145-151.

Ábrák jegyzéke

1.1. Raktárak és tartalmuk a termelési folyamatban 17
1.2. Raktárak kapcsolata a termelésirányítási fogalmakkal 17
1.3. (s,S) mechanizmus 22
1.4. (t,S) mechanizmus 22
1.5. (s,q) mechanizmus 22

2.1. Költségtípusok kapcsolata az EOQ modellben 27
2.2. Döntési alternatíváknak megfelelő készletezési modellek javaslata [34] 33
2.3. Döntési alternatívák javaslata az értekezésben tárgyalt módszerek alapján 34

3.1. A költség alapú célfüggvény jellege 37
3.2. Az igény és raktározási mennyiség kapcsolata 37
3.3. A beszállítói probléma szimulációs eredménye 40
3.4. A nem kielégített rendelések darabszáma a büntetés függvényében 41
3.5. A beszállítói termékgyártás hosszú távú átlaga 41

4.1. A beszállítói raktár változása az igények függvényében 44
4.2. A keresési tér jellege és az optimum helye két termék esetén 47
4.3. A mintafeladat eredményeinek ábrázolása 48
4.4. A genetikus algoritmus általános folyamata 49
4.5. A genetikus egyed 50
4.6. Közeledés az optimális megoldás felé GA-al 53

5.1. Két periódusos együttes gyártásának modellje 54
5.2. Fajlagos költség az együtt gyártott periódusok függvényében 59
5.3. Minta szimuláció a fajlagos költségmodell segítségével 61
5.4. A Poisson eloszlás diszkrét eloszlásfüggvénye $\lambda = 10$ esetén 64
5.5. Készletezési politika a termékkifutás alkalmazása nélkül ($d = 0$) 66
5.6. Készletezési politika a termékkifutás alkalmazásával $d = 12$ érték esetén 66

6.1. Kapacitáskorlát alkalmazása egy termék és periodikus gyártás esetén 69
6.2. Kapacitáskorlát alkalmazása kiszolgálási szint alapú politika esetén 71
6.3. Kapacitáskorlát alkalmazása egy termék és több periódus együttes kezelése esetén 73
6.4. Fajlagos költséggörbe változása hét hetes időhorizont esetén 75

6.5. Fajlagos költségnövekedése az együtt gyártott periódusok csökkentésének függvényében . . . 75
6.6. Együttgyártási periódusszám redukálás a megoldásvektor függvényében . . . 78
6.7. Fajlagos költségnövekedések összehasonlítása és helyettesítése . . . 78
6.8. A helyettesítés lépése háromnál több termék esetén . . . 79

8.1. A J2EE támogatás a háromrétegű architektúrákhoz . . . 87
8.2. Vékony kliens modell . . . 89
8.3. A dinamikus válaszlap generálás lépései . . . 90
8.4. A készletezési politika fő paraméterek beállítása . . . 92
8.5. A szimulációhoz szükséges további paraméterek . . . 92
8.6. A szükséges modell paraméterek megadása . . . 93
8.7. A példa szimuláció eredménye . . . 94

Táblázatok jegyzéke

4.1. Mintafeladat a korlátozás programozás eredményének értelmezésére 47
4.2. A több periódusos gyártás optimalizálási feladat korlátozás programozás eszközével nyert futási eredményei 48
4.3. A beszállítói készletezési probléma megoldásának futási eredményei genetikus algoritmus alkalmazása esetén 53

5.1. Példa optimális együttgyártási hétszám meghatározására 59
5.2. 12 hetes mintaszimuláció 61
5.3. Módszerek összehasonlítása 62

A.1. Az algoritmus első iterációs lépése 131
A.2. Az algoritmus második iterációs lépése 131
A.3. Az algoritmus harmadik iterációs lépése 132

A. függelék

Függelék

A függelék tartalmazza az értekezésben megjelenő fontosabb felírt megoldások, összefüggések igazolását és levezetését. Mindamellett mintapéldákat a bemutatott eredmények igazolására, és a több termékes, több periódusos heurisztikus megoldási módszer kapacitáskorlátos modelljének megoldó algoritmusát.

Az analitikus megoldások bemutatása előtt néhány, a levezetések mindegyikére érvényes feltevést szögezek le.

Jelöljük $F(x)$ -el a beszállítóhoz érkező igények eloszlásfüggvényét *(cumulative distribution function)*. Legyen $f(x)$ pedig az igények valószínűségi sűrűségfüggvénye *(probability density function)*, továbbá $F(x) = P(D \leq x) = \int\limits_0^x f(y)dy$. Feltesszük, hogy $f(x)$ folytonos a $[0, \infty)$ intervallumon. Az ebben a fejezetben levont következtetések mindig igazak, ha D egy általános folytonos valószínűségi változó. Minden $q \geq 0$ esetben fennállnak a következő összefüggések:

$$E(q-D)^+ = \int\limits_0^\infty (q-x)^+ f(x)dx = \int\limits_0^\infty max(q-x,0)f(x)dx = \int\limits_0^q (q-x)f(x)dx =$$

$$= q\int\limits_0^q f(x)dx - \int\limits_0^q xf(x)dx,$$

$$E(D-q)^+ = \int\limits_0^\infty (x-q)^+ f(x)dx = \int\limits_0^\infty max(x-q,0)f(x)dx = \int\limits_q^\infty (x-q)f(x)dx =$$

$$-q\int\limits_q^\infty f(x)dx + \int\limits_q^\infty xf(x)dx,$$

$$E(D,q)^- = \int\limits_0^\infty (D,q)^- f(x)dx = \int\limits_0^\infty min(x,q)f(x)dx = \int\limits_0^q xf(x)dx + q\int\limits_q^\infty f(x)dx,$$

$$(q-D)^+ = max(q-D,0),\ (D-q)^+ = max(D-q,0) \text{ és } (D,q)^- = min(D,q).$$

A.1. Az optimális raktárkészlet egy periódus esetén

Az egy periódusos költség alapú politika megoldása a [8] és [83] publikáció eredményei alapján kerül bemutatásra. A kiindulási pont az egy periódusos modell költségfüggvénye:

$$K(q) = c_f + c_v(q - I) + p\left[max(D - q, 0)\right] + h\left[max(q - D, 0)\right].$$

Felmerül a kérdés, hogy mennyi lesz a beszállító várható költsége egy periódusra nézve. Matematikai formában, mennyi lesz a költségek várható értéke: $g(q) = E[K(q)]$. Ebből adódik a 3.1 összefüggés. Alkalmazva a várható érték definícióját [110] és behelyettesítve az egyenletbe a költségfüggvény a következő alakot veszi fel:

$$g(p) = c_f + c_v(q - I) + h\left[q\int_0^q f(x)dx - \int_0^q xf(x)dx\right] + p\left[-q\int_q^\infty f(x)dx + \int_q^\infty xf(x)dx\right].$$

Célunk a minimális költségű megoldás megtalálása, amely az optimális q mennyiség meghatározását foglalja magába eleget téve a $\frac{\partial g(q)}{\partial q} = 0$ egyenletnek. A deriváláshoz felhasználjuk a következő összefüggéseket [85]:

$$\frac{d}{dx}\int_0^x h(t)dt = h(x) \quad \text{és} \quad \frac{d}{dx}\int_x^\infty h(t)dt = -h(x).$$

Tehát

$$\frac{\partial g(q)}{\partial q} = c_v + h\left[\int_0^q f(x)dx + qf(q) - qf(q)\right] + p\left[-\int_q^\infty f(x)dx - qf(q) + qf(q)\right],$$

$$\frac{\partial g(q)}{\partial q} = c_v + h\left[\int_0^q f(x)dx\right] - p\left[\int_q^\infty f(x)dx\right].$$

A deriválás elvégzése után és a megadott összefüggések felhasználásával a következő eredményhez jutunk:

$$\frac{\partial g(q)}{\partial q} = c_v + hF(q) - p(1 - F(q)).$$

Ha $\frac{\partial g(q)}{\partial q} = 0$, akkor van egy olyan q^*, ami teljesíti a következő egyenletet:

$$F(q^*) = \frac{p - c_v}{p + h}. \tag{A.1}$$

A g függvény minimumának ellenőrzéséhez vegyük g második q szerinti deriváltját:

$$\frac{\partial^2 g(q)}{\partial q^2} = (p + h)f(q).$$

Megvizsgálva a kapott eredményt belátható, hogy $p + h \geq 0$ minden esetben, mivel p és h egyaránt pozitív egészek. Így pedig $\frac{\partial^2 g(q)}{\partial q^2} \geq 0$, azaz g konvex a $[0, \infty)$ intervallumon.

