

MISKOLCI EGYETEM



GÉPÉSZMÉRNÖKI KAR

ÉRINTKEZÉSI FELADATOK NUMERIKUS VIZSGÁLATA

Ph.D. értekezés tézisei

KÉSZÍTETTE:

Baksa Attila

okleveles mérnök-informatikus

SÁLYI ISTVÁN GÉPÉSZETI TUDOMÁNYOK DOKTORI ISKOLA

GÉPÉSZETI ALAPTUDOMÁNYOK TÉMATERÜLET

SZILÁRD TESTEK MECHANIKÁJA TÉMACSOPORT

DOKTORI ISKOLA VEZETŐ:

Dr. Páczelt István

az MTA rendes tagja

TÉMACSOPORT VEZETŐ:

Dr. Kozák Imre

az MTA rendes tagja

TÉMAVEZETŐ:

Dr. Páczelt István

az MTA rendes tagja

Miskolc, 2005.

Baksa Attila

ÉRINTKEZÉSI FELADATOK NUMERIKUS VIZSGÁLATA

Ph.D. értekezés tézisei

Miskolc, 2005.

Bíráló bizottság

Elnök:

Dr. habil Jármai Károly, DSc

ME, egyetemi tanár

Titkár:

Dr. Szabó Ferenc, CSc

ME, egyetemi docens

Tagok:

Dr. habil Juhász Imre, CSc

ME, egyetemi docens

Dr. Vörös Gábor, CSc

BME, egyetemi docens

Dr. habil Váradi Károly, DSc

BME, egyetemi tanár

Hivatalos bírálók:

Dr. habil Kurutzné Kovács Márta, akadémikus

BME, egyetemi tanár

Dr. Kovács Béla, CSc

ME, egyetemi docens

1. BEVEZETÉS

Mára megnőtt a jelentősége az olyan peremérték feladatok vizsgálatának, melyek magukba foglalják az érintkezési problémakört is. Ezek nemcsak ipari feladatoknál, hanem környezetvédelmi vagy orvosi alkalmazásokban is felmerülnek. Lényegében minden mozgás kapcsolatban van az érintkezéssel és a súrlódással. A járás, a futás, a kerékpározás, az autóval vagy vasúttal történő közlekedés, mind-mind érintkezés révén valósulhat meg. Abból adódóan, hogy az a felület, amellyel a cipőnk talpa, vagy az autó abroncsa valójában érintkezik, kezdetben nem ismeretes, egy egyszerűnek tűnő hétköznapi probléma is nemlineáris peremérték feladat felállításához vezet.

Az érintkezés jelensége a mérnöki feladatokban leggyakrabban a különböző mechanikai alkatrészek egymással való érintkezésekor merül fel. Számos mechanikai terhelés ilyen jellegű kapcsolatokból származik. Ennek a folyamatnak a vizsgálata, a mérnöki tervezés és elemzés során kulcsfontosságú.

Az érintkezési – vagy *kontakt* – feladatokat, erős nemlineáris jellegük miatt, korábban csak speciális feltételezések mellett tudták figyelembe venni a tervezési folyamat során. A számítástechnika és a mérnöki tudományok fejlődésének köszönhetően, ma már számtalan lehetőség áll rendelkezésre a numerikus mechanika eszköztárában arra, hogy az érintkezési jelenségeket kezeljük. Ezek között az eljárások között számtalan olyan van, mellyel megfelelő pontossággal megoldhatjuk a kontakt feladatot azért, hogy már a tervezéskor figyelembe vehessük a működés közbeni érintkezések hatásait. Itt kell megállapítani azonban azt a tényt, hogy a ma elérhető általánosan használt végeselemes programrendszerek nem minden esetben alkalmazhatóak az érintkezés problémakörének vizsgálatára. Ezért a végeselem-módszerrel foglalkozó kutatók számára komoly kihívást jelent az, hogy hatékony, megbízható módszereket, eljárásokat dolgozzanak ki az érintkezési feladatok numerikus megoldása érdekében.

1.1. Irodalmi előzmények

Tekintettel a technikai fontosságra, az érintkezés problémaköre már a múltban is sok kutatót foglalkoztatott. Mindannyian ismerjük a tényt, hogy már az ókori Egyiptomban szükség volt arra, hogy hatalmas kőtömböket mozgassanak a piramisok felépítéséhez. Ezzel kapcsolatban fel kellett, hogy merüljön az érintkezés, illetve az egyszerűbb mozgatás problémája.

Mivel a súrlódásnak komoly technikai jelentősége van, ezért ezt már számtalan tudós vizsgálta. Köztük talán legelsőként LEONARDO DA VINCI (1452-1519) említhető meg, akit a mai modern tribológia atyjaként is emlegetnek. Ő már 150 évvel AMONTONS súrlódási törvényei előtt leírta kéziratában az AMONTONS-féle megállapításokat.

Az első, matematikai szempontból elvégzett elemzés EULER nevéhez fűződik, aki háromszögekkel közelítette a felület egyenletlenségét [4]. Ő vonta le a következtetést a tömeg mozgási egyenletének megoldásából arra vonatkozóan, hogy a kinetikai súrlódási együtthatónak kisebbnek kell lennie a tapadási súrlódási együtthatónál. Valójában EULER volt, aki először használta a μ szimbólumot a súrlódási együttható jelölésére, mely mind a mai napig elfogadott jel.

