

Miskolci Egyetem



GÉPÉSZMÉRNÖKI KAR

ÉRINTKEZÉSI FELADATOK NUMERIKUS VIZSGÁLATA

Ph.D. értekezés

KÉSZÍTETTE:

Baksa Attila

okleveles mérnök-informatikus

SÁLYI ISTVÁN GÉPÉSZETI TUDOMÁNYOK DOKTORI ISKOLA

GÉPÉSZETI ALAPTUDOMÁNYOK TÉMATERÜLET

SZILÁRD TESTEK MECHANIKÁJA TÉMACSOPORT

DOKTORI ISKOLA VEZETŐ:

Dr. Páczelt István

az MTA rendes tagja

TÉMACSOPORT VEZETŐ:

Dr. Kozák Imre

az MTA rendes tagja

TÉMAVEZETŐ:

Dr. Páczelt István

az MTA rendes tagja

Miskolc, 2005.

Baksa Attila

ÉRINTKEZÉSI FELADATOK NUMERIKUS VIZSGÁLATA

Doktori (Ph.D.) értekezés

Miskolc, 2005.

Tartalomjegyzék

Témavezető ajánlása	iv
Előszó	vi
Alkalmazott jelölések	vii
1. BEVEZETÉS	1
1.1. Rövid történeti áttekintés	3
1.2. Irodalmi áttekintés	5
1.3. Célkitűzések	7
2. MECHANIKAI ÉRINTKEZÉSI FELADAT	9
2.1. Rugalmasságtani feladat	9
2.2. Kinematikai megfontolások	10
2.3. Súrlódás figyelembevétele	12
2.4. Variációs formalizmus	13
2.4.1. LAGRANGE-féle multiplikátoros technika	13
2.4.2. Büntetőparaméteres technika	13
2.4.3. Kombinált technika	14
3. ÉRINTKEZÉSI FELADAT DISZKRETIZÁLÁSA	17
3.1. Rugalmasságtani egyenletek	17
3.2. Variációs egyenletek végesesemes tárgyalása	20
3.3. Közelítő megoldás GREEN-függvények segítségével	23
3.3.1. KALKER-féle iterációs eljárás	27
3.3.2. Hatásmátrix előállítása	27
3.3.3. Tükrözési technika	28
4. TÉRGÖRBE PARAMÉTERES LEÍRÁSA	32
4.1. B-spline alapfüggvény	32
4.2. A B-spline definíciója	35
4.3. NURBS térgörbék	38
4.3.1. Homogén koordináták	38
4.3.2. NURBS térgörbe előállítása	39
4.4. Interpoláció paraméteres térgörbével	40
4.4.1. Egyenletes paraméterezés	41
4.4.2. Húrhossz alapú paraméterezés	42
4.4.3. Paraméterezés zárt interpoláló görbéhez	43
4.4.4. Csomóérték vektor előállítása	43
4.4.5. Interpoláló NURBS előállítása	45
4.5. Számpélda	46

5. ALAKOPTIMALIZÁLÁS	48
5.1. Nyomásmegoszlást vezérlő függvény	49
5.2. Iteratív megoldási módszer	51
5.3. Optimalizációs érintkezési feladatok felállítása	53
5.3.1. Tengelyszimmetrikus feladatok vizsgálata	53
5.3.2. Görgő alakoptimalizálása	58
5.4. Numerikusan kiszámított optimalizációs feladatok	60
5.4.1. Bélyegfeladatok	60
5.4.2. Nem középen terhelt görgő	68
5.4.3. Középen terhelt görgő	70
6. ÉRINTKEZÉS VIZSGÁLATA HÁROMDIMENZIÓBAN	74
6.1. Szimmetrikus terhelésű feladatok	75
6.1.1. Analitikus megoldások	76
6.1.2. Numerikus megoldások	76
6.2. Nemszimmetrikus elrendezésű feladat	86
6.3. Általános geometriájú bélyegfeladat	90
7. ÖSSZEFOGLALÁS	96
7.1. Új tudományos eredmények összefoglalása	97
7.2. Továbbfejlesztési irányok, lehetőségek	98
SUMMARY	100
Táblázatok jegyzéke	104
Ábrajegyzék	105
A. függelék: HIERARCHIKUS ALAKFÜGGVÉNYEK TERE	108
A.1. A h -, p - és a hp -verzió alapvető jellemzői	108
A.2. Egydimenziós feladatok	110
A.2.1. LEGENDRE-polinomok	110
A.2.2. Hierarchikus alakfüggvények egydimenzióban	112
A.3. Kétdimenziós feladatok	115
A.4. Háromdimenziós feladatok	118
B. függelék: HERTZ-FÉLE ÖSSZEFÜGGÉSEK ÉRINTKEZŐ TESTEKRE	122
C. függelék: NUMERIKUS SZÁMÍTÁSOK EREDMÉNYEI	127
C.1. Kétváltozós optimalizációk	127
C.2. Szimmetrikus terhelésű 3D-s feladatok	129
C.3. Nemszimmetrikus terhelésű 3D-s érintkezési feladatok	138
D. függelék: PUBLIKÁCIÓK AZ ÉRTEKEZÉS TÉMÁJÁBAN	146
HIVATKOZÁSOK	148

Témavezető ajánlása

Baksa Attila „Érintkezési feladatok numerikus vizsgálata”

című Ph.D. értekezéshez

Az érintkezési feladatok numerikus mechanikán belüli megoldása napjaink egyik kiemelt kutatási területe. Számos kérdés merül fel, pl. hogyan lehet nagy megbízhatóságú eredményeket elérni, hogyan lehet a megoldás pontosságát megbecsülni, hogyan lehet összekapcsolni és továbbfejleszteni a korábbi eredményeket a jelen által felvetett problémákkal és megoldásokkal?

Az értekezésben Baksa Attila nagy energiával, szorgalommal és körültekintéssel végezte vizsgálatait.

Kutatásainak egyik iránya érintkezési optimalizálási feladatokkal van kapcsolatban, míg másik része a háromdimenziós testek közötti súrlódás nélküli érintkezési viszonyok tisztázásával.

Az optimalizálási feladatok egyik csoportja forgástestekkel kapcsolatos, másik része görgők kialakításával. Görgők feladatainál a féltérre vonatkozó rugalmasságtani alapösszefüggések nyerne felhasználást, míg a többi feladatnál a p -verziójú végeelem-módszer.

A forgástestek optimalizációs feladatánál újdonságként a feszültségi korlát figyelembevétele, a korábbi iterációs módszer kibővítése jelent új eredményt. A görgő optimálásánál a nyomásvezérlési függvény módosításával és ebből adódóan új optimális alakok meghatározásával járult hozzá az érintkezési optimalizációs feladatok irodalmához.

A háromdimenziós érintkezési feladatok p -verziós végeelemeket felhasználó új típusú megoldásával elérte, hogy az eredeti un. C típusú feladatosztályba sorolható problémát át tudta vinni lényegesen magasabb konvergencia sebességet adó un. B típusú feladattá. Ezt B-spline, illetve NURBS térgörbék felhasználásával, az érintkezési határ mozgatásával, pozicionálásával lehet biztosítani. Az egyszerűen összefüggő érintkezési tartományok leírására szolgáló spline-ok összefüggéseinek gondos elemzésével, az irodalomban található pontatlanságok feltárásával, azok pontosításával, a vezérlési (interpolációs) pontok koordinátáinak iterációs úton történő meghatározásával olyan algoritmust dolgozott ki, amely a szokványos p -verziós végeelem programokba könnyen beépíthető.

Baksa Attila eredményeiről rendszeresen beszámolt különböző hazai és nemzetközi fórumokon eleget téve a Sályi István Gépészeti Tudományok Doktori Iskola publikációs követelményeinek.

Elvégzett számításai, azok bemutatása a kidolgozott elvek helyességét bizonyítják, alátámasztják.

Az értekezés gondos munkát tükröz, szövegezése jól érthető, ábrái a mondanivalót jól alátámasztják, tézisei a Ph.D. cím elnyeréséhez szükséges kívánalmakat messzemenően kielégítik.

Miskolc, 2005. október 3.

Prof. Páczelt István
akadémikus

Előszó

A mai mérnöki problémák megoldása során sok esetben kell szilárd testek érintkezési feladataival foglalkozni, de a hétköznapi életben is találkozhatunk ezen feladatkörrel. Tulajdonképpen senki sem tudna járni ha nem volna súrlódásos érintkezés, illetve az autók sem közlekedhetnének hasonló okok miatt. Ebből kiindulva az érintkezési feladatoknak – mérnöki szempontból – nagy múltja van. Gondoljunk csak az egykori Egyiptomi Birodalomra, ahol hatalmas kőtömböket kellett a helyükre illeszteni a piramisok építése során. Később számos tudós foglalkozott az érintkezéssel, mint például LEONARDO DA VINCI, aki már a *XV.* században mért súrlódási erőt; majd a *XVIII.* században COULOMB már a felületi érdesség szerepére hívta fel a figyelmet.

A disszertáció a bevezetés után röviden áttekinti és rendszerezi az érintkezési feladatok nagy terjedelmű irodalmát. Természetesen ezt korántsem lehet teljes értékűnek nevezni, csak megpróbáljuk a tervezett alkalmazás céljából a lényeges szempontokat vizsgálni, bemutattva a különböző technikákat és azok alkalmazhatóságát, továbbá rámutatunk azok hiányosságaira, esetleges gyengeségeikre. A következőkben leírjuk az érintkezési feladatok vizsgálatához szükséges mechanikai hátteret. Ezen feladatok megoldására különböző technikai megoldások léteznek, amiket szintén ismertetünk, természetesen a teljesség igénye nélkül. A további fejezetekben a kutatások eredményeit foglaltuk össze témakörönként, bemutattva bennük az elvégzett elméleti és gyakorlati munkát.

A disszertáció két fő területről tartalmaz új eredményeket. Az első, melyet az 5. fejezetben írunk le, alakoptimalizálással foglalkozik, ahol számos, gyakorlati szempontból hasznos optimalizálási problémát állítunk fel és oldunk meg numerikus úton. A másik terület, a háromdimenziós érintkezéssel kapcsolatos, erről szól a 6. fejezet. Ezekhez a részekhez nagy mennyiségű numerikus szimuláció is tartozik, melyek közül néhányat, a terjedelmükre való tekintettel, a mellékletekben helyeztünk el.

Alkalmazott jelölések

A skalár mennyiségeket normál vastagságú latin, vagy görög, dőlt kisbetűkkel (például k , ρ), a vektormennyiségeket vastagon szedett, dőlt kisbetűkkel (például $\mathbf{u}$, $\mathbf{r}$), a tenzor mennyiségeket vastagon szedett, dőlt nagybetűkkel jelöltük (például $\mathbf{T}$, $\mathbf{D}$).

A végeselemes felírásban szereplő mátrixokat vastagon szedett, álló, latin nagybetűkkel szedtük (például $\mathbf{K}$, $\mathbf{B}$), kivételt jelentenek ez alól a görög betűkkel jelölt mátrixok, amelyeket vastagon szedett, dőlt kisbetűk jelölnek (például $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$). Azokat a mátrixokat, melyeknek csak egy oszlopa van – a továbbiakban vektornak nevezzük –, a szedésben megkülönböztetésként vastagon szedett, álló kisbetűkkel írtuk (például $\mathbf{q}$, $\mathbf{k}$).