A.2. Mintafeladat egy periódusos gyártásra

Jelen mintafeladat célja gyakorlati áttekintés nyújtása arról, hogy hogyan lehet a kritikus és az optimális készletek segítségével az optimális készletezési politikát meghatározni. Tegyük fel, hogy egy termékre való igény egyenletes eloszlást követ, melynek határai $D_{min} = 10$/hét és $D_{max} = 20$/hét. A büntető költség minden elem esetén legyen $p = 10$ egység és a változó költség pedig $c_v = 4$. A kumulált raktározási költség $h = 2$ egység elemenként. A gyártási költség fix, $c_f = 30$. A kérdés a következő: mi az optimális raktározási és gyártási politika a beszállító számára?

A legelső feladat az optimális készletezési mennyiség meghatározása a 3.3 szerint:

$$F(q) = \frac{p - c_v}{p + h} = \frac{6}{10} = 0.5.$$

Valójában a kapott érték egy függvényérték, amelyből meghatározhatjuk az optimális mennyiséget úgy, hogy az eloszlásfüggvényből visszafelé számolunk:

$$q = F^{-1}(0.5).$$

Ez eredmény a feladatban megadott egyenletes eloszlás esetén 15, ami rögtön látható abból, hogy a 0.5 megfelel a tartomány felének. Jelöljük az optimális mennyiséget S-el: $S = 15$. A következő lépés a kritikus raktárszint meghatározása a fent vázolt módszerrel. Be kell látni, hogy az $L(q)$ függvény különböző q mennyiségek esetén különbözőképpen számítható:

(a) Amennyiben a késztermék mennyiség a lehetséges igény minimuma és maximuma között van ($10 \leq q \leq 20$), akkor:

$$L(q) = 10E(D-q)^+ + 2E(q-D)^+ =$$
$$= 10\int_q^{20}(x-q)\frac{1}{10}dx + 2\int_{10}^{q}(q-x)\frac{1}{10}dx = \frac{1}{2}(20-q)^2 + \frac{1}{10}(10-q)^2.$$

(b) Ha a késztermék mennyiség kevesebb, mint a lehetséges igény minimuma, akkor a második tag kiesik, mivel ekkor nincs raktározási költség. Tehát, ha $0 \leq q \leq 10$, ekkor:

$$L(q) = 10E(D-q)^+ = 10E(D-q) = 10(E(D)-q) = 150 - 10q.$$

(c) Ha a késztermék mennyiség több, mint a lehetséges igény maximuma, $q > 20$, ekkor pedig csak raktározási költségről beszélünk:

$$L(q) = 2E(q-D)^+ = 2E(q-D) = 2(q-E(D)) = 2q - 30.$$

Tegyük fel, hogy a kezdeti raktárszint kisebb, mint az optimális: $I < 15$. Ha $S - I$ darabot gyártunk, ezzel a várható teljes költség:

$$c_f + c_v(S-I) + L(S) = 30 + 4(15-I) + L(15) = 90 + 15 - 4I = 105 - 4I.$$

Ha a kezdeti raktárszint $I = 0$ (azaz nincs semmi a raktárban), akkor b. variációba 0 - át helyettesítve, $L(0) = 150$ kapunk. Ebben az esetben mindenképpen olcsóbb, ha gyártunk, és

15 darabot érdemes gyártani ahhoz, hogy a raktárszintet $S = 15$ -re emeljük. Ha a pillanatnyi raktárszint $I = 10$, akkor

$$L(10) = 10(E(D) - 10) = 5 < 105 - (15 - 5)4 = 105 - 40 = 65.$$

Jól látható, hogy ebben az esetben az olcsóbb döntés az, ha nem gyártunk semmit, mert a gyártás költsége magasabb, mint a nem gyártásé. Emiatt a kritikus raktárszint s valahol 0 és 10 között van. Ahhoz, hogy az s értéket megkapjuk, legyen $L(s) = 105 - 4s$. Ebből utána már adódik, hogy $L(s) = 150 - 10s$. A 3.7 -es összefüggést alkalmazva a következő egyenlethez jutunk:

$$150 - 10s = 105 - 4s,$$

amit s - re megoldva adódik, hogy $s = 7.5$. Tehát az optimális politika a következő: ha a kezdeti raktárszint $I < 7.5$, akkor gyártani kell $15 - I$ egységet. Egyébként nem kell tenni semmit.

A.3. Az optimális raktárkészlet meghatározása két periódus együttes gyártása esetén

A két periódusos együttes gyártás modelljének megoldása az egy periódusos modell gondolatmenetéhez hasonlóan határozható meg. Felhasználjuk az értekezésben vázolt új, bővített költségfüggvény 5.1 összefüggését.

$$K_{12}(q_{12}) = c_f + c_v\left[(q_1+q_2) - I\right] + hE\left[(q_1+q_2) - D_1\right]^+ + hE\left[(q_1+q_2) - D_1 - D_2\right]^+ + \\ +pE\left[D_1 - (q_1+q_2)\right]^+ + pE\left[D_2 + \left[D_1 - (q_1+q_2)\right]^-\right]^+.$$

Jól látható, hogy a függvény kiegészült a második periódusra vonatkozó tagokkal (tárolási költség, büntető költség). A függvény utolsó tagja meglehetősen bonyolult, nehezen kezelhető. A modell analitikus megoldhatóságának érdekében felhasználunk néhány ismert szabályt.

$$min\left\{D, q\right\} = D - (D-q)^+,$$
$$max\left\{D, q\right\} = D^+,$$
$$min\left\{D, 0\right\} = D^- = D - D^+.$$

Az összefüggés utolsó tagja a szabályok alkalmazásával így egy egyszerűbb formára alakítható a következőképpen:

$$D_2 + \left[D_1 - (q_1+q_2)\right]^- = D_2 + \left[D_1 - (q_1+q_2) - \left[D_1 - (q_1+q_2)\right]^+\right].$$

Felteszzük, hogy a periódusonként a beszállítóhoz beérkező igények függetlenek egymástól, így az egyes lehívások független valószínűségi változóként foghatók fel. Belátható, hogy a szabályok alkalmazásával az utolsó tag várható értéke, azaz a két periódus várható hiánya periódusonként külön számítható. Azaz a két periódus együttes várható büntető költsége egyenlő az egyes periódusok várható büntető költségeinek összegével. A továbbiakban így az egyes valószínűségi változók összegének együttes eloszlás-, illetve sűrűségfüggvényével számolhatunk. A szabályok és az észrevétel alapján a költségfüggvény a következő formában írható fel:

$$K_{12}(q_{12}) = c_f + c_v\left[q_{12} - I\right] + hE\left[q_{12} - D_1\right]^+ + hE\left[q_{12} - D_{12}\right]^+ + \\ +pE\left[D_1 - q_{12}\right]^+ + pE\left[D_{12} - q_{12}\right]^+ - pE\left[D_1 - q_{12}\right]^+.$$

Egyszerűsítve:

$$K_{12}(q_{12}) = c_f + c_v\left[q_{12} - I\right] + hE\left[q_{12} - D_1\right]^+ + hE\left[q_{12} - D_{12}\right]^+ + pE\left[D_{12} - q_{12}\right]^+,$$

ahol $q_{12} = q_1 + q_2$ és $D_{12} = D_1 + D_2$.

Megjegyzés: q_{12} jelenti a két periódusnak megfelelő készletezési mennyiséget, amely az egyes periódusok mennyiségeinek összegeként realizálódik. A további egyszerűsítés érdekében D_{12} jelenti az egyes rendelési periódusokra vetített lehívások összegét. Mivel az igények független valószínűségi változóként értelmezhetők, ezért összeadhatóak és együttesen kezelhetőek. A két periódusos modell optimális politikájának meghatározása az egy periódusos modell megoldásához hasonlóan számítható. A várható érték definíciója alapján a költségfüggvény a következő alakot

veszi fel:

$$K_{12}(q_{12}) = c_f + c_v\left[q_{12} - I\right] + h\left[q_{12}\int_0^{q_{12}} f_1(x_1)dx_1 - \int_0^{q_{12}} f_1(x_1)dx_1\right] +$$

$$+h\left[q_{12}\int_0^{q_{12}} f_{12}(x_{12})dx_{12} - \int_0^{q_{12}} x_{12}f_{12}(x_{12})dx_{12}\right] + p\left[\int_{q_{12}}^{\infty} x_{12}f_{12}(x_{12})dx_{12} - q_{12}\int_{q_{12}}^{\infty} f_{12}(x_{12})dx_{12}\right].$$