COULOMB átfogó kísérleti tanulmányt végzett 1785-ben [3] és a következőt állapította meg. A súrlódás kapcsolatban áll a normál nyomással, a felület nagyságával, az anyagjellemzőkkel, a felületi bevonattal, a környezeti feltételekkel – úgymint nedvesség, hőmérséklet és légnyomás – és a súrlódási erő időfüggésével.

Az érintkezés jelenségével kapcsolatos kutatások gyökerei legalább a 18. századig nyúlnak vissza. Akkoriban az érintkezésben résztvevő testeket merevnek tekintették, alapvetően azért, hogy a formulákat egyszerűen tudják kezelni. Ennek következtében azonban a testekben ébredő feszültségeket és az alakváltozásokat nem tudták meghatározni. Az első analitikus megoldás, mely már rugalmas testekkel foglalkozott, HERTZ-től származik [7]. A HERTZ-féle érintkezési elmélet segítségével csak az érintkezési pont, vagy vonal közvetlen környezetében határozhatók meg a feszültségek és az alakváltozások. Ezzel a módszerrel tehát csak nagyon speciális feladatokat tudunk vizsgálni. Ezt az elméletet azonban a kontakt mechanika fontos mérföldkövének tekinthetjük. Az egyoldalú érintkezési feladatok általános érvényű formalizmusát SIGNORINI publikálta 1933-ban [26], felállítva a peremérték feladatot egy rugalmas és egy merev test érintkezésekor. Néhány speciális statikai és dinamikai rugalmas érintkezést vizsgált GOLDSMITH 1960-ban, úgymint két rúd vagy egy rugalmas test és egy sík kontakt feladata [5]. Ebben analitikus megoldásokat szolgáltatott a problémákra, csatolva hozzájuk kísérleti eredményeket is. Azonban csak nagyon kevés valóságos érintkezési feladat oldható meg analitikus módon. JOHNSON 1985-ben megjelent könyve áttekintést ad ezekről a feladattípusokról [9].

Az érintkező alkatrészek szilárdsági vizsgálatához nem elegendő csak az érintkezési helyeken létrejövő maximális érintkezési nyomás meghatározása; a feszültségi állapot teljes jellemzéséhez szükséges a testek minden pontjában a főfeszültségek ismerete. Korábbi munkákban a feszültségi állapotot a kör alakú és a párhuzamos egyenesekkel határolt sáv alakú érintkezési tartomány eseteiben vizsgálták, melyek elemzéséhez zárt alakú képleteket kaptak, mind a kialakuló érintkezési tartomány jellemző méreteire, mind az érintkezési nyomás eloszlására. Ezek összefoglalását PONORMAJOV tette meg 1958-ban [25], oly módon, hogy a mérnökök matematikai tájékozottságának megfelelő részletességgel mutatja be az elliptikus érintkezési tartományhoz tartozó geometriai és szilárdsági jellemzők meghatározásának módját.

TIMOSHENKO és GOODIER 1970-ben megjelent rugalmasságtan könyvében [28] az érintkezési alakváltozások elmélete kör alakú érintkezési felület esetében kerül bemutatásra. Ebben a tárgyalási módban az érintkezési feladatot a rugalmas féltérre – mely egy igen nagy kiterjedésű test és a működő erőre merőleges sík határol – ható koncentrált erő által felírható hatásmátrix segítségével kezeljük. Az érintkezési feszültségek és alakváltozások vizsgálatának ezen módszere a mérnökök és technikusok széles köre számára hozzáférhető, mellyel lehetséges két összenyomódó alkatrész elliptikus érintkezési tartományának elemzése általános esetben is.

A testek érintkezési alakváltozásainak vizsgált kérdéséhez szorosan kapcsolódik a rugalmas test alakváltozásának problémája tetszőleges alakú merev bélyeg benyomódása esetén. A kör és elliptikus, sík és térbeli bélyegekkal kapcsolatban több feladatot LUR'E vizsgált meg az 1964-es [14] munkájában. Két rugalmas test kezdeti pontszerű érintkezési feladatával matematikailag egyenértékű feladatot, a térbeli elliptikus bélyeg feladatát vizsgálta.

Variációs egyenlőtlenségek felállításával lehetőség van minden kapcsolódó peremfeltétel – beleértve az érintkezés és elválás feltételeit is – figyelembevételére. KIKUTCHI és ODEN variációs egyenlőtlenségek segítségével vizsgálja a súrlódás nélküli érintkezési feladat esetén a megoldás létezését és egyértékűségét az 1988-as [10] publikációban. Kimutatták, hogy a rugalmasságtani problémáknál az érintkezési feladat virtuális munka elvből származtatott megoldása ugyanazt az eredményt adja, mint az, amely az érintkezési feltételekkel megfogalmazott potenciális energia minimuma elvből származik. Ezért a hagyományos optimalizáló eljárások lehetőségét adnak arra, hogy ezeket variációs egyenlőtlenségek

megoldására is alkalmazzuk. KIKUTCHI és ODEN ugyanebben a cikkben végelemek segítségével kezelte az egyoldalú érintkezési feladatokat, melyeknél a kialakuló érintkezési feszültség csak nyomófeszültség lehet. Ez a gyakorlat szempontjából azt jelenti, hogy a felületek nincsenek egymáshoz rögzítve például ragasztóval.