Alkalmazott matematikai jelölések	
$\forall$	– bármely halmazelem
$\cdot$	– skaláris szorzás
$\circ$	– diadikus szorzás
$\times$	– vektoriális szorzás
$\cdot\cdot$	– kétszeres skaláris szorzás
$(\cdot, \cdot)$	– két függvény skaláris vagy belső szorzata
$f(x) \perp g(x)$	– $(f(x), g(x)) = 0$
∇	– a nabla differenciál operátor
$\delta\Pi$	– első variációja Π -nek
$ \cdot $	– skalár abszolút értéke
$\ \cdot\ $	– vektor abszolút értéke
$\mathbf{A}^T, \mathbf{A}^T$	– az $\mathbf{A}$ tenzor, illetve az $\mathbf{A}$ mátrix transzponáltja
$\mathbf{A}^{-1}, \mathbf{A}^{-1}$	– az $\mathbf{A}$ tenzor, illetve az $\mathbf{A}$ mátrix inverze
∂	– parciális differenciáloperátor mátrix
$\frac{\partial(\cdot)}{\partial x}$	– a $(\cdot)$ mennyiség parciális deriváltja x szerint
$\dot{(\cdot)}$	– idő szerinti deriválás, azaz $\frac{\partial(\cdot)}{\partial t}$

Kaligrafikus betűvel jelölt mennyiségek	
$\mathcal{L}^{LA}$	– LAGRANGE féle multiplikátoros technikában használt funkcionál
$\mathcal{L}^{PE}$	– büntetőparaméteres technikánál alkalmazott funkcionál
$\mathcal{L}^{AU}$	– kombinált vagy "augmented LAGRANGIAN" módszernél használt funkcionál
$\mathcal{S}_{ts}^{p_\xi, p_\eta}$	– csonkolt tér – <i>truncated space</i> – (négyszögelemeknél)
$\mathcal{S}_{ps}^{p_\xi, p_\eta}$	– teljes tér – <i>tensor product space</i> – (négyszögelemeknél)
$\mathcal{S}_{ts}^{p_\xi, p_\eta, p_\zeta}$	– csonkolt tér – <i>truncated space</i> – (hexaéder elemeknél)
$\mathcal{S}_{ps}^{p_\xi, p_\eta, p_\zeta}$	– teljes tér – <i>tensor product space</i> – (hexaéder elemeknél)

Görög betűvel jelölt mennyiségek	
Δ	– érintkező testek z irányú közeledése
Ω	– feltételezett érintkezési tartomány
Ω_0	– tényleges réstartomány
Ω_c	– S_c^α tartomány azon része, ahol nyomásvezérlés történik
Ω_{nc}	– S_c^α tartomány azon része, ahol nem történik nyomásvezérlés
Ω_p	– S_c^α tartomány azon része, ahol ténylegesen érintkezés alakul ki
Π	– teljes potenciális energia
α	– felső index, a test jele, értéke 1 – a felső testre, vagy 2 – az alsó testre
β	– pozitív állandó
γ	– pozitív állandó
$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	– fajlagos szögtorzulások
δ_{nm}	– KRONECKER-szimbólum
ε_p	– előre definiált hibakorlát
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	– fajlagos nyúlások
$\boldsymbol{\varepsilon}^\alpha$	– alakváltozási vektor
θ	– pozitív állandó
λ	– pozitív állandó
$\boldsymbol{\lambda}$	– merevtestszerű elmozdulásvektor
$\boldsymbol{\lambda}_F$	– elmozdulás-koordináták vektora
$\boldsymbol{\lambda}_M$	– szögelfordulás-koordináták vektora
μ	– súrlódási tényező
ν	– POISSON-tényező
ρ^α	– α test tömegsűrűsége
$\boldsymbol{\sigma}^\alpha$	– feszültségi tenzor koordinátaiból alkotott oszlopvektor
σ_n^α	– normál irányú érintkezési feszültség
σ_U	– anyagra megengedett maximális feszültség
σ_{eq}	– redukált feszültség
σ_φ	– φ irányú normálfeszültség hengerkoordináta rendszerben
σ_r	– r irányú normálfeszültség hengerkoordináta rendszerben
σ_z	– z irányú normálfeszültség hengerkoordináta rendszerben
$\tau_{\tau n}^\alpha$	– $\boldsymbol{e}_\tau$ irányú $\boldsymbol{n}$ normálisú felületen értelmezett csúsztató feszültség
$\tau_{\varphi z}$	– csúsztatófeszültség hengerkoordináta rendszerben

Latin betűvel jelölt mennyiségek	
A_I	– az $\boldsymbol{A}$ tenzor első skalár invariánsa
$\boldsymbol{A}^\alpha$	– alakváltozási tenzor
$\boldsymbol{D}^\alpha, \boldsymbol{D}^\alpha$	– anyagállandók tenzora, mátrixa
E	– rugalmassági modulus
F	– erő
F_T	– súrlódási erő
G	– csúsztató rugalmassági modulus
$\boldsymbol{G}_R$	– geometriai mátrix
$H^\alpha(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s})$	– GREEN-függvény

Latin betűvel jelölt mennyiségek	
$\mathbf{H}$	– hatásmátrix
$\mathbf{I}$	– egységtenzor
L_i	– nyomáseloszlás vezérlő függvény paraméterei ($i = 1, 2, 3, 4$)
$\mathbf{L}_{n_c}^\alpha$	– n_c irányú elmozduláskoordináták számításához szükséges alakfüggvények mátrixa
$\mathbf{L}_t^\alpha$	– t_x vagy t_y irányú elmozduláskoordináták számításához szükséges alakfüggvények mátrixa
$\{L_n(x)\}_{n=0}^\infty$	– LEGENDRE polinomok
N	– ismeretlenek száma
$N_i^p(u)$	– p -ed fokú B-spline alapfüggvény
$N_{ts}^{p,p}$	– ismeretlenek száma, p -ed fokú csonkolt tér esetén
$N_{ps}^{p,p}$	– ismeretlenek száma, p -ed fokú teljes tér esetén
$N_{1,1}^i$	– i -edik csomóponthoz tartozó alakfüggvény (négyyszögelemnél)
$N_{i,1}^{e_k}$	– e_k élhez tartozó alakfüggvény (négyyszögelemnél)
N_{ij}^b	– belső alakfüggvény (négyyszögelemnél)
$N_{1,1,1}^i$	– i -edik csomóponthoz tartozó térbeli alakfüggvény (hexaéder elemnél)
$N_{i,1,1}^{e_k}$	– e_k élhez tartozó térbeli alakfüggvény (hexaéder elemnél)
$N_{i,j,1}^{f_k}$	– f_k oldallaphoz tartozó térbeli alakfüggvény (hexaéder elemnél)
$N_{i,j,k}^b$	– belső alakfüggvény (hexaéder elemnél)
$N_i^p(\xi)$	– p -ed fokú LAGRANGE polinomok
$\mathbf{N}^\alpha$	– α testhez tartozó approximációs mátrix
$P_n(x)$	– polinom
$\mathbf{P}$	– approximációs mátrix
S^α	– az α -edik test felületi tartománya
S_c^α	– az α -edik test feltételezett érintkezési tartománya
S_u^α	– az α -edik test felületi tartománya, ahol előírt az elmozdulás
S_p^α	– az α -edik test felületi tartománya, ahol előírt a felületi terhelés
$\mathbf{T}^\alpha$	– az α -edik testre vonatkozó feszültségi tenzor
$\mathbf{P}_{gl}$	– globális-lokális transzformáció mátrix
$\mathbf{P}$	– transzformáció mátrix
V^α	– az α -edik test térfogati tartománya
$V(\mathbf{x})$	– nyomáseloszlás vezérlő függvény
a	– érintkezési tartomány jellemző (sugár) mérete
c	– büntető paraméter
$\mathbf{c}(u)$	– az u paraméterhez tartozó pont helyvektora a B-spline térgörbén
$\mathbf{c}_r(u)$	– az u paraméterhez tartozó pont helyvektora a NURBS térgörbén
d	– testek közötti alakváltozás utáni hézag
$\mathbf{d}_i$	– az i -edik interpolációs pont helyvektora
e	– számítási hiba (a végelem módszernél)
$\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$	– DESCARTES-féle koordinátarendszer egységvektorai
$\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$	– hengerkoordináta rendszer egységvektorai
$\{f_n(x)\}$	– egymástól lineárisan független függvények halmaza
f_2, f_3	– nyomáseloszlás vezérlő függvény paraméterei

Latin betűvel jelölt mennyiségek	
$\{g_n(x)\}$	– ortogonális bázis függvények halmaza
h	– testek közötti kezdeti hézag
$\mathbf{h}^\alpha$	– testek közötti hézag meghatározásához szükséges paramétervektor
$\{h_n(x)\}$	– ortonormált függvények halmaza
i_{step}	– ciklusváltozó
i_{terh}	– terhelési lépés sorszáma
k	– pozitív állandó
k	– ciklusváltozó
$\mathbf{k}^\alpha$	– az α -adik testre vonatkozó egységnyi tömegben működő terhelési vektor
$\mathbf{l}$	– külső terhelésből származó elmozdulásvektor
n	– az alakfüggvények száma
n_e	– egy elemen értelmezett alakfüggvények száma
$\mathbf{n}^\alpha$	– az α -adik test felületi normálisa
$\mathbf{n}_c$	– felületi normális
p	– polinom fokszáma
p_0	– maximális érintkezési nyomás
$\mathbf{p}_i$	– az i -edik kontrollpont helyvektora
$\mathbf{p}_i^w(u)$	– homogén koordinátaival megadott kontrollpont helyvektora
$\mathbf{p}$	– diszkrét pontbeli nyomásértékek vektora
p_{max}	– maximális érintkezési nyomás
p_n	– LAGRANGE-féle multiplikátor, érintkezési nyomás
p_ξ	– ξ függvények polinom fokszáma
p_η	– η függvények polinom fokszáma
$\mathbf{p}_\tau$	– tangenciális irányú teher vektor
$\tilde{\mathbf{p}}^\alpha$	– az α -adik testre előírt felületi terhelés
$\mathbf{q}^\alpha$	– az α -adik testhez tartozó paramétervektor
$\mathbf{q}_0^\alpha$	– S_c^α tartományon kívüli elmozdulásmező számításához szükséges paramétervektor
$\mathbf{q}_c^\alpha$	– S_c^α tartományba eső globális rendszerbeli elmozdulásmező paramétervektora
$\mathbf{q}_{lc}^\alpha$	– S_c^α tartományba eső lokális rendszerbeli elmozdulásmező paramétervektora
$\mathbf{r}$	– helyvektor
r	– sugár irányú koordináta
r^α	– az α -adik test sugara
r_b^α	– az α -adik test belső sugara
r_k^α	– az α -adik test külső sugara
(r, φ, z)	– hengerkoordináták
$\mathbf{s}$	– helyvektor
t	– paraméterérték
(t_x, t_y, n_c)	– lokális alapsíkhoz kötött koordináták
u	– paraméterérték
u_x, u_y, u_z	– x, y, z irányú elmozdulás koordináták
$\dot{\mathbf{u}}_\tau$	– slip
$\dot{\mathbf{u}}_\tau^\alpha$	– tangenciális sebesség vektor

Latin betűvel jelölt mennyiségek	
$\mathbf{u}$	– csomóértékek vektora
$\mathbf{u}^\alpha$	– az α -adik testre vonatkozó elmozdulásmező
$\mathbf{u}_0^\alpha$	– az α -adik testre előírt elmozdulásmező
u_i	– csomóértékek
u_n^α	– normális irányú elmozdulás
$u_{n,\text{terh}}^\alpha(\mathbf{x})$	– terhelésből származó normál irányú elmozdulás
$u_{n,\text{merev}}^\alpha$	– merevtestszerű mozgásából származó normál irányú elmozdulás
u_τ^α	– érintő irányú elmozdulás
$\mathbf{u}_{ex}$	– nem ismert, tényleges megoldás az elmozdulásmezőre
$\mathbf{u}_{VEM}$	– végeelem módszer által szolgáltatott megoldás az elmozdulásmezőre
$\mathbf{u}_l^\alpha$	– alapsíkhoz kötött lokális koordinárendszerbeli elmozdulásmező
w	– függőleges irányú elmozduláskoordináta
w_0	– előírt z irányú elmozduláskoordináta
$\mathbf{x} = (x, y, z)$	– helyvektor koordinátáit tartalmazza
(x, y, z)	– DESCARTES-féle koordináták

1. fejezet

BEVEZETÉS

Mára megnőtt a jelentősége az olyan peremérték feladatok vizsgálatának, melyek magukba foglalják az érintkezési problémakört is. Ezek nemcsak ipari feladatoknál, hanem környezetvédelmi vagy orvosi alkalmazásokban is felmerülnek. Lényegében minden mozgás, ami ezen a bolygón történik kapcsolatban van az érintkezéssel és a súrlódással. A járás, a futás, a kerékpározás, az autóval vagy vasúttal történő közlekedés, mind-mind érintkezés révén valósulhat meg. Ha a súrlódás nem volna jelen – lásd például a jégen való autóvezetés –, akkor ezek a mozgások nem jöhetnének létre azon a módon, ahogy azt megszoktuk és elvárjuk. Abból adódóan, hogy az a felület, amellyel a cipőnk talpa, vagy az autó abroncsa valójában érintkezik, kezdetben nem ismeretes, egy egyszerűnek tűnő hétköznapi probléma is nemlineáris peremérték feladat felállításához vezet.

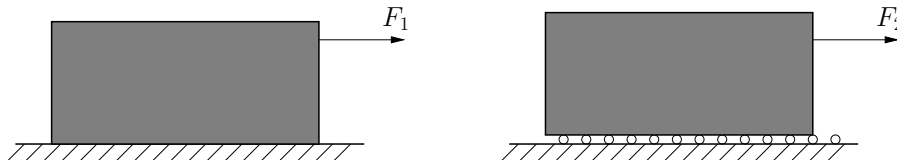
Az érintkezés jelensége a mérnöki feladatokban leggyakrabban a különböző mechanikai alkatrészek egymással való érintkezésekor merül fel. Számos mechanikai terhelés ilyen jellegű kapcsolatokból származik. Ennek a folyamatnak a vizsgálata, a mérnöki tervezés és elemzés során kulcsfontosságú. Az általános mechanikai modellekben ennek ellenére nem mindig találkozunk az érintkezési feltételek figyelembevételének lehetőségével.

Az érintkezési feladat komplexitását a következő megállapítások jellemzik:

1. Nemlineáris jelleg, mely abból fakad, hogy az érintkezési tartomány, illetve az ott érvényes peremfeltételek előre nem ismertek.
2. Az érintkezési és súrlódási törvények nem egyszerűek, kezelésük speciális matematikai alapokat és eszközöket igényel.
3. A vizsgált mechanikai rendszer geometriai és anyagi felépítéséből adódóan más nemlinearitások is megjelenhetnek.
4. Bizonyos esetekben dinamikai hatások figyelembevétele is szükséges.