A célunk a költségek minimális szinten tartása, így a költségfüggvény minimumának megtalálása. Az együttes gyártandó mennyiség, q_{12} szerinti deriválást elvégezve a következő egyenlethez jutunk:

$$\frac{\partial K_{12}(q_{12})}{\partial q_{12}} = c_v + h\left[\int_0^{q_{12}} f_1(x_1)dx_1 + q_{12}f_1(q_{12}) - q_{12}f_1(q_{12})\right] +$$

$$+h\left[\int_0^{q_{12}} f_{12}(x_{12})dx_{12} + q_{12}f_{12}(q_{12}) - q_{12}f_{12}(q_{12})\right] + p\left[\ q_{12}f_{12}(q_{12}) - \int_{q_{12}}^{\infty} f_{12}(x_{12})dx_{12} - q_{12}f_{12}(q_{12})\right].$$

Egyszerűsítve:

$$\frac{\partial K_{12}(q_{12})}{\partial q_{12}} = c_v + h\int_0^{q_{12}} f_1(x_1)dx_1 + h\int_0^{q_{12}} f_{12}(x_{12})dx_{12} - p\int_{q_{12}}^{\infty} f_{12}(x_{12})dx_{12}.$$

A fenti szabályok alapján átalakítva a következő egyenlethez jutunk:

$$\frac{\partial K_{12}(q_{12})}{\partial q_{12}} = c_v + hF_1(q_{12}) + hF_{12}(q_{12}) - p\left(1 - F_{12}(q_{12})\right).$$

A szélsőérték számítás elmélete kimondja, hogy ha $K'_{12}(q_{12}) = 0$, akkor van egy olyan q^*_{12}, ami teljesíti az alábbi egyenletet:

$$F_{12}(q^*_{12}) = \frac{p - c_v - hF_1(q^*_{12}))}{p + h}. \tag{A.2}$$

A költségfüggvény q_{12} szerinti második deriváltja igazolja a minimumpont létezését:

$$\frac{\partial^2 K_{12}(q_{12})}{\partial q^2_{12}} = hf_1(q_{12}) + hf_{12}(q_{12}) + pf_{12}(q_{12}).$$

Megvizsgálva a kapott eredményt belátható, hogy $hf_1(q_{12}) + hf_{12}(q_{12}) + pf_{12}(q_{12}) \geq 0$ minden esetben, mivel p és h egyaránt pozitív egészek, valamint az egyes periódusokhoz tartozó sűrűségfüggvény értékek mind pozitívak. Így pedig $K''(q_{12}) \geq 0$, azaz K_{12} konvex a $[0, \infty)$ intervallumon.

A.4. Mintafeladat két periódusos együttes gyártásra

A következő mintapéldán keresztül a kiterjesztett modell gyakorlati alkalmazhatóságát mutatjuk be. A példa követi az egy periódusos gyártásnál alkalmazott gondolatmenetet. A feladat paramétereinek értéke a következők:

A termékre való igény egyenletes eloszlást követ, melynek határai mindkét periódus esetében azonosak: $D_{1min} = 10$/hét, $D_{1max} = 20$/hét, $D_{2min} = 10$/hét és $D_{2max} = 20$/hét. A hiány büntető költsége legyen $p = 50$ egység, a változó költség pedig $c_v = 4$. A raktározási költség, $h = 2$ egység. A gyártási fix költség, $c_f = 70$.

A kérdés a következő: mennyi lesz az optimális raktározási mennyiség, ha két periódus mennyiségét egyszerre kell legyártani?

Két periódus együttes optimális mennyiségének meghatározására az 5.3 összefüggést alkalmazzuk a következőképpen:

$$F_{12}(S_{12}) = \frac{50 - 4 - 2F_1(S_{12})}{2 + 50} = \frac{44}{52} \, .$$

Megjegyzés: Két egyenletes eloszlású valószínűségi változó összegéből képzett új valószínűségi változó eloszlása nem egyenletes. Az új változó sűrűségfüggvényének jellege egy háromszöget alkot az x tengellyel [38]. Végtelen sok egyenletes eloszlású valószínűségi változó összegének jellege a normális eloszláshoz közelít [100].

A kapott értékből meghatározhatjuk az optimális egy és két periódus mennyiségét úgy, hogy az együttes eloszlásfüggvényből visszafelé számolunk:

$$S_{12} = F_{12}^{-1}\left(\frac{44}{52}\right) \approx 34 \, .$$

Két periódus együttes kritikus raktárkészletének meghatározása a periódusonkénti gyártás példájának gondolatmenetével hasonló módon történik. Az értekezésben ez nem kerül tárgyalásra.

A.5. Az optimális raktárkészlet meghatározása n periódus együttes gyártása esetén

Jelen függelékben a tetszőleges véges hosszú időhorizont lefedésére alkalmas készletezési modell optimális megoldását mutatom be. Induljunk ki az értekezésben vázolt kiterjesztett (5.5) költségfüggvényből.

$$K_{123...n}(q_{123...n}) = c_f + c_v\left[q_{123...n} - I\right] + hE\left[q_{123...n} - D_1\right]^+ + hE\left[q_{123...n} - D_1 - D_2\right]^+ + ... +$$
$$+hE\left[q_{123...n} - D_1 - D_2 - ... - D_n\right]^+ + pE\left[D_1 - q_{123...n}\right]^+ + pE\left[(D_1 + D_2) - q_{123...n}\right]^+ + ... +$$
$$+pE\left[(D_1 + D_2 + ... + D_{n-1}) - q_{123...n}\right]^+ + pE\left[D_n + \left[... + \left[D_2 + \left[D_1 - q_{123...n}\right]^-\right]^-\right]^-\right]^+.$$

Itt $q_{123...n} = q_1 + q_2 + ... + q_n$ és $D_{123...n} = D_1 + D_2 + ... + D_n$. A modellben megjelenő, a büntető költséget kifejező utolsó tag a két periódusos problémához képest tovább bonyolódott. Az analitikus megoldhatóság ismét megköveteli a tag egyszerűsítését, melyhez felhasználjuk a két periódusos politikánál alkalmazott szabályokat. Eredményképpen előáll a költségfüggvény egyszerűsített formája.

$$K_{123...n}(q_{123...n}) = c_f + c_v\left[q_{123...n} - I\right] + hE\left[q_{123...n} - D_1\right]^+ + hE\left[q_{123...n} - D_1 - D_2\right]^+ + ... +$$
$$+hE\left[q_{123...n} - D_1 - D_2 - ... - D_n\right]^+ + pE\left[(D_1 + D_2 + ... + D_n) - q_{123...n}\right]^+.$$

A két összefüggés között a különbség a büntető költség felírásában jelentkezik. Az egyszerűsödés abból adódik, hogy az egyes periódusokban bekövetkező lehívások, mint tetszőleges eloszlású véletlen valószínűségi változók, függetlenek egymástól a teljes időhorizont alatt. Ebben az értelemben a beszállító ki nem elégített rendeléseiből fakadó költsége, az n periódusra összegzett igény ($D_{123...n}$) és a raktáron lévő mennyiség ($q_{123...n}$) különbségeként számítható. A várható érték matematikai értelmezésének megfelelően a függvény:

$$K_{123...n}(q_{123...n}) = c_f + c_v\left[q_{123...n} - I\right] + h\left[\int_0^{q_{123...n}} q_{123...n} f_1(x_1)dx_1 - \int_0^{q_{123...n}} x_1 f_1(x_1)dx_1\right] +$$
$$+h\left[\int_0^{q_{123...n}} q_{123...n} f_{12}(x_{12})dx_{12} - \int_0^{q_{123...n}} x_{12} f_{12}(x_{12})dx_{12}\right] +$$
$$+ ... + h\left[\int_0^{q_{123...n}} q_{123...n} f_{123...n}(x_{123...n})dx_{123...n} - \int_0^{q_{123...n}} x_{123...n} f_{123...n}(x_{123...n})dx_{123...n}\right] +$$
$$+p\left[\int_{q_{123...n}}^{\infty} x_{123...n} f_{123...n}(x_{123...n})dx_{123...n} - \int_{q_{123...n}}^{\infty} q_{123...n} f_{123...n}(x_{123...n})dx_{123...n}\right].$$