A LAGRANGE-féle *multiplikátoros módszer* keretein belül az érintkezési-elválási feltételek egzakt módon kielégíthetők, a módszer által igényelt pótlólagos ismeretlenek révén. Ezeket az ismeretlen szorzótényezőket LAGRANGE-féle multiplikátornak nevezzük. A *büntetőparaméteres* technika úgy ismert, mint a legegyszerűbb fizikai tartalommal is rendelkező módszer. Ennek az eljárásnak könnyű a programozhatósága, hátránya viszont, hogy a megoldás pontossága nagymértékben függ a büntetőparaméter megválasztásától, mivel annak nagysága jelentősen befolyásolja a megoldandó egyenletrendszer kondícióját. Ez azért van így, mert az érintkezési feltételek akkor lennének nagy pontossággal biztosítva, ha a büntetőparaméter végtelen nagyságú lenne. A *módosított* LAGRANGE-féle *multiplikátoros* technika egy olyan iteratív eljárás, mely magába foglalja a hagyományos büntetőparaméteres tagot és az előző iterációs lépésben kapott elmozdulás alapján kiszámolt LAGRANGE-féle multiplikátoros tagot. Ezen módszerek jellemzőit foglalta össze ARORA szerzőtársaival az [1] cikkben.

Ha a normál irányú erők eloszlását ismertnek tételezzük fel a kontakt tartomány mentén, akkor a súrlódásos feladat variációs egyenlőtlenségeit is definiálhatjuk, úgy ahogyan PANAGIOTOPOULOS tette [23]. A variációs egyenlőtlenség megoldása lényegében egy nem differenciálható optimalizációs probléma megoldását jelenti. A nem differenciálható természetét a feladatnak az adja, hogy jelen van a nem differenciálható súrlódási energia tag a célfüggvényben.

A végelem-módszer együtt fejlődött ki az egyre gyorsuló modern számítógépekkel. Az ötvenes évek végén jelent meg egy publikáció, melyben arról írtak, hogy végelemek segítségével oldottak meg szerkezeti problémákat (lásd TURNER és munkatársai 1956-ban megjelent cikkét [29]). Ezt követően az irodalom hihetetlen mértékben nőni kezdett, mivel az iparban nagy szükség volt olyan feladatok megoldására is, amelyeket analitikus úton már nem tudtak kezelni. Ezután még nagyjából 10 év telt el, míg megjelentek olyan publikációk, melyekben már érintkezési feladatok végeleemes megoldásáról szóltak. Ezek közül is talán az első, WILSON és PARSONS 1970-es publikációja [30].

A végelem-módszer három típusáról szokás beszélni annak alapján, hogy milyen módon lehetséges a megoldás pontosítása. A megoldás javítását elérhetjük úgy, hogy a végelemek méretét csökkentjük – azaz növeljük a végelemek számát –, ekkor h -verziós módszerrel dolgozunk. A számítás pontosítása azonban elérhető oly módon is, hogy az elemek méretét változatlanul hagyjuk, ellenben az elemeken működő alakfüggvények p fokszámát változtatjuk. Ezzel tulajdonképpen szintén a feladatban szereplő ismeretlenek számát növeljük, és így jutunk az úgynevezett p -verziós végelemekhez. E két technika párhuzamos, összehangolt alkalmazásával kapjuk a hp -verziós végelem-módszert.

A p -verziós végelem-módszer alapjait SZABÓ és BABUŠKA foglalta össze az 1991-ben megjelent könyvben [27]. Bebizonyították, hogy a p -verziós elemek alkalmazása – ugyanannyi ismeretlenszám esetén – általában jobb megoldást nyújt, mint a h -verziós elemeké. A szingularitásokat is tartalmazó feladatok esetében a hp -verziós elemek segítségével exponenciális konvergenciát érhetünk el az energianorma tekintetében [27].

Egy további SZABÓ és BABUŠKA által bevezetett osztályozás a végelem-módszerrel kezelt feladatokat három típusba sorolja aszerint, hogy az $\mathbf{u}_{ex}$ tényleges megoldás milyen a vizsgált tartományon [27]. A feladat az A típusba tartozik, ha a választott felosztástól függetlenül a teljes elemen analitikus megoldást kapunk. A B típusú feladatban az elemfelosztás oly módon történik, hogy véges számú pontot, vagy éleket kivéve a megoldás az elemen analitikus, azaz a nem analitikus helyek a végelem-határra, vagy csomópontba kerülnek. Ha azonban az elemfelosztás nem lehetséges úgy, hogy az $\mathbf{u}_{ex}$ tényleges megoldásban tapasztalható ugrásszerű változás az elemhatárra vagy a csomópontba kerüljön, akkor C típusú feladatot vizsgálunk. Érintkezési feladatoknál szükséges az elemhatárok változtatása, mellyel elérhető, hogy az ún. C típusú feladat B típusú legyen. Az elemhatárok ilyen célú mozgztatásával elsőként PÁCZELT és szerzőtársai a [19] cikkben foglalkoztak.

Különböző típusú kétdimenziós érintkezési feladatokat vizsgáltak a [17] publikáció szerzői. Kétdimenziós érintkezési feladatok esetén iterációs technikával a p -verziós elemek igen jó megoldást szolgáltatnak az érintkezési tartomány határának keresésekor.

A különböző gépelemek feszültségállapotát jelentősen befolyásolja az érintkező elemek geometriai kialakítása, formája. Nemcsak a legáltalánosabban használt gépalkatrészek – úgymint illesztett szárú csavarok, görgős-, vagy golyóscsapágyak elemei –, hanem akár a legbonyolultabb

szerszámgépek esetében is rendkívüli jelentősége van az egymással érintkezésbe kerülő gépelemek, alkatrészek optimális tervezésének. A szingularitások elkerülése, illetve a működés közben felmerülő, terhelés következtében létrejövő feszültségállapotot hosszú távon elviselő szerkezetek létrehozása az elsődleges cél, melyhez sok esetben speciális megfontolások szükségesek.