Az érintkezési – vagy *kontakt* – feladatokat, erős nemlineáris jellegük miatt, korábban csak speciális feltételezések mellett tudták figyelembe venni a tervezési folyamat során. A számítástechnika és a mérnöki tudományok fejlődésének köszönhetően, ma már számtalan lehetőség áll rendelkezésre a numerikus mechanika eszköztárában arra, hogy az érintkezési jelenségeket kezeljük. Ezek között az eljárások között számtalan olyan van, mellyel megfelelő pontossággal megoldhatjuk a kontakt feladatot azért, hogy már a tervezéskor figyelembe vehessük a működés közbeni érintkezések hatásait. Itt kell megállapítani azonban azt a tényt, hogy a ma elérhető általánosan használt végeselemes programrendszerek nem minden esetben alkalmazhatóak az érintkezés problémakörének vizsgálatára, például ha súrlódás is jelen van, vagy ha valamilyen optimalizálást kell végrehajtani az érintkezésben résztvevő gépelemek alakjára. Ezért a végeselem-módszerrel foglalkozó kutatók számára komoly kihívást jelent az, hogy hatékony, megbízható módszereket, eljárásokat dolgozzanak ki az érintkezési feladatok numerikus megoldása érdekében.

Kezdetben nagyon egyszerű érintkezési feladatokat fogalmaztak meg. Ilyen lehetett például a hasáb alakú építőelemek földről való felemelése, vagy ugyanez talajon való könnyebb mozgatása (lásd: 1.1 ábra). Később megjelentek a még ma is aktuális legkülönbözőbb gépelemek érintkezési problémái. Gondoljunk csak a klasszikusnak számító csapágyakra, vagy a különböző kötőelemek kapcsolódására. Ezeknél a feladatoknál ma már „apró” kérdések adják a megoldandó problémát, mint például azt, hogy hogyan hozzunk létre egy olyan gördülőelemet, melynek hossza mentén egy általunk kívánt feszültség eloszlás alakul ki. Ezen feladatok megoldása során általában kis alakváltozást tételezünk fel. Ennek ellenére, mivel a tényleges érintkezési tartomány kezdetben nem ismert, minden esetben nemlineáris feladatot kell megoldani, melyekhez speciális algoritmusok szükségesek.



1.1. ábra: Hasáb alakú test mozgatása

Az érintkezési feladatok alkalmazására a gépészmérnöki gyakorlatban számtalan helyen láthatunk példákat. Így találkozhatunk a problémával a legkülönbözőbb gépelemek, például a fogaskerek tervezésénél, vagy a hidegalakító eljárásoknál, a forgácsolással járó megmunkálásoknál, továbbá érintkezési feladat lép fel a járművek töréstesztjei során is. Fontos alkalmazási terület a vasúti kerek és sínek tervezése, vagy a járműabroncsok viselkedésének elemzése.

Az élet más területein is megfigyelhetjük azonban az alkalmazás jelentőségét, úgymint a biomechanikában, amikor az élő szövet és a beépített protézisek, vagy implantátumok viselkedését szeretnénk megjósolni. Az ilyen feladatok vizsgálatánál már nem elhanyagolható az a tény, hogy a feladat megoldásához nagy alakváltozások figyelembevétele is szükségessé válhat. Ezzel a területtel a disszertáció nem foglalkozik.

A különböző területekről származó kontakt feladatok tovább vizsgálhatók még bonyolultabb esetekben is, amikor a nagy alakváltozás mellett figyelembe vehetők még például a képlékeny alakváltozás, vagy az időtől való függés hatásai is. Természetesen a legtöbb ipari alkalmazásban numerikus módszereket kell használni, mivel az érintkezésben résztvevő testeknek igen komplex a geometriai kialakítása. Az érintkezési feladatok vonatkozásában a mai számítógéppel segített eljárásokat négy fő csoportba lehet osztani:

- Végeselem-módszer (*Finite element method*) – kis- vagy nagyalakváltozás mellett is alkalmazható, mind rugalmas, mind képlékeny alakváltozás esetén.
- Diszkrét elemek módszere (*Discrete element method*) – alapvetően akkor használják, ha az érintkezésben rendkívül nagy számú alkatrész vesz részt.
- Peremelem-módszer (*Boundary element method*) – a végeselem-módszerhez hasonlóan a feladatok széles köre kezelhető vele.
- Több testből álló rendszer (*Multi body system*) – amely a testek merevként való leírásán alapszik. A gépészeti szerkezetek egyszerűsített dinamikai modelljénél alkalmazták, ahol érintkezést is figyelembe kell venni.

Hőtani feladat csatolása is szükségessé válhat az olyan feladatok vizsgálatakor, amikor például hűteni kell elektronikus eszközöket, vagy egy nukleáris berendezés hőcserélőit kell szabályozni, vagy amikor hőszigetelést akarunk létrehozni úgy, hogy a vizsgált mechanikai reakció és a hővezetés az érintkezési tartományon is kapcsolódik egymáshoz. Hasonlóan érdekes feladat, amely főleg magashegységekben vált rendkívüli fontosságúvá, a lavinák

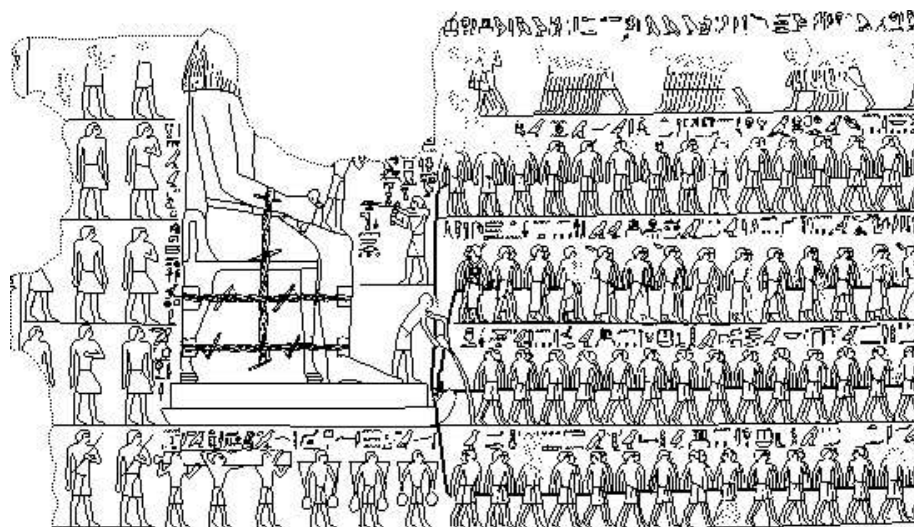
szimulációja. Ebben a feladatban az érintkezés problémája együtt jelentkezik a lavina mozgásának pontos leírásával, melyhez a kontinuummechanika eszköztárát kell segítségül hívni. Mindezekből látható, hogy a numerikus érintkezési mechanika (*Computational Contact Mechanics*) a tribológia tudományát is érinti, beleértve a súrlódást, a kenést vagy a kopást is. Ezért ez a tudományterület egy multidiszciplináris terület, mely felhasználja a tribológusok, matematikusok, számítástechnikusok, továbbá a mechanikához értő szakemberek eredményeit és kapcsolódik olyan kutatók munkájához is, akik a hővezetéssel, vagy elektromágnesesség kutatásával foglalkoznak.

A disszertációban a végelem-módszer használatára fogunk szorítkozni, hogy az általunk vizsgált szorosan vett problémákat elemezzük. Természetesen az alapvető elméleti háttér ismertetésére is sor kerül. Vannak olyan formalizmusok azonban, melyek általánosak és az alkalmazott módszertől függetlenül érvényesek. Ezeket külön fejezetekben fogjuk ismertetni. A diszkrét elemek módszeréről olvashatunk például ATTING és ESSER könyvében [3], illetve a több testből álló rendszerek és az érintkezési feladatok kapcsolatáról PFEIFFER és GLOCKER könyvében [53]. Mérnöki feladatok peremelem-módszerrel történő megoldására például BANERJEE [7] könyve nyújt útmutatást.

A vizsgált feladatok alapján felállított mechanikai modelleket megkülönböztetjük aszerint, hogy az eredetileg háromdimenziós problémát hogyan kezelhetjük. Kétdimenziósnak, vagy röviden 2D-s feladatnak nevezzük például a hengerszimmetrikus feladatokat, melyek kétdimenziós végelemekkel számíthatók. A szimmetria jellemzőket nem mutató problémák esetén pedig háromdimenziós végelemek szükségesek a numerikus szimuláció végrehajtásához, ezeket a feladattípusokat nevezzük háromdimenziósnak, vagy röviden 3D-s feladatnak.

1.1. Rövid történeti áttekintés

Tekintettel a technikai fontosságra, az érintkezés problémaköre már a múltban is sok kutatót foglalkoztatott. Mindannyian ismerjük a tényt, hogy már az ókori Egyiptomban szükség volt arra, hogy hatalmas kőtömböket mozgassanak a piramisok felépítéséhez. Ezzel kapcsolatban fel kellett, hogy merüljön az érintkezés, illetve az egyszerűbb mozgatás problémája. Ezt mutatja az 1.2 ábra, melyen látható hogy már az ókori egyiptomiak is tudtak a kenési folyamat jelentőségéről. A képen látható egy férfi, aki a szán széléről folyadékot önt közvetlenül a szán orra elé.



1.2. ábra: Kőtömb mozgatása az ókori Egyiptomban

Mivel a súrlódásnak komoly technikai jelentősége van, ezt a jelenséget már számtalan tudós vizsgálta. Köztük talán legelsőként LEONARDO DA VINCI (1452-1519) említhető meg, akit a mai modern tribológia atyjaként is emlegetnek. Ő már 150 évvel AMONTONS súrlódási törvényei előtt leírta kéziratában az AMONTONS-féle megállapításokat. A tribológia úttörőjéhez tartozik LEONARDO DA VINCI mellett még GUILLAUME AMONTONS (1663-1705) lásd [1], JOHN THOEPHILIUS DESANGULIERS (1683-1744), LEONARD EULER (1707-1783) és CHARLES-AUGUSTIN COULOMB (1736-1806). Még mindig ezen úttörők munkája jelenti a szabványt és a törvényszerűséget a mai mérnöki problémákhoz. Megállapításaikat a következő három törvény foglalja össze:

1. A súrlódási erő arányos az érintkező felületeket összenyomó erővel. (AMONTONS 1. törvénye)
2. A súrlódási erő nagysága független a hozzá rendelhető érintkezési tartomány nagyságától. (AMONTONS 2. törvénye)
3. A mozgási súrlódás független a csúszási sebességtől. (COULOMB törvénye)

Ez a három törvény csak száraz súrlódás esetén érvényes, mint ahogy az már régóta ismeretes, a kenőanyag jelentősen módosíthatja a tribológiai jellemzőket. Ha a fentieket összegezzük, akkor eljutunk egy minden mérnök által ismert formulához, mely COULOMB mozgási súrlódási törvényeként ismert:

$$F_T = \mu N, \quad (1.1)$$

ahol F_T a súrlódási erő, N a normál irányú erő és μ a súrlódási együttható.

Az első, matematikai szempontból elvégzett elemzés EULER nevéhez fűződik, aki háromszögekkel közelítette a felület egyenletlenségét [16]. Ő vonta le a következtetést a tömeg mozgási egyenletének megoldásából arra vonatkozóan, hogy a kinetikai súrlódási együtthatónak kisebbnek kell lennie a tapadási súrlódási együtthatónál. Valójában EULER volt, aki először használta a μ szimbólumot a súrlódási együttható jelölésére, mely mind a mai napig elfogadott jel.

COULOMB átfogó kísérleti tanulmányt végzett 1785-ben [13] és a következőt állapította meg. A súrlódás kapcsolatban áll a normál nyomással, a felület nagyságával, az anyagjellemzőkkel, a felületi bevonattal, a környezeti feltételekkel – úgymint nedvesség, hőmérséklet és légnyomás – és a súrlódási erő időfüggésével. De később azt is COULOMB állapította meg, hogy a μ majdnem független a normál irányú erőtlől, a csúszási sebességtől, az érintkezési tartománytól és a felületi érdességtől.

HERTZ 1882-es klasszikusnak számító analitikus munkájában a rugalmasságtant alkalmazta az érintkezési mechanikában [23]. HERTZ két rugalmas gömb érintkezését vizsgálta és analitikus megoldást adott az érintkezési nyomás eloszlására vonatkozóan. Azonban csak nagyon kevés valóságos érintkezési feladat oldható meg analitikus módon. Johnson 1985-ben megjelent könyve áttekintést ad ezekről a feladattípusokról [26].