A célunk jelen esetben is a költségek minimális szinten tartása, így a költségfüggvény minimumának megtalálása. Az együttes gyártandó mennyiség, $q_{123...n}$ szerinti deriválást elvégezve a

következő egyenlethez jutunk:

$$\frac{\partial K_{123\ldots n}(q_{123\ldots n})}{\partial q_{123\ldots n}} = c_v + h\left[\int_0^{q_{123\ldots n}} f_1(x_1)dx_1 + q_{123\ldots n}f_1(q_{123\ldots n}) - q_{123\ldots n}f_1(q_{123\ldots n})\right] +$$
$$+h\left[\int_0^{q_{123\ldots n}} f_{12}(x_{12})dx_{12} + q_{123\ldots n}f_{12}(q_{123\ldots n}) - \ -q_{123\ldots n}f_{12}(q_{123\ldots n})\ \right] +$$
$$+\ldots+$$
$$+h\left[\int_0^{q_{123\ldots n}} f_{123\ldots n}(x_{123\ldots n})dx_{123\ldots n} + q_{123\ldots n}f_{123\ldots n}(q_{123\ldots n}) - \ -q_{123\ldots n}f_{123\ldots n}(q_{123\ldots n})\ \right] +$$
$$+p\left[\ q_{123\ldots n}f_{123\ldots n}(q_{123\ldots n}) - \int_{q_{123\ldots n}}^{\infty} f_{123\ldots n}(x_{123\ldots n})dx_{123\ldots n}\ - q_{123\ldots n}f_{123\ldots n}(q_{123\ldots n})\ \right].$$

Egyszerűsítve:

$$\frac{\partial K_{123\ldots n}(q_{123\ldots n})}{\partial q_{123\ldots n}} = c_v + h\left[\int_0^{q_{123\ldots n}} f_1(x_1)dx_1\right] + h\left[\int_0^{q_{123\ldots n}} f_{12}(x_{12})dx_{12}\right] + \ldots +$$
$$+h\left[\int_0^{q_{123\ldots n}} f_{123\ldots n}(x_{123\ldots n})dx_{123\ldots n}\right] - p\left[\int_{q_{123\ldots n}}^{\infty} f_{123\ldots n}(x_{123\ldots n})dx_{123\ldots n}\right].$$

A fenti szabályokat alkalmazva a következő egyenlethez jutunk:

$$\frac{\partial K_{123\ldots n}(q_{123\ldots n})}{\partial q_{123\ldots n}} =$$
$$= c_v + hF_1(q_{123\ldots n}) + hF_{12}(q_{123\ldots n}) + \ \ldots\ + hF_{123\ldots n}(q_{123\ldots n}) - p\left(1 - F_{123\ldots n}(q_{123\ldots n})\right).$$

A szélsőérték számítás elmélete kimondja, hogy ha $K'(q_{123\ldots n}) = 0$, akkor van egy olyan $q^*_{123\ldots n}$, ami teljesíti az alábbi egyenletet:

$$F_{123\ldots n}(q^*_{123\ldots n}) = \frac{p - c_v - hF_1(q^*_{123\ldots n}) - hF_{12}(q^*_{123\ldots n}) - \ldots - hF_{123\ldots n-1}(q^*_{123\ldots n})}{p+h}. \tag{A.3}$$

Ahhoz, hogy a kapott összefüggés valóban függvényminimum, ellenőrizni kell a költségfüggvény második deriváltját is. Tehát:

$$\frac{\partial^2 K_{123\ldots n}(q_{123\ldots n})}{\partial q^2_{123\ldots n}} = hf_1(q_{123\ldots n}) + hf_{12}(q_{123\ldots n}) + \ \ldots\ + hf_{123\ldots n}(q_{123\ldots n}) + pf_{123\ldots n}(q_{123\ldots n}).$$

Megvizsgálva a kapott eredményt ismét belátható, hogy $hf_1(q_{123\ldots n}) + hf_{12}(q_{123\ldots n}) + \ \ldots\ + hf_{123\ldots n}(q_{123\ldots n}) + pf_{123\ldots n}(q_{123\ldots n}) \geq 0$ minden esetben, mivel p és h egyaránt pozitív egészek, valamint az egyes periódusokhoz tartozó sűrűségfüggvény értékek mind pozitívak. Így pedig $K''(q_{123\ldots n}) \geq 0$, azaz $K_{123\ldots n}$ konvex a $[0, \infty)$ intervallumon.

A.6. A több termékes, több periódusos heurisztikus megoldási módszer kapacitáskorlátos modelljének megoldó algoritmusa

Az algoritmusban felhasznált változók: $opt[n]$, i, j, n, min, $K[\,][\,]$, $q[\,][\,]$, $FK[\,][\,]$, $FKV[\,][\,]$, $T_{end}[\,]$, $P[\,][\,]$, $u[\,]$, $L[\,]$, C, $merge = true$, $minFKV$, $maxFKV$, $L[\,]$, $B[\,]$ - elemeik nullával inicializálva. $Tend[\,]$ *tömb jelenti a termékek időhorizontjának végét.*

n	a termékek száma.
opt_i	az i. termék optimális együttgyártási periódusszáma.
q_j^i	azt az optimális mennyiséget jelöli, amikor az i. termékből j darab periódust gyártanánk együtt.
$T_{end}[1...n]$	vektor, amely a termékek vizsgált időhorizontjának végét tárolja.
$FK_{i,j}$	az i. termék fajlagos költsége j darab periódust együtt gyártva. Értéke: $FK_{i,j} = \frac{K_j^i}{q_j^i}$
$P_i[1...opt_i]$	i. termék segédvektora. A k. elem értéke: $P_i[k] = FK_{i,k+1} - FK_{i,k}$.
$L[1...n]$	megoldásvektor. Kezdetben: [0,..., 0] . A vektor minden eleme nulla. Elemei jelzik, hogy melyik terméknél mennyi periódust kell redukálni.
$B[1...n]$	boolean segédvektor. A helyettesítés fázisában segítségül szolgál annak a jelzésében, hogy mely terméknél történt módosítás.
$minFKV$	segédváltozó, a minimális fajlagos költségű termék indexe.
$maxFKV$	segédváltozó, a maximális fajlagos költségű termék indexe.
C	globális kapacitáskorlát értéke.
u_i	a i. termék kapacitáshasználati faktora.
I_i	a i. termék kezdő raktárkészlete.
Sum	segédváltozó, a helyettesítési fázisban a $P_i[opt_i - L[i]]$ értékek összegét tartalmazza $B[i] = true$ esetén ($i = 1, ..., n$).
$maxIndex$	segédváltozó, a helyettesítésre kiválasztott elem indexe.
$merge$	segédváltozó a helyettesítés jelzésére. Alapértelmezés szerint $merge = true$.

Start és kapacitáskorlát feltétel vizsgálata

```
1.      for i = 1 to n do
2.        min = 100000000
3.        for j =1 to T_end[i] do
4.              q[i][j] számítása a kiterjesztett modell segítségével
5.              K[i][j] számítása a kiterjesztett modell segítségével
```

```
6.              FK[i][j] = K[i][j] / q[i][j]
7.              if (FK[i][j] ≤ min)
8.                  min =FK[i][j]
9.                  opt[i] = j
10.             end if
11.         end do
12.     end do
13.     for i = 1 to n do
14.         for j = opt[i] − 1 to 1 do
15.             P[i][j] = FK[i][opt[i]] − FK[i][j]
16.         end do
17.     end do
18.     Osszeg = 0
19.     for i = 1 to n do
20.         Osszeg = Osszeg + u_i(q[i][opt[i] − L[i]] − I[i])
21.     end do
22.     if (Osszeg ≤C)
23.         break   # a megoldás otpimális
24.     end if
```

Optimum esélyes pontok kiválasztása induláskor és összevonás után

```
25.     min = 1000000000, max = −100000000, minFKV = −1
26.     for i = to n do
27.         if (P[i][opt[i] − L[i]] ≤min)
28.             min=P[i][opt[i] − L[i]]
29.             minFKV = i
30.         end if
31.     end do
32.     L[minFKV] = L[minFKV] + 1
33.     B[minFKV] = true
34.     if (merge = true)
35.         maxFKV = −1, max=−100000000
36.         merge = false
37.         for i = 1 to n do
38.             if (P[i][opt[i] − L[i]] ≥max)
```

```
39.                 max = P[i][opt[i] − L[i]]
40.                 maxFK = i
41.             end if
42.         end do
43.     end if
44.     k = 0
45.     for i = 1 to n do
46.         if (B[i] = true)
47.             k = k + 1
48.         end if
49.     end do
50.     if (k = 1)
51.         Goto 18.
52.     end if
```