Optimalizálási feladatok során gyakran tekintjük tervezési paraméternek például az anyagjellemzőket, az alakot és méretet jellemző mérőszámokat, terheléseket, a gépelemek közötti kapcsolatok jellegét, illetve a kapcsolódó gépelemek topológiáját, amivel részletesen foglalkozott MRÓZ a [15] dolgozatban. A mérnöki gyakorlatban a gépelemek közötti kapcsolatokat sok esetben egyoldalú érintkezési feladatként modellezzük, erről olvashatunk számtalan munkát, ha a kontakt feladatok irodalmát vizsgáljuk [12, 8]. HASLINGER és NEITTAANMAKI [6] könyve széleskörűen ismerteti az érintkezési feladatok kapcsán felállítható optimalizációs problémák matematikai hátterét. Találkozhatunk korábbi munkákkal, melyekben célfüggvényként a maximális érintkezési nyomást vizsgálták, úgymint CONRY és SEIREG cikke [2], vagy PÁCZELT és HERPAI munkája [18]. Az érintkezési nyomás azonban egy nem folytonosan differenciálható függvény, mely az optimalizálás során problémákat vet fel. A [11], [13] és a [24] cikkek a teljes potenciális energiát veszik fel költségfüggvénynek, míg a hézagfüggvény integrál értelemben vett mellékfeltételként szerepel az optimalizációs feladatban.

Rugalmas vagy merev testként modellezett henger és egy lineárisan rugalmas test érintkezési feladatát vizsgálta optimalizálási szempontból számtalan szerző, úgymint KIKUCHI és TAYLOR [11], KLARBRING és HASLINGER [13], vagy PÁCZELT és SZABÓ [20, 22]. Az érintkezési nyomás megoszlásának vezérlésével valósítottak meg alakoptimalizálást, h - és p -verziós végelelem-módszer használatával a szerzők [21]-ben. Egy összefoglaló munkában PÁCZELT mutat különböző gyakorlati problémákra megoldást, az érintkezési nyomás megoszlásának vezérlésével, amikor az érintkező testek egyike merevtestszerű elmozdulással és elfordulással is rendelkezik [16].

1.2. Célkitűzések

Jelen értekezés az érintkezési feladatok numerikus vizsgálatát tekinti elsődleges feladatának. Két alapvető irányban folytatunk kutatást. Egyrészt megvizsgáljuk a tengelyszimmetrikus érintkezési feladatok kapcsán

felállított alakoptimalizálási feladatokat. Másrészt a térbeli érintkezés problémakörét kívánjuk áttekinteni és újfajta szemlélettel kezelni.

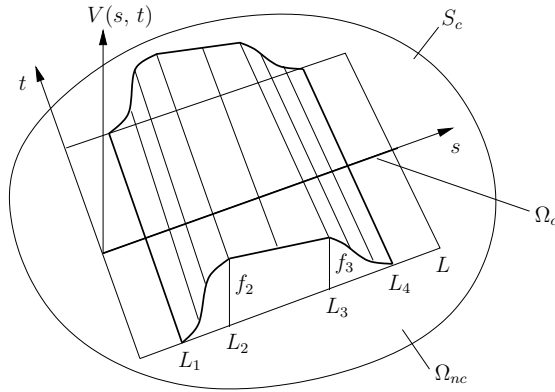
- Új típusú optimalizálási feladatokat kívánunk felállítani arra vonatkozóan, miszerint a gyakorlati feladatoknál mindig tekintettel kell lenni arra, hogy a valóságos anyag nem terhelhető tetszőleges mértékben. A különböző rugalmas anyagú gépelemek tönkremenetelét a mérnöki gyakorlatban elsősorban az anyagra megengedett és az anyagban kialakuló redukált maximális feszültségek egymáshoz képesti viszonya szabja meg.
- A felállított alakoptimalizációs feladatokra megoldási eljárást kívánunk kidolgozni, mely beépíthető a létező p -verziós számítógépi programunkba a kidolgozott elvek működésének illusztrálása érdekében.
- Görgő alakú testek alakoptimalizálási kérdéseit szeretnénk megvizsgálni olyan tekintetben, hogy a már létező optimalizálási lehetőségek hogyan fejleszthetők tovább a különböző terhelési esetek függvényében. Meg kívánjuk vizsgálni a gördüléssel érintkezés problémakörét is azzal a céllal, hogy meggyőződjünk arról, hogy a súrlódás hatása az alakoptimalizálás során a görgő alakú testek érintkezésekor valóban elhanyagolható-e.
- A tengelyszimmetrikus feladatokon túllépve, háromdimenziós érintkezési feladat numerikus vizsgálatát kívánjuk megoldani p -verziós végesesemes program kifejlesztésével. Térbeli érintkezés esetén a kialakuló érintkezési tartomány már nem egy vonal, hanem esetünkben egy egyszeresen összefüggő felület, amelyet sima, zárt görbe határol. Ennek a felületnek a pontos azonosítása kulcskérdés e nemlineáris feladat hatékony és precíz megoldása érdekében.

Az érintkezési felület határát szeretnénk oly módon leírni, hogy az a numerikus szimulációk során számítógépi program által önállóan – „adaptív” módon – változtatható legyen azért, hogy a kezdeti C típusú feladot B típusúvá alakítsuk át, mivel így módon a p -verziós elemek alkalmazása továbbra is exponenciális konvergenciát nyújt a hibanorma tekintetében. Ennek érdekében meg kívánjuk vizsgálni a különböző paraméteres görbeleírási módszereket, elsősorban a B-spline és a NURBS görbéket, mivel ezek a geometriai modellezési technikák kielégítő rugalmasságot mutatnak, azaz a görbék alakja könnyen, néhány paraméter segítségével, változtatható.