A végeselem-módszer együtt fejlődött ki az egyre gyorsuló modern számítógépekkel. Az ötvenes évek végén jelent meg egy publikáció melyben arról írtak, hogy végeselemek segítségével oldottak meg szerkezeti problémákat (lásd TURNER és munkatársai 1956-ban megjelent cikkét [64]). Ezt követően az irodalom hihetetlen mértékben nőni kezdett, mivel az iparban nagy szükség volt olyan feladatok megoldására is, amelyeket analitikus úton már nem tudtak kezelni. Ezután még nagyjából 10 év telt el, míg megjelentek olyan publikációk, melyekben már érintkezési feladatok végeselemes megoldásáról szóltak. Ezek közül is talán az első, az 1970-es WILSON és PARSONS publikációja [65].

1.2. Irodalmi áttekintés

Az érintkezés jelenségével kapcsolatos kutatások gyökerei legalább a 18. századig nyúlnak vissza. Akkoriban az érintkezésben résztvevő testeket merevnek tekintették, alapvetően azért, hogy a formulákat egyszerűen tudják kezelni. Ennek következtében azonban a testekben ébredő feszültségeket és az alakváltozásokat nem tudták meghatározni. Az első analitikus megoldás, mely már rugalmas testekkel foglalkozott, HERTZ-től származik [23]. A HERTZ-féle érintkezési elmélet segítségével csak az érintkezési pont, vagy vonal közvetlen környezetében határozhatók meg a feszültségek és az alakváltozások. Ezzel a módszerrel tehát csak nagyon speciális feladatokat tudunk vizsgálni. Ezt a teóriát azonban a kontakt mechanika fontos mérföldkövének tekinthetjük. Az egyoldalú érintkezési feladatok általános érvényű formalizmusát SIGNORINI publikálta 1933-ban [56], felállítva a peremérték feladatot egy rugalmas és egy merev test érintkezésekor. Néhány speciális statikai és dinamikai rugalmas érintkezést vizsgált GOLDSMITH 1960-ban, úgymint két rúd vagy egy rugalmas test és egy sík kontakt feladata [18]. Ebben analitikus megoldásokat szolgáltatott a problémákra, csatolva hozzájuk kísérleti eredményeket is.

Az érintkező alkatrészek szilárdsági vizsgálatához nem elegendő az érintkezési helyeken létrejövő maximális érintkezési nyomás meghatározása; a feszültségi állapot teljes jellemzéséhez szükséges a testek minden pontjában a főfeszültségek ismerete. Korábbi munkákban a feszültségi állapotot a kör alakú és a párhuzamos egyenesekkel határolt sáv alakú érintkezési tartomány eseteiben vizsgálták, melyek elemzéséhez zárt alakú képleteket kaptak, mind a kialakuló érintkezési tartomány jellemző méreteire, mind az érintkezési nyomás eloszlására. Ezek összefoglalását PONORMAJOV tette meg 1958-ban [55], oly módon, hogy a mérnökök matematikai tájékozottságának megfelelő részletességgel mutatja be az elliptikus érintkezési tartományhoz tartozó geometriai és szilárdsági jellemzők meghatározásának módját.

TIMOSHENKO és GOODIER 1970-ben megjelent rugalmasságtan könyvében [63] az érintkezési alakváltozások elmélete kör alakú érintkezési felület esetében kerül bemutatásra. Ebben a tárgyalási módban az érintkezési feladatot a rugalmas féltérre – mely igen nagy kiterjedésű test és a működő erőre merőleges sík határol – ható koncentrált erő által felírható hatásmátrix segítségével kezeljük. Az érintkezési feszültségek és alakváltozások vizsgálatának ezen módszere a mérnökök és technikusok széles köre számára hozzáférhető, mellyel lehetséges két összenyomódó alkatrész elliptikus érintkezési tartományának elemzése általános esetben is.

A testek érintkezési alakváltozásainak vizsgált kérdéséhez szorosan kapcsolódik a rugalmas test alakváltozásának problémája tetszőleges alakú merev bélyeg benyomódása esetén. A kör és elliptikus, sík és térbeli bélyegekkal kapcsolatban több feladatot LUR'E vizsgált meg 1964-es [38] munkájában. Két rugalmas test kezdeti pontszerű érintkezési feladatával matematikailag egyenértékű feladatot, a térbeli elliptikus bélyeg feladatát is vizsgálta.

Variációs egyenlőtlenségek felállításával lehetőség van minden kapcsolódó peremfeltétel – beleértve az érintkezés és elválás feltételeit is – figyelembevételére. KIKUTCHI és ODEN variációs egyenlőtlenségek segítségével vizsgálja a súrlódás nélküli érintkezési feladat esetén a megoldás létezését és egyértékűségét az 1988-as [33] publikációban. Kimutatták, hogy a rugalmasságtani problémáknál az érintkezési feladat virtuális munka elvből származtatott megoldása ugyanazt az eredményt adja, mint az, amely az érintkezési feltételekkel megfogalmazott potenciális energia minimuma elvből származik. Ezért a hagyományos optimalizáló eljárások lehetőséget adnak arra, hogy ezeket a variációs egyenlőtlenségek megoldására is alkalmazzuk. KIKUTCHI és ODEN ugyanebben a cikkben végelemek segítségével kezelte az egyoldalú érintkezési feladatokat, melyeknél a kialakuló érintkezési feszültség csak nyomófeszültség lehet. Ez a gyakorlat szempontjából azt jelenti, hogy a felületek nincsenek egymáshoz rögzítve például ragasztóval.

A LAGRANGE-féle multiplikátoros módszert, a büntetőparaméteres technikát és a módosított LAGRANGE-féle multiplikátoros módszert ismerteti ZHONG az 1993-ban megjelent könyvében a súrlódás nélküli érintkezési feladatok megoldására [67]. A LAGRANGE-féle *multiplikátoros módszer* keretein belül az érintkezési-elválási feltételek egzakt módon kielégíthetőek, a módszer által igényelt pótlólagos ismeretlenek révén. Ezeket az ismeretlen szorzótényezőket LAGRANGE-féle multiplikátornak nevezzük. A *büntetőparaméteres* technika úgy ismert, mint a legegyszerűbb fizikai tartalommal is rendelkező módszer. Ennek az eljárásnak könnyű a programozhatósága, hátránya viszont, hogy a megoldás pontossága nagymértékben függ a büntetőparaméter megválasztásától, mivel annak nagysága jelentősen befolyásolja a megoldandó egyenletrendszer kondícióját. Ez azért van így, mert az érintkezési feltételek akkor lennének nagy pontossággal biztosítva, ha a büntetőparaméter végtelen nagyságú lenne. A *módosított LAGRANGE-féle multiplikátoros* technika egy olyan iteratív eljárás, mely magába foglalja a hagyományos büntetőparaméteres tagot és az előző iterációs lépésben kapott elmozdulás alapján kiszámolt LAGRANGE-féle multiplikátoros tagot. Ezen módszerek jellemzőit ARORA és szerzőtársai foglalták össze az [2] cikkben.

Ha a normál irányú erők eloszlását ismertnek tételezzük fel a kontakt tartomány mentén, akkor a súrlódásos feladat variációs egyenlőtlenségeit is definiálhatjuk, úgy ahogyan PANAGIOTOPOULOS tette [48]. A variációs egyenlőtlenség megoldása lényegében egy nem differenciálható optimalizációs probléma megoldását jelenti. A nem differenciálható természetét a feladatnak az adja, hogy jelen van a nem differenciálható súrlódási energia tag a célfüggvényben.

Minden érintkezésnél megfigyelhető a súrlódási jelenség és sok esetben ez nem hanyagolható el. A gyakorlatban a súrlódás nélküli feladatok viszonylag kevés helyen használhatók fel, ezért a súrlódásos érintkezési feladatok sokkal nagyobb fontossággal bírnak. Ezen feladatok megoldása azonban, a variációs egyenlőtlenségek felhasználásával, számos nehézséget is magában hordoz. Ez annak tudható be, hogy a tényleges érintkezési tartomány, az elmozdulási peremfeltételek ezen a tartományon, az érintkezési nyomás és a súrlódási, érintő irányú feszültség, ami az előző nyomásértéktől függ, mind-mind ismeretlenként szerepel. Természetesen még ehhez tartozik az is, hogy a COULOMB-féle súrlódási törvény nem sima, hanem többértékű függvényt ad. Az ilyen típusú feladat azért még így is megoldható, ahogy azt például KIKUTCHI és ODEN tette a [33] cikkben. Ők a terhelést növekményekben helyezték a testre és ezekben a terhelési lépésekben külön-külön elvégezték az egyensúlyi iterációt.

Az érintkezési feladatok kezelésének egy másik lehetséges módja az, amikor variációs egyenlőségeket állítunk fel, melyeket a virtuális munka elvéből származtatunk. A numerikus eljárás során a terhelést apró növekmények formájában teszik a testre, és iteratív módon keresik a megoldást, lásd a HUGES és kollégái által írt 1976-ban megjelent cikket [25]. Ez a megközelítés fontos állomást jelent elsősorban a mérnökök számára. A variációs egyenlőségek alapján működik számtalan végesesemes programrendszer, mint az ANSYS, vagy az ABAQUS. Számtalan megoldási módszer látott napvilágot ezen a területen, melyek azonban csak bizonyos gyakorlati érintkezési feladatok megoldását segítik [67].

Súrlódás nélküli érintkezési feladatokat oldottak meg variációs egyenletek segítségével SIMO és munkatársai [57]. Az egyoldalú érintkezési feltételeket a perturbált LAGRANGE-féle multiplikátoros módszerrel biztosították a megoldáshoz. Ebben a megoldási módszerben a klasszikus LAGRANGE-funkcionált kvadratikus kifejezéssel regularizálták. Ugyanezt a módszert alkalmazta JU és TAYLOR a [27] cikkben, de már a súrlódásos feladat megoldására. A súrlódást a COULOMB-féle törvény módosításával vették tekintetbe. A nemlineáris egyenletrendszer megoldásához inkrementális iteratív egyenletrendszer megoldót használtak fel. A numerikus számítási példák merev/rugalmas bélyeg, illetve rugalmas alapzat

érintkezését, továbbá rugalmas gömb és merev alapzat érintkezését vizsgálták két dimenzióban.

A variációs egyenlőségek felől közelítve az érintkezési feladatok megoldásához, egy viszonylag jól működő technikát kapunk még nagyméretű gyakorlati problémák esetén is. Ez a megközelítés azonban matematikailag nem olyan jól megalapozott, mint a variációs egyenlőtlenségek alkalmazása, továbbá a numerikus megoldás során számtalan megoldási nehézség merül fel. A terhelési lépcső vagy az időlépés megválasztása a megoldás szempontjából igen kritikus, nemcsak a konvergencia biztosítása miatt, de az érintkezési és súrlódási feltételek megfelelően pontos betartása miatt is. Továbbá nem elhanyagolandó szempont a megoldási technika hatékonysága sem, a szükséges hardver erőforrások tekintetében. A megoldás még számos numerikus paraméter függvénye – mint például az érintkezési merevség, tapadási jellemzők stb. –, melyek jó része feladatfüggő is. Természetesen ezeknek a paramétereknek a beállítására lehetőséget kínál a legtöbb általános céllal készített vége-selemes programrendszer, de ezek beállítása nagyfokú körültekintést igényel, hogy az adott problémára kapott eredmény ténylegesen az általunk tervezett feladat megoldását jelentse.

A vége-selem-módszer három típusáról szokás beszélni annak alapján, hogy milyen módon lehetséges a megoldás pontosítása. A megoldás javítását elérhetjük úgy, hogy a vége-selemek méretét csökkentjük – azaz növeljük a vége-selemek számát –, ekkor h -verziós módszerrel dolgozunk. A számítás pontosítása azonban elérhető oly módon is, hogy az elemek méretét változatlanul hagyjuk, ellenben az elemeken működő alakfüggvények p fokszámát változtatjuk. Ezzel tulajdonképpen szintén a feladatban szereplő ismeretlenek számát növeljük, és így jutunk az úgynevezett p -verziós vége-selemekhez. E két technika párhuzamos, összehangolt alkalmazásával kapjuk a hp -verziós vége-selem-módszert.

A p -verziós vége-selem-módszer alapjait SZABÓ és BABUŠKA foglalta össze az 1991-ben megjelent könyvben [60]. Bebizonyították, hogy a p -verziós elemek alkalmazása – ugyanannyi ismeretlenszám mellett – általában jobb megoldást nyújt, mint a h -verziós elemeké. A szingularitásokat is tartalmazó feladatok esetében a hp -verziós elemek segítségével exponenciális konvergenciát érhetünk el az energianorma tekintetében [60].

Egy további SZABÓ és BABUŠKA által bevezetett osztályozás a vége-selem-módszerrel kezelt feladatokat három típusba sorolja aszerint, hogy az $\mathbf{u}_{ex}$ tényleges megoldás milyen a vizsgált tartományon [60]. A feladat az A típusba tartozik, ha a választott felosztástól függetlenül a teljes elemen analitikus megoldást kapunk. A B típusú feladatban az elemfelosztás oly módon történik, hogy véges számú pontot, vagy éleket kivéve a megoldás az elemen analitikus, azaz a nem analitikus helyek a vége-selem-határakra, vagy csomópontba kerülnek. Ha azonban az elemfelosztás nem lehetséges úgy, hogy az $\mathbf{u}_{ex}$ tényleges megoldásban tapasztalható ugrásszerű változás az elemhatárra vagy a csomópontba kerüljön, akkor C típusú feladatot vizsgálunk. Érintkezési feladatoknál szükséges az elemhatárok változtatása, mellyel elérhető, hogy az ún. C típusú feladat B típusú legyen. Az elemhatárok ilyen célú mozgatásával elsőként PÁCZELT és szerzőtársai a [44] cikkben foglalkoztak.