Összevonás kombináció kiválasztása egy lehetséges jobb megoldás érdekében

```
53.     Osszeg = 0
54.     for i = 1 to n do
55.         if (B[i] = true) && (i != maxFKV)
56.             Osszeg = Osszeg + P[i][opt[i] − L[i]]
57.         end if
58.     end do
59.     maxDistance = −1
60.     maxIndex = −1
61.     for i = 1 to n do
62.         if (B[i] = false) && (Osszeg > P[i][opt[i] − L[i]])
63.             distance = Osszeg - P[i][opt[i] − L[i]]
64.             if (distance > maxDistance)
65.                 distance = maxDistance
66.                 maxIndex = 1
67.             end if
68.         end if
69.     end do
70.     if (maxIndex = −1)
71.         Goto 18.
```

```
72.     else
73.        L[maxIndex] = L[maxIndex] + 1
74.        B[maxIndex] = true
75.        merge = true
76.        for i = 1 to n do
77.              if (i != maxIndex)
78.                 L[i] = 0
79.                 B[i] = false
80.              end if
81.        end do
82.     Goto 18.
```

A.7. A több termékes kapacitáskorlát probléma megoldási módszerének alkalmazása egy mintapéldán keresztül

A rendszerben három termék gyártása történik. Az első termék setup költsége $c_f = 150$, az optimális setup darabszáma 5 periódus, az 5 periódus optimális készletmennyisége 285 darab. A második termék setup költsége $c_f = 320$, az optimális setup darabszáma 3 periódus, a 3 periódusnak megfelelő optimális készletmennyiség 500 darab. A harmadik termék setup költsége $c_f = 400$, az optimális setup darabszáma 4 periódus, a 4 periódus optimális készletmennyisége 182 darab. Összes termék így: 967 darab. A kapacitáskorlát értéke legyen $C = 805$ darab. Az egyszerűbb bemutatás érdekében kezdetben a raktárat üresnek tekintjük, valamint a termékekre való igényt minden periódusban azonosnak feltételezzük, és az egyszerűbb követhetőség érdekében a fajlagos költség helyett a fajlagos setup költséget alkalmazzuk. Az algoritmus iterációinak eredményeit a következő táblázatokban foglaltam össze:

A.1. táblázat. Az algoritmus első iterációs lépése

Termék	Optimális setup szám	Optimális mennyiség	Fajlagos setup költség	Fajlagos setup költség 1-el kisebb peródussal	Fajlagos setup költség-változás	Össz. mennyiség [db]
1.	5	285	0,5263	0,6578	**0,1315**	**967**
2.	3	500	0,64	0,9580	0,3318	
3.	4	182	2,1978	2,9197	0,7219	

Az első lépésben jól látszik, hogy az első termék setup számát kell csökkenteni. A megoldásvektor: 100. A második lépés a következő:

A.2. táblázat. Az algoritmus második iterációs lépése

Termék	Optimális setup szám	Optimális mennyiség	Fajlagos setup költség	Fajlagos setup költség 1-el kisebb peródussal	Fajlagos setup költség-változás	Össz. mennyiség [db]
1.	4	228	0,6578	0,8771	**0,2193**	**910**
2.	3	500	0,64	0,9580	0,3318	
3.	4	182	2,1978	2,9197	0,7219	

A második iteráció során ismét az első termék nyer a legkisebb fajlagos setup költségváltozásával. A megoldásvektor most: 200. Mivel az első termék két fajlagos setup költségcsökkentésének összege nagyobb a második termékénél **(0,1315+0,2193=0,3508>0,3318)**, így a csökkentéseket összevonjuk a második termék 1 darab csökkentésévé. A megoldásvektor ennek megfelelően: 010. Az iteráció következő fázisában ismét kiválasztjuk a legkisebb fajlagos költségváltozású terméket, mert a 010 megoldás sem felel meg a kapacitáskorlátnak:

A.3. táblázat. Az algoritmus harmadik iterációs lépése

Termék	Optimális setup szám	Optimális mennyiség	Fajlagos setup költség	Fajlagos setup költség 1-el kisebb peródussal	Fajlagos setup költség-változás	Össz. mennyiség [db]
1.	**4**	285	0,5263	0,6578	**0,1315**	
2.	**2**	334	0,9580	1,9047	0,9467	**801**
3.	4	182	2,1978	2,9197	0,7219	

A nyertes ismét az első termék. A megoldásvektor most: 110. Az így kapott kapacitáskorlátot kielégítő optimális megoldás tehát az, hogy az első termékből 4 periódust, a másodikból 2, a harmadikból pedig 4 periódust kell együtt gyártani.

A.8. A termékkifutás probléma megoldása

A.8.1. A megoldás két periódus együttes gyártása esetén

Jelen függelékben a termékkifutással kiegészített modell megoldását mutatom be két periódus együttes gyártása esetén. A megoldás folyamata hasonló a korábban bemutatott eredményekhez. A termékkifutással bővített modell két periódusra értelmezett költségfüggvénye a következő:

$$K_{12}(q_{12}) = c_f + c_v\left[q_{12} - I\right] + haE\left[q_{12} - D_1\right]^+ + hbE\left[q_{12} - D_{12}\right]^+ + apE\left[D_1 - q_{12}\right]^+ +$$
$$+bpE\left[D_2 + \left[D_1 - q_{12}\right]^-\right]^+ + \ dR\left(1,\lambda\right)\ E\left[q_{12} - D_1\right]^+ + dR\left(2,\lambda\right)\ E\left[q_{12} - D_{12}\right]^+,$$

ahol

$$a = 1 - dR(1,\lambda) \qquad \text{és} \qquad b = 1 - dR(2,\lambda).$$

A függvényben szereplő bonyolult utolsó tag egyszerűbb alakra hozását az (A.3) függelékben ismertetett módon végezzük el:

$$bpE\left[D_2 + \left[D_1 - q_{12}\right]^-\right]^+ = bp\left(E\left[D_{12} - q_{12}\right]^+ - E\left[D_1 - q_{12}\right]^+\right).$$

Az átalakított büntető költség taggal a költségfüggvény ekkor a következő alakban írható:

$$K_{12}(q_{12}) = c_f + c_v\left[q_{12} - I\right] + haE\left[q_{12} - D_1\right] + hbE\left[q_{12} - D_{12}\right]^+ + apE\left[D_1 - q_{12}\right]^+ +$$
$$+bp\left(E\left[D_{12} - q_{12}\right]^+ - E\left[D_1 - q_{12}\right]^+\right) + \ dR\left(1,\lambda\right)\ E\left[q_{12} - D_1\right]^+ + dR\left(2,\lambda\right)\ E\left[q_{12} - D_{12}\right]^+.$$

A várható érték definíciója alapján az egyes tagok kifejtve a következők:

$$haE\left[q_{12} - D_1\right]^+ = h\left[q_{12}\int_0^{q_{12}} f_1(x_1)dx_1 - \int_0^{q_{12}} f_1(x_1)dx_1\right],$$
$$hbE\left[q_{12} - D_{12}\right]^+ = h\left[q_{12}\int_0^{q_{12}} f_{12}(x_{12})dx_{12} - \int_0^{q_{12}} x_{12}f_{12}(x_{12})dx_{12}\right],$$
$$apE\left[D_1 - q_{12}\right]^+ = ap\left[\int_{q_{12}}^{\infty} x_1 f_1(x_1)dx_1 - q_{12}\int_{q_{12}}^{\infty} f_1(x_1)dx_1\right],$$
$$bpE\left[D_{12} - q_{12}\right]^+ = bp\left[\int_{q_{12}}^{\infty} x_{12}f_{12}(x_{12})dx_{12} - q_{12}\int_{q_{12}}^{\infty} f_{12}(x_{12})dx_{12}\right],$$
$$-bpE\left[D_1 - q_{12}\right]^+ = -bp\left[\int_{q_{12}}^{\infty} x_1 f_1(x_1)dx_1 - q_{12}\int_{q_{12}}^{\infty} f_1(x_1)dx_1\right],$$
$$dR\left(1,\lambda\right)\ E\left[q_{12} - D_1\right]^+ = dR\left(1,\lambda\right)\left[q_{12}\int_0^{q_{12}} f_1(x_1)dx_1 - \int_0^{q_{12}} f_1(x_1)dx_1\right],$$
$$dR\left(2,\lambda\right)\ E\left[q_{12} - D_{12}\right]^+ = dR\left(2,\lambda\right)\left[q_{12}\int_0^{q_{12}} f_{12}(x_{12})dx_{12} - \int_0^{q_{12}} x_{12}f_{12}(x_{12})dx_{12}\right].$$