2. A FELADATOK MEGOLDÁSI MÓDSZERE

Egy rugalmas testekből felépített háromdimenziós mechanikai rendszert tekintünk. A kölcsönhatásoknak csak a mechanikai jellegét vizsgáljuk, nem vesszük tehát figyelembe a testek mágneses, elektromos, termikus kölcsönhatásait, továbbá a testek egymásra gyakorolt gravitációs vonzóerejét is elhanyagoljuk. Feltételezzük, hogy a felmerülő elmozdulások és alakváltozások kicsik, továbbá a terhelés hatására létrejövő alakváltozás rugalmas. Másként fogalmazva, a lineáris rugalmasságtan keretei között keressük a megoldást.

Alakoptimalizálást az érintkezési nyomás megoszlásának vezérlésével valósítunk meg, különböző szempontok alapján. Bemutatunk egy általunk továbbfejlesztett vezérlő függvényt [17], melyet alkalmassá tettünk térbeli feladatok alakoptimalizálására is (lásd a 2.1. ábrán).



2.1. ábra: A nyomásmegoszlást vezérlő függvény

A következő optimalizációs feladattípusokat tekintettük:

1. Az érintkezési nyomás maximumának minimalizálása.
2. Merevtestszerű elmozdulás maximalizálása.
3. Redukált nyomaték vagy erő maximalizálása.
4. Súrlódási (kopási) teljesítményből származó veszteség minimalizálása.

5. Gördülő test alakoptimalizálása az érintkezési nyomás megoszlásának vezérlésével.

A 2–5. feladatokat úgy is megoldjuk, hogy az érintkezésben résztvevő testekre megengedett HUBER-MISES-HENKY, vagy röviden VON MISES-féle redukált feszültséget is figyelembe véve hajtunk végre alakoptimalizálást.

Az első négy optimalizálási feladat esetében p -verziós végelem-módszert alkalmazunk az érintkezési tartomány diszkretizálásához, míg a gördülőelem optimalizálásakor a hatásmátrix segítségével oldjuk meg az érintkezési feladatot, melynek során a disszertációban felírt tükrözési technikát is felhasználjuk.

Az általunk felállított alakoptimalizálási feladatokat az érintkezésben résztvevő anyagokra vonatkozó feszültségi mellékfeltétellel láttuk el. Ennek a figyelembevételéhez egy meglévő iterációs alakoptimalizálási algoritmust kiegészítettünk, ezáltal egy új linearizációra épülő iterációs eljárást dolgoztunk ki, ez a 2. típusú iteráció.

A tengelyszimmetrikus testek érintkezési feladatának megoldása után, az általunk vizsgált mennyiségek optimalizálása érdekében az érintkező testek alakját nyomásvezérlés segítségével oly módon változtatjuk, hogy a kitűzött célfüggvénynek megfelelően a numerikus megoldás.

A görgő alakú testek alakoptimalizálását módosított nyomásvezérlő függvény segítségével hajtjuk végre olyan esetekre, amikor a testek terhelése nem szimmetrikus módon történt és emiatt az optimalizálás nélküli görgők terheléshez közeli végeinél a normálirányú feszültségekben nagy szinguláris értékeket tapasztaltunk. Megvizsgáltuk a súrlódás hatását a gördülő elemek optimális alakjának meghatározásakor.

A numerikus számítási tapasztalatok azt mutatják, hogy p -verziójú végelemek használatakor a magasfokú polinomok felerősítik a szingularitások hatását, oszcillációt okoznak a megoldásban. Érintkezési feladatok esetén ez a feszültségmezőben tapasztalható hullámlás jelentősen csökkenthető, ha az S_c érintkezési tartományt teljesen lefedik a végelemek, azaz nincs olyan elem, amelynek egy része az Ω_p tényleges érintkezési tartományon belül van, míg a másik része az Ω_0 réstartományba esik.

Ez más szóval azt jelenti, hogy a kezdeti C típusú feladatot – mely alatt azt értjük, hogy a deriváltbeli szakadás nem esik az elemhatárra, azaz az elemen belül van – át kell alakítani B típusú feladatra, amikor is az említett szakadás az elemhatárra esik. Ehhez az S_c tartományra kifutó elemek alakját meg kell változtatni.

A végelemekről elvárt tulajdonság, hogy az elemhatár tetszőleges görbe vonalra tudjon illeszkedni. Ezt a legegyszerűbb módon az elemhez rendelt él- és lapmenti paramétereken keresztül, az elemen működő hierarchikus alakfüggvények segítségével valósíthatjuk meg. Az elemhatár approximációját a legkisebb hibanégyzetek elve szerint végezzük el.

A háromdimenziós érintkezési feladatok megoldásakor a kialakuló érintkezési tartomány alakjára nem teszünk megszorítást – csupán azt feltételezzük, hogy az érintkezési felület egyszeresen összefüggő –, így egy zárt paraméteres görbe interpolációval előállítható a kialakuló kontakthatár. Ez a leírási módszer azzal az egyértelmű előnnyel jár, hogy a vizsgálat tárgyát képező érintkezési és elválási határ sima, folytonos paraméteres görbe által leírt, mely könnyen, néhány kontrollpont által módosítható annak érdekében, hogy a végelemek pontosan az elválási határra illeszkedjenek.