Különböző típusú kétdimenziós érintkezési feladatokat vizsgáltak a [42] publikáció szerzői. Kétdimenziós érintkezési feladatok esetén iterációs technikával a p -verziós elemek igen jó megoldást szolgáltatnak az érintkezési tartomány határának keresésekor.

1.3. Célkitűzések

Jelen értekezés az érintkezési feladatok numerikus vizsgálatát tekinti elsődleges feladatának. Két alapvető irányban folytatunk kutatást. Egyrészt megvizsgáljuk a tengelyszimmetrikus érintkezési feladatok kapcsán felállított alakoptimalizálási feladatokat. Másrészt a térbeli érintkezés problémakörét kívánjuk áttekinteni és újfajta szemlélettel kezelni.

- Új típusú optimalizálási feladatokat kívánunk felállítani arra vonatkozóan, miszerint a gyakorlati feladatoknál mindig tekintettel kell lenni arra, hogy a valóságos anyag nem terhelhető tetszőleges mértékben. A különböző rugalmas anyagú gépelemek tönkremenetelét a mérnöki gyakorlatban elsősorban az anyagra megengedett és az anyagban kialakuló redukált maximális feszültségek egymáshoz képesti viszonya szabja meg.
- A felállított alakoptimalizációs feladatokra megoldási eljárást kívánunk kidolgozni, mely beépíthető a létező p -verziós számítógépi programunkba a kidolgozott elvek működésének illusztrálása érdekében.
- Görgő alakú testek alakoptimalizálási kérdéseit szeretnénk megvizsgálni olyan tekintetben, hogy a már létező optimalizálási lehetőségek hogyan fejleszthetők tovább a különböző terhelési esetek függvényében. Meg kívánjuk vizsgálni a gördüléssel érintkezés problémakörét is azzal a céllal, hogy meggyőződjünk arról, hogy a súrlódás hatása az alakoptimalizálás során a görgő alakú testek érintkezésekor valóban elhanyagolható-e.
- A tengelyszimmetrikus feladatokon túllépve, háromdimenziós érintkezési feladat numerikus vizsgálatát kívánjuk megoldani p -verziós végesesemes program kifejlesztésével. Térbeli érintkezés esetén a kialakuló érintkezési tartomány már nem egy vonal hanem esetünkben, egy egyszeresen összefüggő felület, amelyet sima, zárt görbe határol. Ennek a felületnek a pontos azonosítása kulcskérdés e nemlineáris feladat hatékony és precíz megoldása érdekében.

Az érintkezési felület határát szeretnénk oly módon leírni, hogy az a numerikus szimulációk során számítógépi program által önállóan – „adaptív” módon – változtatható legyen azért, hogy a kezdeti C típusú feladot B típusúvá alakítsuk át, mivel így módon a p -verziós elemek alkalmazása továbbra is exponenciális konvergenciát nyújt a hibanorma tekintetében. Ennek érdekében meg kívánjuk vizsgálni a különböző paraméteres görbeleírási módszereket, elsősorban a B-spline és a NURBS görbéket, mivel ezek a geometriai modellezési technikák kielégítő rugalmasságot mutatnak, azaz a görbék alakja könnyen, néhány paraméter segítségével változtatható.

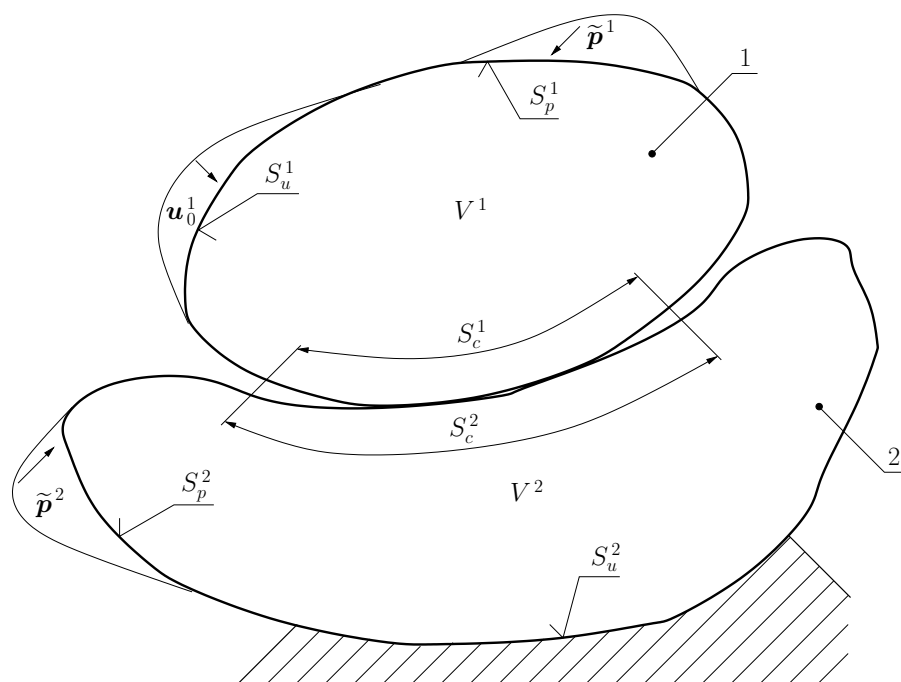
2. fejezet

MECHANIKAI ÉRINTKEZÉSI FELADAT MEGFOGALMAZÁSA

2.1. Rugalmasságtani feladat

Tekintsünk egy rugalmas testekből felépített háromdimenziós mechanikai rendszert. A kölcsönhatásoknak csak a mechanikai jellegét vizsgáljuk, nem vesszük tehát figyelembe a testek mágneses, elektromos, termikus kölcsönhatásait, továbbá a testek egymásra gyakorolt gravitációs vonzóerejét is elhanyagoljuk. Feltételezzük, hogy a felmerülő elmozdulások és alakváltozások kicsik, továbbá a terhelés hatására létrejövő alakváltozás rugalmas. Másként fogalmazva, a lineáris rugalmasságtan keretei között keressük a megoldást.

A rugalmas rendszer két testből áll ($\alpha = 1, 2$), ahogy azt a 2.1 ábra egy síkmetszet feltüntetésével szemlélteti.



2.1. ábra: Két test érintkezési feladata

A testek V^α térfogatát az S^α felületek határolják. Ezek különböző résztartományokra oszthatók fel: S_u^α -n az $\mathbf{u}_0^\alpha$ elmozdulásmező adott; S_p^α -n a $\tilde{\mathbf{p}}^\alpha$ felületi terhelés van előírva; S_c^α pedig az érintkezés feltételezett tartománya. Az α felső index azt jelöli, hogy a két test közül melyikről van konkrétan szó ($\alpha = 1$ jelenti a felső, míg $\alpha = 2$ az alsó testet.)

A testekre ható térfogati terhelést a $\rho^\alpha \mathbf{k}^\alpha$ jelöli, ahol ρ^α a testek sűrűsége, $\mathbf{k}^\alpha$ pedig az egységnyi tömegben működő terhelés. Feladatunk, hogy meghatározzuk azt az $\mathbf{u}^\alpha = \mathbf{u}^\alpha(\mathbf{r})$

elmozdulásmezőt – $\forall \mathbf{r} \in V^\alpha$, ahol $\mathbf{r}$ a helyvektor –, mely kielégíti a rugalmasságtani alapegyenletrendszeret.

Teljesülnie kell tehát a

$$\mathbf{T}^\alpha \cdot \nabla + \rho^\alpha \mathbf{k}^\alpha = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{r} \in V^\alpha \quad (2.1)$$

egyensúlyi egyenletnek, ahol $\mathbf{T}^\alpha = \mathbf{T}^\alpha(\mathbf{r})$ a feszültségi tenzor. Az elmozdulásmező és a kismértékű alakváltozások között a *kinematikai egyenlet* írja le a kapcsolatot:

$$\mathbf{A}^\alpha = \frac{1}{2} (\mathbf{u}^\alpha \circ \nabla + \nabla \circ \mathbf{u}^\alpha) \quad \forall \mathbf{r} \in V^\alpha, \quad (2.2)$$

ahol $\mathbf{A}^\alpha = \mathbf{A}^\alpha(\mathbf{r})$ az alakváltozási tenzor. A feszültségek és az alakváltozások közötti viszonyt az *anyagegyenlet* fejezi ki:

$$\mathbf{T}^\alpha = \mathbf{D}^\alpha \cdot \cdot \mathbf{A}^\alpha \quad \forall \mathbf{r} \in V^\alpha, \quad (2.3)$$

ahol $\mathbf{D}^\alpha$ az anyagállandók – esetenként helytől is függő – negyedrendű tenzora. Homogén, izotróp anyagoknál $\mathbf{D}^\alpha$ tenzor csak két anyagállandótól függ, az E rugalmassági modulus-tól, és a ν POISSON-tényezőtől. Az előzőekben „ $\cdot$ ” jelöli a skaláris, „ $\cdot \cdot$ ” a kétszeres skaláris, míg „ $\circ$ ” a diadikus, vagy tenzoriális szorzást.

A rugalmasságtani feladat megoldása teljesíti egyrészt a *kinematikai peremfeltételt*

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \quad \forall \mathbf{r} \in S_u^\alpha, \quad (2.4)$$

ahol $\mathbf{u}_0$ előírt elmozdulásmező az S_u^α felületen, másrészt a *dinamikai peremfeltételt*

$$\mathbf{T}^\alpha \cdot \mathbf{n}^\alpha = \tilde{\mathbf{p}}^\alpha \quad \forall \mathbf{r} \in S_p^\alpha, \quad (2.5)$$

ahol $\tilde{\mathbf{p}}^\alpha$ az előírt felületi terhelés az S_p^α felületen.

A (2.1)-(2.3) mezőegyenletek mindkét testre 15 skalár egyenletet definiálnak, 15 ismeretlennel. A fenti mezőegyenleteket és peremfeltételeket ki kell egészíteni az S_c^α tartományra vonatkozó ún. érintkezési feltételekkel. Ezeket a 2.2. szakaszban részletezzük. A (2.1)-(2.3) mezőegyenletek és a csatlakozó (2.4) és (2.5) perem-, illetve a később felírt (2.10a-c) érintkezési feltételek által meghatározott feladatnak nem ismeretes általános esetben a pontos megoldása. Számos közelítő módszer létezik, melyekből néhány a teljes potenciális energia minimuma elvre épül. A *teljes potenciális energia* a következő alakban írható fel:

$$\Pi = \Pi(\mathbf{u}) = \sum_{\alpha=1}^2 \left[\frac{1}{2} \int_{V^\alpha} \mathbf{A}^\alpha \cdot \cdot \mathbf{D}^\alpha \cdot \cdot \mathbf{A}^\alpha dV - \int_{V^\alpha} \rho^\alpha \mathbf{k}^\alpha \cdot \mathbf{u}^\alpha dV - \int_{S_p^\alpha} \mathbf{u}^\alpha \cdot \tilde{\mathbf{p}}_0 dS \right]. \quad (2.6)$$

A teljes potenciális energia minimuma elv értelmében – mely azt állítja, hogy a kinematikailag lehetséges elmozdulásmezőkhöz tartozó teljes potenciális energia szigorú minimummal rendelkezik az egzakt megoldás esetén –, a (2.6) funkcionál minimalizálása a feladatunk. Az érintkezési feltételek figyelembevételéhez ezt a funkcionált módosítani kell. Ennek lépéseit a következő szakaszokban vizsgáljuk.