A korábbiakhoz hasonlóan célunk olyan készletezési mennyiség meghatározása, amely minimális költségeket eredményez a beszállítónak. Ezért q_{12} mennyiség szerinti szélsőérték számítást végezve a formalizmusban megjelenő tagok deriváltjai a következők:

$$\frac{\partial\, haE\,[\;q_{12}-D_1]^+}{\partial\, q_{12}} = h\left[\int_0^{q_{12}} f_1(x_1)dx_1 - q_{12}f_1(q_{12}) - q_{12}f_1(q_{12})\right] = hF_1(q_{12}),$$

$$\frac{\partial\, hbE\,[q_{12}-D_{12}]^+}{\partial\, q_{12}} = h\left[\int_0^{q_{12}} f_{12}(x_{12})dx_{12} + q_{12}f_{12}(q_{12}) - q_{12}f_{12}(q_{12})\right] = hF_{12}(q_{12}),$$

$$\frac{\partial\, apE\,[D_1-q_{12}]^+}{\partial q_{12}} = ap\left[q_{12}f_1(q_{12}) - \int_{q_{12}}^{\infty} f_1(x_1)dx_1 - q_{12}f_1(q_{12})\right] = -ap\,(1-F_1(q_{12}))\,,$$

$$\frac{\partial\; bpE\,[D_{12}-q_{12}]^+}{\partial q_{12}} = bp\left[q_{12}f_{12}(q_{12}) - \int_{q_{12}}^{\infty} f_{12}(x_{12})dx_{12} - q_{12}f_{12}(q_{12})\right] = -bp\,(1-F_{12}(q_{12}))\,,$$

$$\frac{\partial(-bpE\,[D_1-q_{12}]^+)}{\partial\, q_{12}} = bp\left[q_{12}f_1(q_{12}) - \int_{q_{12}}^{\infty} f_1(x_1)dx_1 - q_{12}f_1(q_{12})\right] = bp\,(1-F_1(q_{12}))\,,$$

$$\frac{\partial\left(dR\,(1,\lambda)\;E\,[q_{12}-D_1]^+\right)}{\partial q_{12}} =$$

$$= dR\,(1,\lambda)\left[\int_0^{q_{12}} f_1(x_1)dx_1 - q_{12}f_1(q_{12}) - q_{12}f_1(q_{12})\right] = dR\,(1,\lambda)\,F_1(q_{12}),$$

$$\frac{\partial\left(dR\,(2,\lambda)\;E\,[q_{12}-D_{12}]^+\right)}{\partial\, q_{12}} =$$

$$= dR\,(2,\lambda)\left[\int_0^{q_{12}} f_{12}(x_{12})dx_{12} + q_{12}f_{12}(q_{12}) - q_{12}f_{12}(q_{12})\right] = dR\,(2,\lambda)\;F_{12}(q_{12})\,.$$

A kapott formulákat visszahelyettesítve a költségfüggvény:

$$\frac{\partial\, K(q_{12})}{\partial\, q_{12}} = c_v + haF_1(q_{12}) + hbF_{12}(q_{12}) - ap\,(1-F_1(q_{12})) - bp\,(1-F_{12}(q_{12})) +$$
$$+bp\,(1-F_1(q_{12})) + dR\,(1,\lambda)\,F_1\,(q_{12}) + dR\,(2,\lambda)\,F_{12}\,(q_{12})\,.$$

Elvégezve a beszorzásokat, a megfelelő tagokat egymás mellé rendezve:

$$0 = c_v - ap - bp + bp + haF_1(q_{12}) + apF_1(q_{12}) \;- bpF_1(q_{12}) + dR\,(1,\lambda)\,F_1\,(q_{12}) +$$
$$+bpF_{12}(q_{12}) + hbF_{12}(q_{12}) + dR\,(2,\lambda)\,F_{12}\,(q_{12})\,.$$

További alakítások elvégzése után a baloldalam az alábbiak szerint írható:

$$-F_{12}\left(q_{12}\right)\left(bp+hb+dR\left(2,\lambda\right)\right)=$$
$$=c_v-ap+haF_1(q_{12})+apF_1(q_{12})\ -bpF_1(q_{12})+dR\left(1,\lambda\right)F_1\left(q_{12}\right).$$

Elemi osztás elvégézse után az eredmény zárt alakban:

$$F_{12}\left(q_{12}\right)=\frac{ap-c_v-haF_1(q_{12})-apF_1(q_{12})+bpF_1(q_{12})-dR\left(1,\lambda\right)F_1\left(q_{12}\right)}{bp+hb+dR\left(2,\lambda\right)}.$$

Behelyettesítve az a és b-re vonatkozó összefüggéseket kapjuk, hogy:

$$F_{12}\left(q_{12}\right)=\frac{-c_v+\left(1-dR(1,\lambda)\right)\left(p-hF_1(q_{12})-pF_1(q_{12})\right)}{p+h+dR(2,\lambda)(1-p-h)}+$$
$$+\frac{p\left(1-dR(2,\lambda)\right)F_1(q_{12})-dR\left(1,\lambda\right)F_1\left(q_{12}\right)}{p+h+dR(2,\lambda)(1-p-h)}.$$

Végül:

$$F_{12}\left(q_{12}\right)=\frac{c_v-\left(1-dR(1,\lambda)\right)\left(p-hF_1(q_{12})-pF_1(q_{12})\right)}{p+h+dR(2,\lambda)(1-p-h)}+$$
$$+\frac{-p\left(1-dR(2,\lambda)\right)F_1(q_{12})+dR\left(1,\lambda\right)F_1\left(q_{12}\right)}{p+h+dR(2,\lambda)(1-p-h)}.$$

Kiemelés elvégzése után előáll a teljes megoldás:

$$F_{12}\left(q_{12}^*\right)=\frac{p-c_v+F_1(q_{12}^*)\left[\left(1-dR(1,\lambda)\right)\left(p-h-1\right)-pdR(2,\lambda)\right]-pdR(1,\lambda)}{p+h+dR(2,\lambda)(1-p-h)}. \tag{A.4}$$

A költségfüggvény q_{12} szerinti második deriváltja igazolja a minimumpont létezését:

$$\frac{\partial^2 K(q_{12})}{\partial q_{12}^2}=haf_1(q_{12})+apf_1(q_{12})-bpf_1(q_{12})+dR\left(1,\lambda\right)f_1\left(q_{12}\right)+bpf_{12}(q_{12})+$$
$$+hbf_{12}(q_{12})+dR\left(2,\lambda\right)f_{12}\left(q_{12}\right),$$

melyben

$$a=1-dR(1,\lambda)\qquad \text{és}\qquad b=1-dR(2,\lambda).$$

Az a és b összefüggéseket figyelembe véve a második deriválás után kapott formula az alábbiak szerint alakul:

$$0=h(1-dR(1,\lambda))f_1(q_{12})+(1-dR(1,\lambda))pf_1(q_{12})-(1-dR(2,\lambda))pf_1(q_{12})+$$
$$+dR\left(1,\lambda\right)f_1\left(q_{12}\right)+(1-dR(2,\lambda))pf_{12}(q_{12})+h(1-dR(2,\lambda))f_{12}(q_{12})+$$
$$+dR\left(2,\lambda\right)f_{12}\left(q_{12}\right).$$

Kibontás és a pozitív tagok előre rendelésével:

$$0 = hf_1(q_{12}) + pf_1(q_{12}) + dR\,(2,\lambda)\,f_{12}\,(q_{12}) + dR(2,\lambda)pf_1(q_{12}) + dR\,(1,\lambda)\,f_1\,(q_{12}) +$$
$$+pf_{12}(q_{12}) + hf_{12}(q_{12}) - dR(2,\lambda)pf_{12}(q_{12}) - hdR(2,\lambda)f_{12}(q_{12}) -$$
$$-hdR(1,\lambda)f_1(q_{12}) - dR(1,\lambda)pf_1(q_{12}) - pf_1(q_{12}).$$

Annak igazolására, hogy a második derivált mindig nagyobb, mint nulla, a kapott pozitív és negatív tagokból „párokat” képezhetünk. Bármely pár esetén a pozitív tag mindig nagyobb vagy egyenlő a negatív taggal. A párok rendre:

1. $pf_{12}(q_{12}) - dR(2,\lambda)pf_{12}(q_{12}) \geq 0$, mert $dR(2,\lambda)$ értéke legfeljebb 1 lehet.
2. $hf_{12}(q_{12}) - hdR(2,\lambda)f_{12}(q_{12}) \geq 0$, mert $dR(1,\lambda)$ értéke legfeljebb 1 lehet.
3. $hf_1(q_{12}) - hdR(1,\lambda)f_1(q_{12}) \geq 0$, mert $dR(1,\lambda)$ értéke legfeljebb 1 lehet.
4. $dR(2,\lambda)pf_1(q_{12}) - dR(1,\lambda)pf_1(q_{12}) \geq 0$, mert $dR(1,\lambda)$ értéke mindig kisebb, mint $dR(2,\lambda)$.
5. $pf_1(q_{12}) - pf_1(q_{12}) = 0$.