A SZABÓ és BABUŠKA által bevezetett osztályozásban [27] az eredeti nemlineáris érintkezési feladat egyértelműen a C típusba sorolható, mivel az érintkezési és elválási tartományok határa előre nem ismert, vagyis a számítás során a kezdetben létrehozott végeselemes felosztást folyamatosan módosítani kell annak érdekében, hogy B típusú feladatot kapjunk, mely nagyobb pontossággal oldható meg. A B-spline, illetve a NURBS térgörbe leírási módszerek ehhez biztosítanak jól használható eszközt.

A térbeli érintkezési tartomány határát egyetlen, paraméteres térgörbével írjuk le. A *spline technika* alkalmazása nagy hatékonyságú, újszerű modellezési módszer az érintkezés problémájának kezelésére. Nagy előnye, hogy tetszőleges alakú sima görbét lehet vele előállítani és mindössze néhány vezérlő paraméterrel rendkívül rugalmas módon változtatható.

Az elemhatár-mozgatási technikát mind a tengelyszimmetrikus kétváltozós alakoptimalizálási példánál, mind a háromváltozós érintkezésre vonatkozó kontakt feladatoknál felhasználjuk.

Számítógépes program került kidolgozásra mind a kétváltozós optimalizálás, mind a háromdimenziós érintkezés p -verziós végeelem módszerrel történő vizsgálatára. A bemutatott technikák iterációs eljárásokra épülnek, melyek során az érintkezésben szerepet játszó elemek mozgását az algoritmus „adaptív” módon finomítja a lehető legjobb megoldás elérése érdekében. A numerikus számítások a két-, illetve a háromváltozós feladatoknál egyaránt igazolták, hogy nagypontosságú megoldás p -verziójú elemek használatával csak akkor érhető el, ha a számításokat

az Ω_p tényleges érintkezési altartományra lokalizált – transzformált – elemhatárokkal végezzük el.

3. ÚJ TUDOMÁNYOS EREDMÉNYEK

Az értekezés új tudományos eredményeit az alábbi tézisek foglalják össze:

1. Nyomásvezérlést felhasználva új érintkezési-optimalizációs feladatok nyertek megfogalmazást a bélyeg típusú érintkezési feladatok esetén, a redukált feszültségre vonatkozó korláttal, melyeket a 3.1. táblázat sorol fel $\langle 1 \rangle$, $\langle 2 \rangle$, $\langle 6 \rangle$, $\langle 7 \rangle$.

3.1. táblázat: Optimalizált mennyiségek

w_0	előírt elmozdulás maximalizálása
F_p	összeszorító erő maximalizálása
M_T	átvihető csavarónyomaték maximalizálása
D	súrlódási veszteség minimalizálása

2. Az 1. tételben megfogalmazott optimalizációs feladatokra iterációs módszer került kifejlesztésre. A kidolgozott technika több egymást követő iterációból áll. Az *1. típusú* iteráció végzi az alakoptimalizálást – lerögzített vezérlőparaméterek mellett –, míg a *2. típusú* iteráció a bevezetett feszültségi korlát kielégítését szolgálja, mely alapvetően a linearizálás elvén működik. A nemlineáris optimalizálási feladat megoldására javasolt iterációs technika konvergenciáját a kidolgozott végelelemes program numerikus számításai igazolják $\langle 1 \rangle$, $\langle 7 \rangle$, $\langle 12 \rangle$.
3. Görgő alakú testek újszerű alakoptimalizálása a rugalmas feltér hatásmátrixa alapján $\langle 1 \rangle$, $\langle 5 \rangle$:
 - (a) Görgő alakú testek nyomásvezérlő függvénnyel történő alakoptimalizálására új, módosított vezérlő függvény került kidolgozásra az f_2 és f_3 paraméterek bevezetésével, súrlódás nélküli esetben. A nyomásvezérléssel működő optimalizálást a kidolgozott számítógépi program numerikus szimulációval mutatja be.

- (b) A görgő alakú testek alakoptimalizálása a nyomás vezérlése mellett, a súrlódás hatásának figyelembevételével történt. Ehhez számítógépes program készült, a KALKER által kidolgozott FORTRAN nyelvű program felhasználásával.
4. A háromdimenziós érintkezési feladat új numerikus kezelése $\langle 3 \rangle$, $\langle 4 \rangle$, $\langle 9 \rangle$, $\langle 10 \rangle$.
- (a) Az egyszeresen összefüggő tényleges érintkezési tartományok esetén a kialakuló térbeli érintkezési tartomány határgörbéje egyetlen paraméteres – B-spline, vagy NURBS – térgörbével került leírásra. A végesszámú érintkezési-elválási pontokra illeszkedő zárt interpoláló görbe előállítása a kontrollpontokat egyértelműen meghatározó algebrai egyenletrendszer felállításával és annak megoldásával történik, ennek elvégzésére számítógépes program került kifejlesztésre.
- (b) Az Ω_p tényleges érintkezési tartományhatárra való pozicionáláshoz egy új technika került kidolgozásra. Az elemhatárok elválási- és réshatárra való illesztéséhez egy „adaptív” elven működő, hatékony iterációs algoritmus lett létrehozva, mely a linearizálás elvén alapszik. Ezáltal a p -verziós elemek alkalmazása továbbra is exponenciális konvergenciát nyújt a hibanorma tekintetében.
- (c) A p -verziójú végelemek felhasználó, Fortran 90 nyelven megírt számítógépi programban, olyan – az irodalomból nem ismert – algoritmus került kidolgozásra, amely a büntetőparaméteres technikával megoldott érintkezési feladat eredményeinek birtokában
- linearizálással, lerögzített vonalak mentén megkeresi az interpolációs pontokat,
 - előállítja az interpolációs spline-t,
 - a hibanégyzet minimuma elv révén megkeresi az érintkezési tartományt magába foglaló végelemek leképzési paramétereit,
 - előállítja az új méretű végelemeket, azaz az új elemhálózathoz megfelelően felépíti az elemek merevségi mátrixát, redukált terhelési vektorát
- majd a korábbi végelemes programokban is szereplő lépések (algoritmus) révén megoldja az érintkezési feladatot.