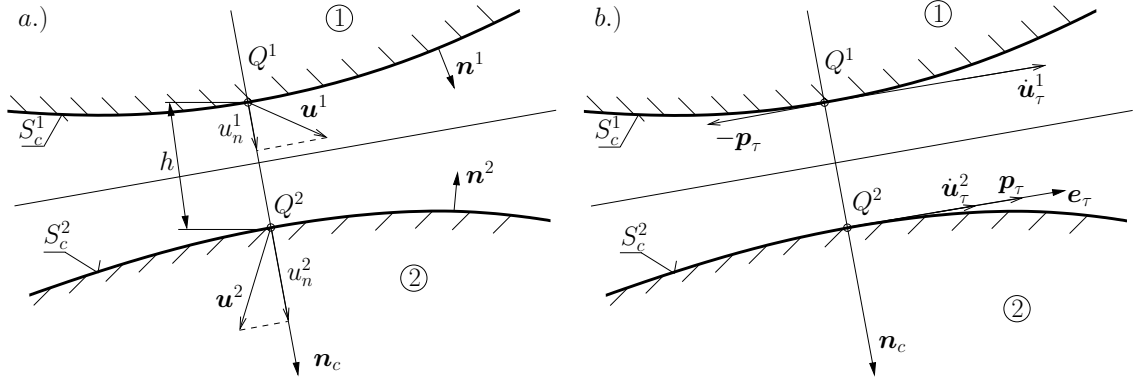
2.2. Kinematikai megfontolások a súrlódás figyelembevétele nélkül

Jelölje $\mathbf{n}^\alpha$ az α jelű test külső normálisát. Az érintkezés lehetséges S_c^α tartományában $\mathbf{n}_c = -\mathbf{n}^2 \cong \mathbf{n}^1$ képlettel értelmezzük az $\mathbf{n}_c$ érintkezési normálist. Jelölje ebben a

tartományban h az $\mathbf{n}_c$ mentén mért hézagot a két test között a terhelés kezdete előtt. A terhelési folyamat végére, a testek közötti d távolság a

$$d = d(\mathbf{u}) = u_n^2 - u_n^1 + h \geq 0 \quad \forall \mathbf{r} \in S_c^{\alpha}, \quad (2.7)$$

értékre módosul. A felhasznált mennyiségek értelmezéséhez lásd a 2.2. ábrát. Itt $u_n^{\alpha} = \mathbf{u}^{\alpha} \cdot \mathbf{n}_c$. A (2.7) képlet az egyoldalú érintkezés feltételét adó egyenlőtlenség.



2.2. ábra: Két test lehetséges érintkezése: a.) normál; b.) érintő irányú mennyiségek

Az S_c lehetséges érintkezési tartomány felbontható egy Ω_p tényleges érintkezés és egy Ω_0 réstartományra, azonban $S_c = \Omega_p \cup \Omega_0$. Nyilvánvaló ugyanis, hogy:

- (a) a $d > 0$ esetben nem érintkezik a két test a terhelés után;
- (b) a $d = 0$ egyenlőség meghatározza azokat a perempontokat, ahol létrejön a két test érintkezése (ezt a tartományt Ω_p jelöli);
- (c) a $d < 0$ eset nem lehetséges, ugyanis a két test nem hatolhat egymásba.

Ha nincs súrlódás, akkor a két test között csak nyomófeszültségek ébredhetnek ebben a tartományban (a két test egymásnak feszül). A feszültségi állapot ismeretében az érintkezési normál irányú feszültség az S_c^{α} tartományon a következő módon írható fel

$$\sigma_n^{\alpha} = \mathbf{n}^{\alpha} \cdot \mathbf{T}^{\alpha} \cdot \mathbf{n}^{\alpha}. \quad (2.8)$$

Maga az érintkezési nyomás a normál feszültség segítségével definiált:

$$p_n = -\sigma_n^1 = -\sigma_n^2. \quad (2.9)$$

Az elmondottakat összegezve

- (a) érintkezési feltételről beszélünk, ha a testek érintkeznek egymással, azaz

$$d = 0, \quad p_n \geq 0 \quad \forall \mathbf{r} \in \Omega_p, \quad (2.10a)$$

- (b) elválási feltételről beszélünk, ha hézag van a testek között, azaz

$$d > 0, \quad p_n = 0 \quad \forall \mathbf{r} \in \Omega_0, \quad (2.10b)$$

- (c) tömören összefoglalva, illetve egyesítve a (2.10a,b)-t

$$d \geq 0, \quad p_n \geq 0, \quad p_n \cdot d = 0, \quad \forall \mathbf{r} \in S_c = \Omega_p \cup \Omega_0. \quad (2.10c)$$

A (2.10c)-ben felírt formulákat együttesen HERTZ-SIGNORINI-MOREAU-féle feltételeknek hívják a szakirodalomban. Ezek a feltételek jelentik a kiindulási alapot a súrlódás nélküli érintkezési feladatok kezeléséhez.

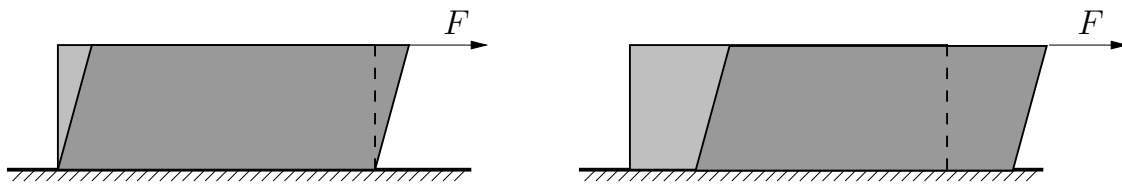
2.3. Súrlódás figyelembevétele

A súrlódásos érintkezés kapcsán vizsgált felületek közötti viselkedés nagyon lényeges a legtöbb gyakorlati alkalmazás során. Az ehhez kapcsolódó tudományterületet tribológiának hívják, ami elsősorban olyan rendszerekkel foglalkozik, ahol súrlódás is jelen van, mint a fékek vagy csapágyak esetén. A tribológia vizsgálja az adhézió, a súrlódás, a kopás jelenségét, illetve a kenés hatását is. Ez a tudományterület kezeli a hőtani feladattal kapcsolt érintkezési feladatokat is. Gazdasági szempontból is lényes kérdéseket tárgyal ez a tudományág, például megpróbálja megbecsülni azt, hogy egy gépalkatrész mennyi ideig lesz még használható.

Annak ellenére, hogy a súrlódási jelenséget már régóta vizsgálják, kezdve LEONARDO DA VINCI, AMONTONS és COULOMB munkásságával. Számtalan elmélet látott már napvilágot, a súrlódási folyamat kezelése azonban még mindig nem teljesen tisztázott. Ez elsősorban azzal magyarázható, hogy a felületek súrlódással kapcsolatos viselkedése egészen atomi szintű kémiai, elektromágneses, illetve mechanikai folyamatokra vezethető vissza. Továbbá az érintkezésben résztvevő felületek szerkezete meglehetősen bonyolult, mivel például egy fémes felület számos réteget tartalmaz, ami befolyásolja a súrlódást. Általában a súrlódási együttható függ a felületeket összeszorító normál nyomástól, a felületek relatív tangenciális sebességétől, a felületi érdességtől, a hőmérséklettől és még számtalan egyéb paramétértől.

A formalizmus áttekintésére, a súrlódásos érintkezés vizsgálatához a COULOMB-féle száraz súrlódási modellt használjuk.

A kontakt tartomány a tangenciális irányú mozgásokat tekintve kétféle reakciót mutat. Az első eset az amikor nincs tangenciális irányú elmozdulás a terhelés hatására, ahogy ezt a 2.3 ábra baloldali része mutatja. Ezt a jelenséget tapadásnak (angol szóval *stick*-nek) hívjuk. A másik esetben a terhelés hatására tangenciális irányú mozgás is bekövetkezik, ezt illusztrálja a 2.3 ábra jobboldali része. Ez utóbbi jelenséget csúszásnak (angol kifejezéssel *slip*-nek) nevezzük.



2.3. ábra: Tapadás és csúszás az érintkezési tartományon

A súrlódás hatásának vizsgálata megkívánja tehát a csúszás definiálását, ami két test egymáshoz viszonyított sebessége:

$$\dot{\mathbf{u}}_\tau = \dot{\mathbf{u}}_\tau^1 - \dot{\mathbf{u}}_\tau^2, \quad (2.11)$$

ahol $\dot{\mathbf{u}}_\tau^\alpha$ az α jelű test tangenciális sebessége.

Az érintkezési tartomány azon részén, ahol csak tapadás van, a következő feltétel teljesül:

$$\|\mathbf{p}_\tau\| \leq \mu p_n, \quad \dot{\mathbf{u}}_\tau = \mathbf{0}, \quad (2.12)$$

ahol

$$\mathbf{p}_\tau = -\mathbf{T}^1 \cdot \mathbf{n}^1 - p_n \mathbf{n}_c = \mathbf{T}^2 \cdot \mathbf{n}^2 - p_n \mathbf{n}_c \equiv \mathbf{p} - p_n \mathbf{n}_c. \quad (2.13)$$

A csúszási tartományban definiált a tangenciális tehervektor

$$\mathbf{p}_\tau = \mu p_n \frac{\dot{\mathbf{u}}_\tau}{\|\dot{\mathbf{u}}_\tau\|}, \quad (2.14)$$

ahol $\mathbf{p}_\tau$ a (2.11) alatti $\dot{\mathbf{u}}_\tau$ relatív sebességre tekintettel az alsó testre van kiszámítva, azaz a 2.2 ábra szerinti ② testre.

2.4. Variációs formalizmus

Az érintkezési feladatok kapcsán felállított peremértékfeladat megoldását különböző variációs elvek segítségével kaphatjuk meg. Ezen elvek alapvetően a teljes potenciális energiával kapcsolatosak [10], azzal a különbséggel, hogy az érintkezés-elválás kapcsán felmerült (2.10a)-(2.10c) feltételeket hogyan vesszük figyelembe. A következőkben három közismert módszert írunk fel, melyeknek egyaránt vannak előnyök és hátrányaik. Ezek a LAGRANGE-féle multiplikátoros módszer, a büntetőparaméteres technika, illetve ezen két módszer előnyeit ötvöző, hátrányait kiküszöbölő kombinált technika, melyet az angol nyelvű szakirodalomban *augmented Lagrangian technique* néven találhatunk meg.

2.4.1. LAGRANGE-féle multiplikátoros technika

Az érintkezési feladat megoldásakor a (2.7) egyenlet által definiált hézagfüggvény teljesítését az ú.n. LAGRANGE szorzótényező (multiplikátor) biztosítja. A multiplikátor akkor aktív, ha a megoldás teljesíti a (2.10a) feltételt, azaz ekkor a LAGRANGE-féle multiplikátoros technika kiegészíti a rendszer teljes potenciális energiáját egy taggal, mely tartalmazza az érintkezési feltételt

$$\mathcal{L}^{LA} = \Pi(\mathbf{u}) - \int_{S_c} p_n d(\mathbf{u}) dS, \quad (2.15)$$

amelyben a LAGRANGE-féle ismeretlen $p_n \geq 0$ multiplikátor ebben az esetben az érintkezési nyomást adja meg. A (2.15) által felírt funkcionált minimalizálni kell azzal a mellékfeltétellel, hogy a tényleges érintkezési tartományon a d hézagfüggvény azonosan zérus értékű, illetve ekkor $p_n \geq 0$. Ezzel a módszerrel az $\mathbf{u}$ elmozdulásmező mellett a p_n érintkezési nyomásmező is ismeretlenként jelenik meg az S_c érintkezési tartomány felett, azaz a módszer növeli a feladatban szereplő ismeretlen mezők számát.

2.4.2. Büntetőparaméteres technika

A módszer nem hoz új ismeretleneket a feladatba, itt csak az elmozdulásmezőt kell meghatározni. A következő funkcionál minimalizálása szolgáltatja a feladat megoldását

$$\mathcal{L}^{PE} = \Pi(\mathbf{u}) + \frac{1}{2} \int_{\Omega_p} c [d^-(\mathbf{u})]^2 dS, \quad c \gg 0, \quad d^-(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (|d(\mathbf{u})| - d(\mathbf{u})), \quad (2.16)$$

ahol c jelöli a büntetőparamétert, $d^-(\mathbf{u})$ pedig a (2.7) által definiált hézagfüggvény negatív értékeit. Tehát ennél a módszernél a (2.16) alatti utolsó tag akkor bünteti a kielégítendő feltételt, ha a két test látszólag „egymásba hatol”, azaz d negatív értéket vesz fel.

A c büntetőparaméternek fizikai jelentést is tulajdonítunk, nevezetesen az érintkezési tartományon elhelyezett megoszló rugalmas közeg – továbbiakban rugók – rugómerevségét. Ez az oka annak, hogy a (2.16)-ban szereplő büntető tag alakilag hasonló, a rugóra felírható alakváltozási energiához. Az érintkezési feltétel természetesen akkor lesz teljesen kielégítve, ha $c \rightarrow \infty$, mely azt jelenti, hogy $d^-(\mathbf{u}) \rightarrow 0$. A gyakorlatban azonban nem választhatunk korlátlanul nagy büntetőparaméter értéket, mivel ez rontja az

előálló lineáris egyenletrendszer megoldhatóságát azáltal, hogy nagy lesz az együttható mátrix kondíciószáma. Az elvégzett numerikus számítások alapján azt mondhatjuk, hogy a $c = 100 E \dots 1000 E$ közötti értékek már jó megoldást adnak.