Megvizsgálva a kapott eredményt belátható, hogy $\frac{\partial^2 K}{\partial q_{12}^2} > 0$ minden esetben, mivel p és h egyaránt pozitív egészek, valamint az egyes periódusokhoz tartozó sűrűségfüggvény értékek mind pozitívak. Így pedig $\frac{\partial\, K(q_{12})}{\partial^2\, q_{12}} \geq 0$, azaz K_{12} konvex a $[0,\infty)$ intervallumon.

A.8.2. A termékkifutás költségfüggvénye három periódusra

Jelen függelékben a termékkifutással kiegészített modell megoldását mutatom be három periódus együttes gyártása esetén. A megoldás menete megegyezik a két periódusos modellnél bemutatottakkal. A termékkifutással bővített modell három periódusra értelmezett költségfüggvénye a következő:

$$\begin{aligned}K_{123}(q_{123}) = c_f + c_v\left[q_{123} - I\right] + haE\left[q_{123} - D_1\right]^+ + hbE\left[q_{123} - D_{12}\right]^+ + hcE\left[q_{123} - D_{123}\right]^+ + \\ +apE\left[D_1 - q_{123}\right]^+ + bpE\left[D_{12} - q_{123}\right]^+ + cpE\left[D_3 + \left[D_2 + \left[D_1 - q_{123}\right]^-\right]^-\right]^+ + \\ +dR\left(1,\lambda\right)\ E\left[q_{123} - D_1\right]^+ + dR\left(2,\lambda\right)\ E\left[q_{123} - D_{12}\right]^+ + dR\left(3,\lambda\right)\ E\left[q_{123} - D_{123}\right]^+,\end{aligned}$$

ahol

$$a = 1 - dR(1,\lambda), \quad b = 1 - dR(2,\lambda) \quad \text{és} \quad c = 1 - dR(3,\lambda).$$

Az (A.3) függelékben ismertetett módon a függvény bonyolult utolsó tagját egyszerűbb alakra hozva:

$$\begin{aligned}cpE\left[D_3 + \left[D_2 + \left[D_1 - q_{123}\right]^-\right]^-\right]^+ = \\ = cp\left(E\left[D_{123} - q_{123}\right]^+ - E\left[D_{12} - q_{123}\right]^+ - E\left[D_1 - q_{123}\right]^+\right).\end{aligned}$$

A költségfüggvény ekkor az átalakított büntető költség taggal a következő alakban írható:

$$\begin{aligned}K_{123}(q_{123}) = c_f + c_v\left[q_{123} - I\right] + haE\left[q_{123} - D_1\right]^+ + hbE\left[q_{123} - D_{12}\right]^+ + \\ +hcE\left[q_{123} - D_{123}\right]^+ + apE\left[D_1 - q_{123}\right]^+ + bpE\left[D_{12} - q_{123}\right]^+ + \\ +cp\left(E\left[D_{123} - q_{123}\right]^+ - E\left[D_{12} - q_{123}\right]^+ - E\left[D_1 - q_{123}\right]^+\right) + R\left(1,\lambda\right)\ E\left[q_{123} - D_1\right]^+ + \\ +dR\left(2,\lambda\right)\ E\left[q_{123} - D_{12}\right]^+ + dR\left(3,\lambda\right)\ E\left[q_{123} - D_{123}\right]^+.\end{aligned}$$

A várható érték definíciója alapján az egyes tagok kifejtve a következők:

$$haE\left[q_{123} - D_1\right]^+ = h\left[q_{123}\int_0^{q_{123}} f_1(x_1)dx_1 - \int_0^{q_{123}} f_1(x_1)dx_1\right],$$

$$hbE\left[q_{123} - D_{12}\right]^+ = h\left[q_{123}\int_0^{q_{123}} f_{12}(x_{12})dx_{12} - \int_0^{q_{123}} x_{12}f_{12}(x_{12})dx_{12}\right],$$

$$hcE\left[q_{123} - D_{123}\right]^+ = h\left[q_{123}\int_0^{q_{123}} f_{123}(x_{123})dx_{123} - \int_0^{q_{123}} x_{123}f_{123}(x_{123})dx_{123}\right],$$

$$apE\left[D_1 - q_{123}\right]^+ = ap\left[\int_{q_{123}}^{\infty} x_1 f_1(x_1)dx_1 - q_{123}\int_{q_{123}}^{\infty} f_1(x_1)dx_1\right],$$

$$bpE\left[D_{12}-q_{123}\right]^{+}=bp\left[\int\limits_{q_{123}}^{\infty}x_{12}f_{12}(x_{12})dx_{12}-q_{123}\int\limits_{q_{123}}^{\infty}f_{12}(x_{12})dx_{12}\right],$$

$$cpE\left[D_{123}-q_{123}\right]^{+}=cp\left[\int\limits_{q_{123}}^{\infty}x_{123}f_{123}(x_{123})dx_{123}-q_{123}\int\limits_{q_{123}}^{\infty}f_{123}(x_{123})dx_{123}\right],$$

$$-cpE\left[D_{12}-q_{123}\right]^{+}=cp\left[\int\limits_{q_{123}}^{\infty}x_{123}f_{12}(x_{12})dx_{12}-q_{123}\int\limits_{q_{123}}^{\infty}f_{12}(x_{12})dx_{12}\right],$$

$$-cpE\left[D_{1}-q_{123}\right]^{+}=cp\left[\int\limits_{q_{123}}^{\infty}x_{1}f_{1}(x_{1})dx_{1}-q_{123}\int\limits_{q_{123}}^{\infty}f_{1}(x_{1})dx_{1}\right],$$

$$dR\left(1,\lambda\right)\ E\left[q_{123}-D_{1}\right]^{+}=dR\left(1,\lambda\right)\left[q_{123}\int\limits_{0}^{q_{123}}f_{1}(x_{1})dx_{1}-\int\limits_{0}^{q_{123}}f_{1}(x_{1})dx_{1}\right],$$

$$dR\left(2,\lambda\right)\ E\left[q_{123}-D_{12}\right]^{+}=dR\left(2,\lambda\right)\left[q_{123}\int\limits_{0}^{q_{123}}f_{12}(x_{12})dx_{12}-\int\limits_{0}^{q_{123}}x_{12}f_{12}(x_{12})dx_{12}\right],$$

$$dR\left(3,\lambda\right)\ E\left[q_{123}-D_{123}\right]^{+}=dR\left(3,\lambda\right)\left[q_{123}\int\limits_{0}^{q_{123}}f_{123}(x_{123})dx_{123}-\int\limits_{0}^{q_{123}}x_{123}f_{123}(x_{123})dx_{123}\right].$$

A korábbiakhoz hasonlóan célunk olyan készletezési mennyiség meghatározása, amely minimális költségeket eredményez a beszállítónak. Ezért q_{123} mennyiség szerinti szélsőérték számítást végezve a tagok deriváltjai a következők:

$$\frac{\partial\, haE\left[q_{123}-D_{1}\right]^{+}}{\partial\, q_{123}}=h\left[\int\limits_{0}^{q_{123}}f_{1}(x_{1})dx_{1}-q_{123}f_{1}(q_{123})-q_{123}f_{1}(q_{123})\right]=$$

$$=h\int\limits_{0}^{q_{123}}f_{1}(x_{1})dx_{1}=hF_{1}(q_{123}),$$

$$\frac{\partial\, hbE\left[q_{123}-D_{12}\right]^{+}}{\partial\, q_{123}}=h\left[\int\limits_{0}^{q_{123}}f_{12}(x_{12})dx_{12}+q_{123}f_{12}(q_{123})-q_{123}f_{12}(q_{123})\right]=$$

$$=hF_{12}(q_{123}),$$

$$\frac{\partial\, hcE\left[q_{123}-D_{123}\right]^{+}}{\partial\, q_{123}}=h\left[\int\limits_{0}^{q_{123}}f_{123}(x_{123})dx_{123}+q_{123}f_{123}(q_{123})-q_{123}f_{123}(q_{123})\right]=$$

$$=hF_{123}(q_{123}),$$

$$\frac{\partial\, apE\left[D_{1}-q_{123}\right]^{+}}{\partial q_{123}}=ap\left[q_{123}f_{1}(q_{123})-\int\limits_{q_{123}}^{\infty}f_{1}(x_{1})dx_{1}-\ q_{123}f_{1}(q_{123})\right]=$$