4. TOVÁBBFEJLESZTÉSI IRÁNYOK, LEHETŐSÉGEK

A feszültségmezőben tapasztalható hullámzás – kétdimenziós tapasztalataink alapján – annak tudható be, hogy az érintkezés-elválási tartományhatáron nagyméretű elemeket alkalmaztunk. Egyik továbbfejlesztési cél, hogy ezen határ közelében „adaptív” elemsűrítést hajtsunk végre a további pontosítás érdekében.

További lehetőség az is, hogy az egyetlen zárt érintkezési tartományon belül vizsgáljuk a tapadási és a csúszási altartományok elhelyezkedését. Ezek azonosítása szintén csak több zárt, vagy kapcsolódó térgörbével lehetséges.

A rugalmas-képlékeny anyagmodellű feladatok vizsgálata is megköveteli a képlékeny alakváltozási altartományok pontos azonosítását. A határvonalak, felületek precíz leírására szintén alkalmasak a paraméteres térgörbék.

Nyitott kérdés a rugalmas-képlékeny anyagú testekből felépített mechanikai rendszerek érintkezési feladatának pozicionálási technikát alkalmazó – p -verziós elemek melletti – megoldása először kétdimenziós, majd háromdimenziós feladatoknál. Ez utóbbi esetben a képlékenyen alakváltozott testrész zárt felülettel határolt, melynek leírására az interpoláló NURBS felületek alkalmasak lehetnek.

Természetesen térbeli feladatok kapcsán is felállíthatók érintkezési-optimalizációs feladatok, melyek vizsgálata szintén egy lehetséges továbbfejlesztési iránya a jelen disszertációban elért eredményeknek.

5. PUBLIKÁCIÓK AZ ÉRTEKEZÉS TÉMÁJÁBAN

Idegen nyelvű folyóiratban megjelent szakkik:

- (1) Páczelt, I. & Baksa, A. (2002). Examination of contact optimization and wearing problems. *Journal of Computational and Applied Mechanics*, 3(1), pp. 61-84.

Magyar nyelvű folyóiratban megjelent szakkik:

- (2) Baksa, A. & Páczelt, I. (2001). Some new contact optimization problems with iteration. *GÉP*, 52(3-4), pp. 38-42.
- (3) Baksa & Páczelt, I. (2004). Approximation of contact domain with the use of B-splines, *GÉP*, 55(1), pp. 8-13.

- ⟨4⟩ Baksa, A. (2005). Érintkezési feladat megoldása háromdimenziós p -verziójú végelemek segítségével. *GÉP*, 56(5), pp. 1-12.

Tudományos közlemény, idegen nyelvű konferencia kiadványban:

- ⟨5⟩ Baksa, A. & Páczelt, I. (2001). Optimization problem of rolling body contacts. *3rd International Conference of PhD Students*, University of Miskolc, pp. 1-8.
- ⟨6⟩ Baksa, A. & Páczelt, I. (2001). Some new contact optimization problems. *microCAD'2001 International Scientific Conference*, Section N: Applied Mechanical Engineering Sciences, University of Miskolc, pp. 7-12.
- ⟨7⟩ Páczelt, I. & Baksa, A. (2001). Solution of contact optimization problems with iteration. *ECCM 2001 European Conference on Computational Mechanics*, Cracow, Poland, CD Proceedings.
- ⟨8⟩ Baksa, A. & Páczelt, I. (2002). Solution of contact problems with FEM and parallel technique. *microCAD'2002 International Scientific Conference*, Section D1: Mechanical Engineering Sciences, University of Miskolc, pp. 1-5.
- ⟨9⟩ Baksa, A. & Páczelt, I. (2004). Approximation of contact domain with the use of B-splines. *microCAD 2004, International Scientific Conference*, Section E: Applied Mechanics, University of Miskolc, pp. 7-12.
- ⟨10⟩ Páczelt, I. & Baksa, A. (2005). Solution of contact problems with high rate convergence. *8th U.S. National Congress on Computational Mechanics*, Austin, Texas, July 24-28. Minisymposia: Computational Contact Mechanics, Conference CD Proceedings.

Szakmai tudományos előadás idegen nyelven:

- ⟨11⟩ Baksa, A. & Páczelt, I. (2002). Solution of contact problems using parallel technique. *nmcm2002, Numerical Methods and Computational Mechanics*, University of Miskolc.
- ⟨12⟩ Baksa, A. & Páczelt, I. (2002). Different solution methods for contact optimization problems. *Solmech2002, 34th Solid Mechanics Conference*, Zakopane, Poland.