A numerikus számítás során a $d(\mathbf{u})$ hézagfüggvény előjele alapján módosítjuk a c büntetőparaméter értékét oly módon, hogy a negatív d értékű helyeken nem változtatjuk c nagyságát, míg a pozitív hézagoknál eltávolítjuk a képzeletbeli rugókat. Ez egy iterációs algoritmust eredményez, ami egészen addig tart, amíg a tényleges érintkezési tartomány határán számítható érintkezési nyomás egy adott korlát alá nem csökken. Az így kapott d hézagfüggvény természetesen nem azonosan zérus a teljes érintkezési tartományon – mivel ez csak $c \rightarrow \infty$ határesetben állna elő –, továbbá ez a függvény szolgáltatja a kialakult érintkezési nyomást is, mely az $\delta_u \mathcal{L}^{PE} = 0$ variációs egyenletből adódóan a következő összefüggés alapján írható fel:

$$p_n = -c d^-(\mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{r} \in \Omega_p. \quad (2.17)$$

2.4.3. Kombinált technika

Ez a módszer lényegében az előző két részben ismertett technikák házasításából származtatható. Az eljárás oly módon alakult ki, hogy megőrizte mind a LAGRANGE-féle multiplikátoros, mind a büntetőparaméteres technikák előnyeit. A következő funkcionál írható fel a módszerhez:

$$\mathcal{L}^{AU} = \Pi(\mathbf{u}) - \int_{\Omega_p} p_n d(\mathbf{u}) dS + \frac{1}{2} \int_{\Omega_p} c [d(\mathbf{u})]^2 dS. \quad (2.18)$$

Tudjuk, hogy a (2.15), (2.16) és a (2.18) által definiált funkcionálok minimumukat variációjuk eltűnésekor kapják. Azaz, ha a fenti funkcionálok $\mathbf{u}$ szerinti variációját képezzük akkor a következő egyenletekhez jutunk:

$$\delta_u \mathcal{L}^{LA} = \delta_u \Pi(\mathbf{u}) - \int_{S_c} p_n \delta d dS = 0, \quad (2.19)$$

$$\delta_u \mathcal{L}^{PE} = \delta_u \Pi(\mathbf{u}) + \int_{\Omega_p} c d^-(\mathbf{u}) \delta d^- dS = 0, \quad (2.20)$$

$$\delta_u \mathcal{L}^{AU} = \delta_u \Pi(\mathbf{u}) - \int_{\Omega_p} (p_n - c d) \delta d dS = 0. \quad (2.21)$$

Mivel $\mathcal{L}^{LA}$ funkcionál nemcsak $\mathbf{u}$ függvénye, hanem ismeretlenként szerepel benne a p_n -nel jelölt érintkezési nyomás is, így az ismeretlenek meghatározásához a (2.15) funkcionál p_n szerinti variációját is képezni kell, a $\delta_p \mathcal{L}^{LA} \leq 0$ és a $p_n \geq 0$ nem negativitási követelmény betartása mellett.

A $\Pi(\mathbf{u})$ teljes potenciális energia variációját (2.6) alapján írhatjuk fel:

$$\delta_u \Pi(\mathbf{u}) = \sum_{\alpha=1}^2 \left[\int_{V_\alpha} \delta \mathbf{A}^\alpha \cdot \mathbf{D}^\alpha \cdot \mathbf{A}^\alpha dV - \int_{V_\alpha} \rho^\alpha \mathbf{k}^\alpha \cdot \delta \mathbf{u}^\alpha dV - \int_{S_p^\alpha} \tilde{\mathbf{p}}_0^\alpha \cdot \delta \mathbf{u}^\alpha dS \right], \quad (2.22)$$

mely a szokásos átalakítások és összevonások után a következő alakra hozható:

$$\delta_u \Pi = \sum_{\alpha=1}^2 \left[- \int_{V^\alpha} \delta \mathbf{u}^\alpha \cdot (\mathbf{T}^\alpha \cdot \nabla + \rho^\alpha \mathbf{k}^\alpha) dV + \int_{S_p^\alpha} \delta \mathbf{u}^\alpha \cdot (\mathbf{T}^\alpha \cdot \mathbf{n}^\alpha - \tilde{\mathbf{p}}_0^\alpha) dS + \int_{S_c^\alpha} \delta \mathbf{u}^\alpha \cdot (\mathbf{T}^\alpha \cdot \mathbf{n}^\alpha) dS \right]. \quad (2.23)$$

Most tekintsük a (2.18) egyenlettel definiált funkcionált. Ha felírjuk a variációját, az lényegében definiálja a (2.19) és a (2.20) által felírt funkcionálok variációját is.

$$\begin{aligned} \delta_u \mathcal{L}^{AU} = \sum_{\alpha=1}^2 \left\{ - \int_{V^\alpha} \delta \mathbf{u}^\alpha \cdot (\mathbf{T}^\alpha \cdot \nabla + \rho^\alpha \mathbf{k}^\alpha) dV + \int_{S_p^\alpha} \delta \mathbf{u}^\alpha \cdot (\mathbf{T}^\alpha \cdot \mathbf{n}^\alpha - \tilde{\mathbf{p}}_0^\alpha) dS + \right. \\ \left. + \int_{S_c^\alpha} \delta u_\tau^\alpha \mathbf{e}_\tau \cdot \mathbf{T}^\alpha \cdot \mathbf{n}^\alpha dS \right\} - \int_{\Omega_p} \delta u_n^2 [\mathbf{n}_c \cdot \mathbf{T}^2 \cdot \mathbf{n}^2 + (p_n - c d)] dS + \\ + \int_{\Omega_p} \delta u_n^1 [\mathbf{n}_c \cdot \mathbf{T}^1 \cdot \mathbf{n}^1 + (p_n - c d)] dS = 0, \quad (2.24) \end{aligned}$$

melynek átalakításakor figyelembe vettük, hogy $\delta \mathbf{u}^\alpha = \delta u_n^\alpha \mathbf{n}_c + \delta u_\tau^\alpha \mathbf{e}_\tau$, ahol δu_n^α és δu_τ^α az elmozdulásmező variációjának $\mathbf{n}_c$ és $\mathbf{e}_\tau$ irányokba eső koordinátái, továbbá $\mathbf{n}_c = -\mathbf{n}^2 \cong \mathbf{n}^1$ és $\delta d = \delta u_n^2 - \delta u_n^1$.

A funkcionál variációjának eltűnése a következő tartalmat hordozza: mivel $\delta \mathbf{u}^\alpha$ értéke a V^α térfogaton és az S_p^α felületen tetszőleges, nullától különböző, így a (2.24)-ben felírt első két integrál csak úgy lehet nulla, ha teljesül, hogy

$$\mathbf{T}^\alpha \cdot \nabla + \rho^\alpha \mathbf{k}^\alpha = \mathbf{0}, \quad \text{illetve} \quad \mathbf{T}^\alpha \cdot \mathbf{n}^\alpha - \mathbf{p}_0^\alpha = \mathbf{0}.$$

Tehát a (2.18) variációs elv tartalmazza a (2.1) egyensúlyi egyenletet és a (2.5) dinamikai peremfeltételt. Ezzel látható, hogy egy kinematikailag lehetséges elmozdulásmező – mely teljesíti a (2.4) kinematikai peremfeltételt, illetve a (2.2) geometriai egyenletet, továbbá fennáll a (2.3) anyagegyenlet – úgy biztosítja a teljes potenciális energia minimumát, hogy kielégíti az egyensúlyi egyenletet és a dinamikai peremfeltételt, valamint az érintkezési tartományon az illesztési feltétel is igaz, azaz a rugalmasságtani egyenletrendszer minden egyenlete és peremfeltétele fennáll.

Az érintkezési felületen, a variációs elv alapján, további feltételeknek kell teljesülniük. Mivel a feladat súrlódás nélküli érintkezés vizsgálatát jelenti, ezért az $\mathbf{e}_\tau \cdot \mathbf{T}^\alpha \cdot \mathbf{n}^\alpha = \tau_{\tau n}^\alpha$ csúsztató feszültség is zérus értékű az egész S_c^α érintkezési tartományon. Az látható (2.24) alapján, hogy $\mathbf{n}_c \cdot \mathbf{T}^\alpha \cdot \mathbf{n}^\alpha$ érintkezési feszültség csak az Ω_p tényleges érintkezési tartományon különbözik zérustól. Ezen a felületen az érintkezési nyomást, vagyis a normál irányú feszültséget a következő képletekkel határozhatjuk meg (mivel $\mathbf{n}_c = \mathbf{n}^1 = -\mathbf{n}^2$):

$$\begin{aligned} \sigma_n^1 &= \mathbf{n}_c \cdot \mathbf{T}^1 \cdot \mathbf{n}^1 = -(p_n - c d), \\ \sigma_n^2 &= -\mathbf{n}_c \cdot \mathbf{T}^2 \cdot \mathbf{n}^2 = -(p_n - c d), \end{aligned}$$

azaz

$$\sigma_n^1 = \sigma_n^2 = \mathbf{n}_c \cdot \mathbf{T}^1 \cdot \mathbf{n}^1 = -(p_n - c d). \quad (2.25)$$

A feladat megoldását iterációs algoritmus alapján keressük. Az első lépésben az érintkezési nyomás mindenütt azonosan zérus: $p_n^{(1)} = 0$, ahol a felső indexbeli szám jelöli az

iteráció sorszámát. A (k) -adik lépésben egy büntetőparaméteres feladatot oldunk meg feltételezve, hogy a $(k-1)$ -edik lépésben meghatározott $p_n^{(k-1)}$ érintkezési nyomás a variációs egyenletben ismert. Így a számítás alapját képező variációs egyenlet a következő formában írható fel:

$$\delta_u \mathcal{L}^{AU} = \delta \Pi \left(\mathbf{u}^{(k)} \right) - \int_{\Omega_p^{(k)}} \left[p_n^{(k-1)} - c d \left(\mathbf{u}^{(k)} \right) \right] \delta d^{(k)} dS = 0 \quad k = 2, 3, \dots \quad (2.26)$$

Az érintkezési nyomás számítására definiáljuk a következő operátort:

$$\langle x \rangle = \frac{1}{2} (x + |x|) ,$$

mely segítségével a (k) -adik lépéshez tartozó érintkezési nyomás

$$p_n^{(k)} = \left\langle p_n^{(k-1)} - c d \left(\mathbf{u}^{(k)} \right) \right\rangle . \quad (2.27)$$

A számítás során iterációról-iterációra egyre közelebb kerülünk a tényleges érintkezési tartományhoz, illetve a kialakuló érintkezési nyomáshoz. Kilépési feltételként megfogalmazzuk, hogy az iterációt egészen addig folytatjuk, amíg az érintkezési nyomás változása egy előre definiált ε_p hibakorláton belülre nem kerül:

$$\frac{\int_{\Omega_p^{(k)}} |p_n^{(k)} - p_n^{(k-1)}| dS}{\int_{\Omega_p^{(k)}} |p_n^{(k)}| dS} \leq \varepsilon_p . \quad (2.28)$$

A kombinált technika használatával elkerülhető az előálló lineáris algebrai egyenletrendszer rosszul kondicionáltsága, mivel nemcsak a büntetőparaméter nagysága, hanem az előző iterációs lépésben meghatározott $p_n^{(k-1)}$ érintkezési nyomás is javítja a megoldást.

3. fejezet

ÉRINTKEZÉSI FELADAT DISZKRETIZÁLÁSA

Az érintkezési feladat megoldásához elsősorban végeelem-módszert használunk, pontosabban a módszer p -, illetve hp -verzióját részesítjük előnyben. A vizsgálataink során olyan háromdimenziós feladatokat tekintünk, melyek egyrészt hengerszimmetrikus elrendezésűek, így a hengerkoordináta-rendszer használatával végzett számításoknál kétdimenziós feladatot kapunk, másrészt háromdimenziós térbeli feladatok esetén derékszögű DESCARTES-féle koordinátarendszert veszünk alapul. Jelen fejezetben áttekintjük a korábbiakban felírt rugalmasságtani feladatban szereplő ismeretlenek diszkretizálási folyamatát, illetve az érintkezés jelenségének numerikus vizsgálatát segítő variációs technikák által kapott integrál kifejezések végeelemes formalizmusát. A kontakt feladatok egy másik lehetséges vizsgálata úgynevezett hatásmátrixok segítségével történik, amelyeket a rugalmas féltérre vonatkozó megoldások alapján állítunk elő [31, 14]. Ennek bemutatása is röviden összefoglalásra kerül ebben a fejezetben, melyet elsősorban az általunk tekintett hengergörögös érintkezési feladatok esetén használunk. Itt a közelítő megoldás a SIGNORINI-típusú érintkezési feltételek kielégítését tűzi ki célul egy matematikai programozási feladat felállításával.

3.1. Rugalmasságtani egyenletek végeelemes tárgyalása

Az ismeretlen vektor- és tenzormezők az $\mathbf{r}$ helyvektor függvényeként írhatók fel. Tet-szöleges P pontba mutató helyvektor a választott koordinátarendszertől függően megadható az

$$\mathbf{r} = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z \quad (3.1)$$

alakban, ha derékszögű DESCARTES-féle koordinátarendszert tekintünk, vagy az

$$\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r(\varphi) + z \mathbf{e}_z \quad (3.2)$$

alakban, ha hengerkoordináta rendszerben vizsgáljuk a feladatot. A fenti egyenletekben az x, y, z az $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ egységvektorok által definiált tengelyek irányában mért koordináták, míg az r, φ, z görbevonalú koordináták és az $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi$ és $\mathbf{e}_z$ egységvektorok a koordináta vonalak érintői. Hengerkoordináta-rendszer használata akkor célszerű, ha a feladat hengerszimmetrikus elrendezésű. Ekkor ugyanis az ismeretlen mennyiségek csak az r és z koordináta függvényeiként tekinthetők, így elegendő síkbeli – kétváltozós – számításokat végezni, mert a kialakuló elmozdulás-, alakváltozás- és feszültségmező is hengerszimmetrikus lesz.