$$=-ap\left(1-F_{1}(q_{123})\right),$$

$$\frac{\partial\ bpE\left[D_{12}-q_{123}\right]^{+}}{\partial q_{123}}=bp\left[q_{123}f_{12}(q_{123})-\int\limits_{q_{123}}^{\infty}f_{12}(x_{12})dx_{12}-q_{123}f_{12}(q_{123})\right]=$$

$$=-bp\left(1-F_{12}(q_{123})\right),$$

$$\frac{\partial\ cpE\left[D_{123}-q_{123}\right]^{+}}{\partial q_{123}}=cp\left[q_{123}f_{123}(q_{123})-\int\limits_{q_{123}}^{\infty}f_{123}(x_{123})dx_{123}-q_{123}f_{123}(q_{123})\right]=$$

$$=-cp\left(1-F_{123}(q_{123})\right),$$

$$\frac{-\partial\, cpE\left[D_{12}-q_{123}\right]^{+}}{\partial q_{123}}=cp\left[q_{123}f_{12}(q_{123})-\int\limits_{q_{123}}^{\infty}f_{12}(x_{12})dx_{12}-q_{123}f_{12}(q_{123})\right]=$$

$$=cp\left(1-F_{12}(q_{123})\right),$$

$$\frac{-\partial\, cpE\left[D_{1}-q_{123}\right]^{+}}{\partial q_{123}}=cp\left[q_{123}f_{1}(q_{123})-\int\limits_{q_{123}}^{\infty}f_{1}(x_{1})dx_{1}-q_{123}f_{1}(q_{123})\right]=$$

$$=cp\left(1-F_{1}(q_{123})\right),$$

$$\frac{\partial\left(dR\left(1,\lambda\right)\ E\left[q_{123}-D_{1}\right]^{+}\right)}{\partial q_{123}}=$$

$$=dR\left(1,\lambda\right)\left[\int\limits_{0}^{q_{123}}f_{1}(x_{1})dx_{1}-q_{123}f_{1}(q_{123})-q_{123}f_{1}(q_{123})\right]=dR\left(1,\lambda\right)F_{1}(q_{123}),$$

$$\frac{\partial\left(dR\left(2,\lambda\right)\ E\left[q_{123}-D_{12}\right]^{+}\right)}{\partial\, q_{123}}=$$

$$=dR\left(2,\lambda\right)\left[\int\limits_{0}^{q_{123}}f_{12}(x_{12})dx_{12}+q_{123}f_{12}(q_{123})-q_{123}f_{12}(q_{123})\right]=dR\left(2,\lambda\right)\ F_{12}(q_{123}),$$

$$\frac{\partial\left(dR\left(3,\lambda\right)\ E\left[q_{123}-D_{123}\right]^{+}\right)}{\partial\, q_{123}}=$$

$$=dR\left(3,\lambda\right)\left[\int\limits_{0}^{q_{123}}f_{123}(x_{123})dx_{123}+q_{123}f_{123}(q_{123})-q_{123}f_{123}(q_{123})\right]=dR\left(3,\lambda\right)\ F_{123}(q_{123}).$$

Visszahelyettesítve a deriválás után kapott formulákat a vizsgált összefüggésbe kapjuk:

$$\frac{\partial\, K(q_{123})}{\partial\, q_{123}}=c_v+haF_1(q_{123})+hbF_{12}(q_{123})+hcF_{123}(q_{123})-ap\left(1-F_1(q_{123})\right)-bp\left(1-F_{12}(q_{123})\right)-$$

$$-cp\left(1-F_{123}(q_{123})\right)+cp\left(1-F_{12}(q_{123})\right)+cp\left(1-F_1(q_{123})\right)+dR\left(1,\lambda\right)F_1(q_{123})+$$

$$+dR\left(2,\lambda\right)\ F_{12}(q_{123})+dR\left(3,\lambda\right)\ F_{123}(q_{123}).$$

A függvény átrendezése után kapjuk, hogy:

$$F_{123}(q_{123}) = \frac{c_v + p(-a-b+c) + haF_1(q_{123}) + hbF_{12}(q_{123}) + apF_1(q_{123}) + bpF_{12}(q_{123})}{-hc - p + dR(3,\lambda)(p-1)} + \\ + \frac{-cpF_{12}(q_{123}) - cpF_1(q_{123}) + dR(1,\lambda)F_1(q_{123}) + dR(2,\lambda)F_{12}(q_{123})}{-hc - p + dR(3,\lambda)(p-1)} .$$

Az a, b és c-re vonatkozó összefüggések behelyettesítésével a megoldás alakja:

$$F_{123}(q_{123}) = \frac{c_v - p + h(F_1(q_{123}) + F_{12}(q_{123})) + pdR(3,\lambda)(F_1(q_{123}) + F_{12}(q_{123}))}{-h - p - dR(3,\lambda)(1-h-p)} + \\ + \frac{-p(dR(2,\lambda)F_{12}(q_{123}) + dR(1,\lambda)F_1(q_{123})) + p\,(dR(1,\lambda) + dR(2,\lambda) - dR(3,\lambda))}{-h - p - dR(3,\lambda)(1-h-p)} + \\ + \frac{dR(1,\lambda)F_1(q_{123})(1-h) + dR(2,\lambda)F_{12}(q_{123})(1-h)}{-h - p - dR(3,\lambda)(1-h-p)} .$$

Előjelváltás után a megoldás:

$$F_{123}(q^*_{123}) = \frac{p - c_v - h(F_1(q^*_{123}) + F_{12}(q^*_{123})) - pdR(3,\lambda)(F_1(q^*_{123}) + F_{12}(q^*_{123}))}{dR(3,\lambda)(1-h-p) + h + p} + \\ + \frac{p(dR(2,\lambda)F_{12}(q^*_{123}) + dR(1,\lambda)F_1(q^*_{123})) - p\,(dR(1,\lambda) + dR(2,\lambda) - dR(3,\lambda))}{dR(3,\lambda)(1-h-p) + p + h)} - \\ - \frac{dR(1,\lambda)F_{12}(q^*_{123})(1-h) + dR(2,\lambda)F_1(q^*_{123})(1-h)}{dR(3,\lambda)(1-h-p) + p + h} . \tag{A.5}$$

A K_{123} függvény második deriváltjai a két periódusos esethez hasonlóan képezhetők, ennek részletezését az értekezés nem tárgyalja. Az ott alkalmazott gondolatmenetre támaszkodva belátható, hogy $\frac{\partial^2 K}{\partial q^2_{123}} > 0$ minden esetben, ezáltal K_{123} konvex a $[0,\infty)$ intervallumon.

A.8.3. A termékkifutás költségfüggvénye tetszőleges hosszú véges időhorizontra

A termékkifutással kiegészített modell két és három periódusra bemutatott megoldásai alapján felírható a tetszőleges hosszú, véges időhorizontra vonatkozó megoldás is. A részletek elhagyása mellett csupán a végeredmény bemutatására szorítkozom. Az áttekinthetőbb forma érdekében az alábbi, tömörebb jelölésrendszer bevezetése vált szükségessé.

$$F^1_n(q^*_{123\ldots n}) = \frac{p - c_v - h\left(\sum_{i=1}^{n-1} F^1_i(q^*_{123..n})\right) - pdR(n,\lambda)\left(\sum_{i=1}^{n-1} F^1_i(q^*_{123..n})\right)}{dR(n,\lambda)(1-h-p) + h + p} + \\ + \frac{p\left(\sum_{i=1}^{n-1} dR(i,\lambda)F^1_i(q^*_{123..n})\right) - p\left(\sum_{i=1}^{n-1} dR(i,\lambda) - dR(n,\lambda)\right) - \sum_{i=1}^{n-1} dR(i,\lambda)F^1_i(q^*_{123..n})(1-h)}{dR(n,\lambda)(1-h-p) + h + p} .$$

Megfelelő tagok kiemelése után a megoldás egy szemléletesebb formája áll elő.

$$F_n^1(q^*_{123\ldots n}) = \frac{p - c_v - \left(\sum\limits_{i=1}^{n-1} F_i^1(q^*_{123..n})\right)(h + pdR(n,\lambda))}{dR(n,\lambda)(1-h-p)+h+p} +$$
$$+\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n-1} dR(i,\lambda)F_i^1(q^*_{123..n})\right)(h+p-1) - p\left(\sum\limits_{i=1}^{n-1} dR(i,\lambda) - dR(n,\lambda)\right)}{dR(n,\lambda)(1-h-p)+h+p}, \tag{A.6}$$

melyben F_i^1 jelenti az i darab periódus együttes gyártásakor megjelenő együttes eloszlásfüggvényt (korábbi jelölése: $F_{123\ldots i}$).