Szakmai tudományos előadás magyar nyelven:

- ⟨13⟩ Páczelt, I. & Baksa, A. (1999). Programrendszer érintkezési feladatok megoldására, *VIII. Magyar Mechanikai Konferencia*, Miskolci Egyetem.
- ⟨14⟩ Baksa, A. & Páczelt, I. (2003). Iterációs technikák érintkezési optimalizálási feladatok megoldásához. *OGET2003, XI. Nemzetközi Gépész Találkozó, Számítógépes tervezés és gyártás*, Erdélyi Magyar Társaság, Kolozsvár, pp. 26-30.
- ⟨15⟩ Baksa, A. & Páczelt, I. (2003). Érintkezési feladatok vizsgálata magasfokú approximáció segítségével. *IX. Magyar Mechanikai Konferencia*, Miskolci Egyetem.
- ⟨16⟩ Baksa, A. & Páczelt, I. (2005). Térbeli érintkezési feladat vizsgálata. *OGET2005, XIII. Nemzetközi Gépész Találkozó*, Fogaske-rék-hajtások, Modern Megmunkálások, Erdélyi Magyar Társaság, Szatmárnémeti, pp. 39-42.

HIVATKOZÁSOK

- [1] J.S. Arora, A.I. Chahande, and J.K. Paeng. Multiplier methods for engineering optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 7:1485–1525, 1991.
- [2] T.F. Conry and A. Seireg. A mathematical programming method for design of elastic bodies in contact. *Journal of Applied Mechanics*, 38:1293–1307, 1971.
- [3] C.A. Coulomb. The theory of simple machines. *Mem. Math. Phys. Acad. Sci.*, 10:161–331, 1785.
- [4] L. Euler. Sur le frottement des corps solides. *Mem. Acad. Sci. Berlin*, 4:122–132, 1748.
- [5] W. Goldsmith. Impact: The theory and physical behavior of colliding solids. *London: Edward Arnold*, 1960.
- [6] J. Haslinger and P. Neittaanmaki. *Finite Element Approximation for Optimal Shape Design*. John Wiley & Sons Ltd., London, 1996.
- [7] H. Hertz. Über die Berührung fester elastischer Körper. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 29:156–171, 1882.
- [8] D. Hilding, A. Klarbring, and J. Peterson. Optimization of structures in unilateral contact. *Applied Mech. Rev.*, 52(4):139–160, 1999.
- [9] K.L. Johnson. *Contact Mechanics*. Cambridge University Press, 1985.
- [10] N. Kikutchi and J.T. Oden. A study of variational inequalities and finite element methods. In *Contact problems in elasticity*. Philadelphia: SIAM, 1988.
- [11] N. Kikutchi and J.E. Taylor. Shape optimization for unilateral elastic bodies in contact. In *Num. Meth. Coupl. Probl. (Proceeding for International Conference, held at University College, Swansea, Wales)*, pages 430–441, 1981.
- [12] A. Klarbring. Contact, friction, discrete mechanical structures and mathematical programming. In *CISM course: Contact problems: Theory, Methods, Applications*, pages 1–51, 1997.

- [13] A. Klarbring and J. Haslinger. On almost constant stress distribution by shape optimization. *Structural Optimization*, 5:213–216, 1993.
- [14] A.I. Lur’e. *Three-dimensional Problems of the Theory of Elasticity*. English translation by J.R.M. Radok, Interscience, 1964.
- [15] Z. Mróz. Sensitivity analysis of distributed and discretized systems. *Advanced TEMPUS Course on Numerical Methods in Computer Aided Optimal Design, Zakopane*, 1:1–60, 1992.
- [16] I. Páczelt. Iterative methods for solution of contact optimization problems. *Archives of Mechanics*, 52(4-5):685–711, 2000.
- [17] I. Páczelt and A. Baksa. Examination of contact optimization and wearing problems. *Journal of Computational and Applied Mechanics*, III(1):61–84, 2002.
- [18] I. Páczelt and B. Herpai. Some remarks on the solution of contact problems of elastic shells. *Archivum Budowy Maszyn XXIV*, pages 197–202, 1977.
- [19] I. Páczelt, B. Szabó, and T. Szabó. Solution of contact problem using the *hp*-version of the finite element method. *Computers and Mathematics with Applications*, 38:49–69, 1999.
- [20] I. Páczelt and T. Szabó. Optimal shape design for contact problems. *Structural Optimization*, 7(1/2):66–75, 1994.
- [21] I. Páczelt and T. Szabó. Application of the augmented Lagrangian technique for solution of contact optimization problems. *Second International Conference on Contact Mechanics, Computational Mechanics Publications, London*, II:249–256, 1995.
- [22] I. Páczelt and T. Szabó. Solution of contact optimization problems of cylindrical bodies using the *hp*-fem. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 53:123–146, 2002.
- [23] P.D. Panagiotopoulos. *Inequality Problems in Mechanics, Convex and Nonconvex Energy Functions*. Birkhäuser Verlag, Boston, Basel, 1985.
- [24] J. Peterson. Behaviorally constrained contact force optimization. *Structural Optimization*, 9:189–193, 1995.

- [25] Sz.D. Ponormajov. *Szilárdsági számítások a gépészetben: 3. kötet, Lemezek. Héjak. Vastag falú csövek. Érintkezési feszültség.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1965.
- [26] A. Signorini. Sopra alcune questioni di elastostatica. *Atti della Società Italiana per il Progresso delle Scienze*, 1933.
- [27] B. A. Szabó and I. Babuška. *Finite Element Analysis.* John Wiley & Sons, 1991.
- [28] S.P. Timoshenko and J.N. Goodier. *Theory of Elasticity.* McGraw-Hill, New York, 1970.
- [29] M.J. Turner, R.W. Clough, H.C. Martin, and L.J. Topp. Stiffness and deflection analysis of complex structures. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 23:805–823, 1956.
- [30] E.A. Wilson and B. Parsons. Finite element analysis of elastic contact problems using differential displacements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2:387–395, 1970.