A továbbiakban derékszögű DESCARTES-féle koordinátarendszerben tekintjük át az ismeretlen mennyiségek végeelemes felírását. Az $\mathbf{u}^\alpha$ elmozdulásmező az $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y, z)$

helyvektor függvénye, ahol $\alpha = 1$ a felső, $\alpha = 2$ az alsó test azonosítására szolgál. Az elmozdulásmezőt a következő módon közelítjük

$$\mathbf{u}^\alpha = \mathbf{u}^\alpha(\mathbf{r}) \Rightarrow \mathbf{u}^\alpha(x, y, z) = \mathbf{N}^\alpha(x, y, z) \mathbf{q}^\alpha, \quad (3.3)$$

ahol $\mathbf{N}^\alpha$ az approximációs mátrix, míg $\mathbf{q}^\alpha$ az ismeretlen paraméterek vektora. Mátrixokkal felírva értelmezhetjük ezek elemeit

$$\underbrace{\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}^\alpha} = \underbrace{\begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \dots & N_n & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \dots & 0 & N_n & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \dots & 0 & 0 & N_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}^\alpha} \underbrace{\begin{bmatrix} q_x^1 \\ q_y^1 \\ q_z^1 \\ \vdots \\ q_x^n \\ q_y^n \\ q_z^n \end{bmatrix}}_{\mathbf{q}^\alpha}. \quad (3.4)$$

N_i jelenti az i -edik alakfüggvényt, míg q_x^i, q_y^i, q_z^i jelölik az i -edik alakfüggvényhez tartozó ismeretlen paramétereket, rendre az x, y, z irányú u_x, u_y, u_z elmozdulás-koordináták kiszámításához, melyben ($i = 1, \dots, n$). Az alakfüggvények száma n . Előállításuk p -verziós végelem-módszer használata esetén az A. függelékben összefoglalt hierarchikus függvények segítségével történik.

Az izoparametrikus leképezés értelmében az x, y, z koordináták a következő módon számíthatók

$$x = \sum_{i=1}^{n_e} N_i^e(\xi, \eta, \zeta) x_i \quad x \leftrightarrow y \leftrightarrow z. \quad (3.5)$$

Vizsgálataink során lineárisan rugalmas, homogén, izotróp tulajdonságú anyagokat tekintünk, melyekre érvényes a HOOKE-törvény

$$\mathbf{T}^\alpha = \frac{E}{1+\nu} \left(\mathbf{A}^\alpha + \frac{\nu}{1-2\nu} A_I^\alpha \mathbf{I} \right), \quad (3.6)$$

ahol A_I^α az $\mathbf{A}^\alpha$ alakváltozási tenzor első skalár invariánsa, azaz $A_I^\alpha = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$, továbbá $\mathbf{I}$ a másodrendű egységtenzort jelöli.

A (2.6)-ban felírt teljes potenciális energia vizsgálatához szükségünk van az $\mathbf{A}^\alpha$ alakváltozási tenzorra, illetve a belőle átrendezéssel kapott $\boldsymbol{\varepsilon}^\alpha$ alakváltozási vektorra:

$$\mathbf{A}^\alpha \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}^\alpha = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{yz}]^{\alpha T}, \quad (3.7)$$

ahol

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x}, & \varepsilon_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y}, & \varepsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}, & \gamma_{xz} &= \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Bevezetve a $\boldsymbol{\theta}$ differenciál operátor mátrixot, írhatjuk, hogy

$$\boldsymbol{\varepsilon}^\alpha = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\theta}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}^\alpha}^\alpha. \quad (3.9)$$

Figyelembe véve a (3.3) egyenletet, felírható, hogy

$$\boldsymbol{\varepsilon}^\alpha = \boldsymbol{\theta} \mathbf{N}^\alpha \mathbf{q}^\alpha = \mathbf{B}^\alpha \mathbf{q}^\alpha, \quad (3.10)$$

ahol a $\mathbf{B}^\alpha$ derivált mátrix az N_i alakfüggvények parciális deriváltjaiból építhető fel

$$\mathbf{B}^\alpha = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial z} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial y} & \frac{\partial N_n}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial z} & \frac{\partial N_n}{\partial y} \end{bmatrix}^\alpha. \quad (3.11)$$

Az $\boldsymbol{\varepsilon}^\alpha$ alakváltozási vektorhoz hasonlóan, a $\mathbf{T}^\alpha$ feszültségi tenzorból felépítő a $\boldsymbol{\sigma}^\alpha$ feszültségi vektor:

$$\mathbf{T}^\alpha \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}^\alpha = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{yz}]^{\alpha T}, \quad (3.12)$$

ahol a (3.6) által felírt HOOK-törvényt felhasználva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2G \left[\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right], \quad \tau_{xy} = G \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right), \\ \sigma_y &= 2G \left[\frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right], \quad \tau_{xz} = G \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right), \\ \sigma_z &= 2G \left[\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right], \quad \tau_{yz} = G \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (3.13)$$

$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ a csúsztató rugalmassági modulus.

(3.12) mátrixos formában a következő módon írható fel:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma}^\alpha}^\alpha = \frac{E}{2(1+\nu)} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} & \frac{2\nu}{1-2\nu} & \frac{2\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2\nu}{1-2\nu} & \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} & \frac{2\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2\nu}{1-2\nu} & \frac{2\nu}{1-2\nu} & \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}^\alpha}^\alpha \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}^\alpha}^\alpha, \quad (3.14)$$

ahol az álló $\mathbf{D}^\alpha$ az anyagállandók (6×6) -os mátrixa, melyben – homogén, izotróp anyagokra – csak az anyagtól függő ν Poisson-szám és E rugalmassági modulus szerepel.

Ezek alapján a (2.6) teljes potenciális energia a szokásos mátrixos formában a következő módon írható fel

$$\Pi = \sum_{\alpha=1}^2 \left(\frac{1}{2} \mathbf{q}^{\alpha T} \mathbf{K} \mathbf{q}^\alpha - \mathbf{q}^{\alpha T} \mathbf{f}^\alpha \right), \quad (3.15)$$

melyben

$$\mathbf{K}^\alpha = \int_{V^\alpha} \mathbf{B}^{\alpha T} \mathbf{D}^\alpha \mathbf{B}^\alpha dV \quad (3.16)$$

a merevségi mátrixot és

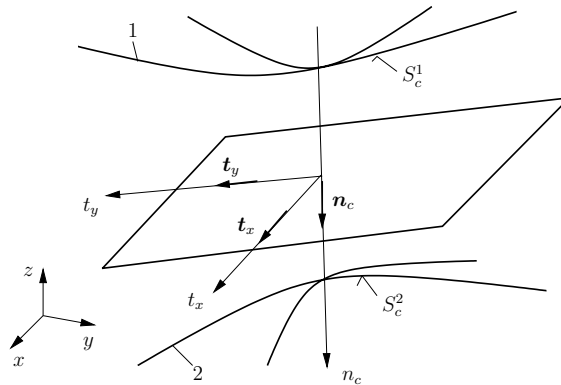
$$\mathbf{f}^\alpha = \int_{V^\alpha} \rho^\alpha \mathbf{N}^{\alpha T} \mathbf{k}^\alpha dV + \int_{S_p^\alpha} \mathbf{N}^{\alpha T} \tilde{\mathbf{p}}_0^\alpha dS \quad (3.17)$$

a terhelési vektort jelöli.

3.2. Variációs egyenletek végelelemes tárgyalása

Az érintkezési feltételek figyelembe vételéhez tekintsük a (2.18) által definiált $\mathcal{L}^{AU}$ funkcionált. Az ebben szereplő két integrál végelelemes diszkretizálásához szükséges a (2.7)-ben felírt d hézagfüggvény mátrixos alakba való átalakítása.

Tekintsünk egy lokális koordinátarendszert, mely a feltételezett S_c^α érintkezési tartományok között elhelyezkedő alapsíkhöz van rögzítve. A 3.1. ábra általános helyzetben szemlélteti az (x, y, z) globális és a (t_x, t_y, n_c) lokális koordináták értelmezését. A vizsgálataink során végre kell hajtani egy koordináta-transzformációt ezen globális és lokális rendszerek között, annak érdekében, hogy az alakváltozás utáni d hézagfüggvényt ki tudjuk számítani (2.7) alapján.



3.1. ábra: Térbeli globális (x, y, z) és térbeli lokális (t_x, t_y, n_c) koordinátarendszerek

Az eredeti $\mathbf{u}^\alpha$ elmozdulásmező felírható a fenti lokális rendszerben is, azaz

$$\mathbf{u}_l^\alpha = [u_{t_x} \quad u_{t_y} \quad u_{n_c}]^T, \quad \mathbf{u}^\alpha = [u_x \quad u_y \quad u_z]^T, \quad (3.18)$$

melyek között értelmezhető a

$$\mathbf{u}^\alpha = \mathbf{P}_{gl} \cdot \mathbf{u}_l^\alpha, \quad \mathbf{u}_l^\alpha = \mathbf{P}_{gl}^T \cdot \mathbf{u}^\alpha \quad (3.19)$$

transzformáció, ahol $\mathbf{P}_{gl}$ a globális-lokális transzformáció mátrix. Ezt átírva végelelemes formalizmusra a lokális és globális rendszerben értelmezett elmozdulásmezőre azt kapjuk – ha figyelembe vesszük, hogy az N_i alakfüggvények közül melyek adnak zérustól különböző értéket a feltételezett érintkezési tartományon, továbbá a $\mathbf{q}^\alpha$ paramétereket is a szerint csoportosítjuk, hogy melyek tartoznak az S_c^α tartományhoz és melyek nem –

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_l^\alpha &\Rightarrow \mathbf{u}_l^\alpha = \mathbf{N}^\alpha \mathbf{q}_l^\alpha = [\mathbf{N}_0 \quad \mathbf{N}_c]^\alpha \begin{bmatrix} \mathbf{q}_0 \\ \mathbf{q}_{lc} \end{bmatrix}^\alpha, \\ \mathbf{u}^\alpha &\Rightarrow \mathbf{u}^\alpha = \mathbf{N}^\alpha \mathbf{q}^\alpha = [\mathbf{N}_0 \quad \mathbf{N}_c]^\alpha \begin{bmatrix} \mathbf{q}_0 \\ \mathbf{q}_c \end{bmatrix}^\alpha. \end{aligned} \quad (3.20)$$

$\mathbf{N}_0$ jelöli azon alakfüggvényeket, melyeknek S_c^α tartományon nincs hatásuk – azaz zérus értéket vesznek fel, vagy nem az érintkezési felületen lévő elemekhez tartoznak –, míg $\mathbf{N}_c$ azon alakfüggvényeket tartalmazza, melyek a feltételezett kontakt tartományon lévő elemekhez tartoznak és így nullától különböző értéket vesznek fel. Mivel a transzformáció elvégzése a d hézagfüggvény kiszámítása miatt, csak az S_c^α tartományon számított elmozdulásmező esetében szükséges, így a továbbiakban elegendő a $\mathbf{q}_c$ és $\mathbf{q}_{lc}$ paramétervektorok közötti kapcsolat tisztázása. Ehhez tekintsük a következő

$$\mathbf{N}_c^\alpha \mathbf{q}_{lc}^\alpha = \mathbf{P}_{gl}^T \mathbf{N}_c^\alpha \mathbf{q}_c^\alpha \quad (3.21)$$

transzformációs egyenletet, melyben a $\mathbf{q}_c^\alpha$ ismeretlen paraméterek meghatározása például a legkisebb hibanégyzetek elve értelmében történhet. Így jutunk a

$$\chi = \sum_{\alpha=1}^2 \left[\int_{S_c^\alpha} (\mathbf{N}_c^\alpha \mathbf{q}_{lc}^\alpha - \mathbf{P}_{gl}^T \mathbf{N}_c^\alpha \mathbf{q}_c^\alpha)^2 dS \right] \rightarrow \min \chi = 0 \quad (3.22)$$

egyenlethez. Képezve $\mathbf{q}_c^\alpha$ szerinti parciális deriváltját kapjuk, hogy

$$\mathbf{q}_c^\alpha = \underbrace{\left[\int_{S_c^\alpha} \mathbf{N}_c^{\alpha T} \mathbf{P}_{gl} \mathbf{P}_{gl}^T \mathbf{N}_c^\alpha dS \right]^{-1} \int_{S_c^\alpha} \mathbf{N}_c^{\alpha T} \mathbf{P}_{gl} \mathbf{N}_c^\alpha dS}_{\mathbf{P}^\alpha} \mathbf{q}_{lc}^\alpha = \mathbf{P}^\alpha \mathbf{q}_{lc}^\alpha. \quad (3.23)$$

A végelelemes számításokhoz szükséges a $\mathbf{K}_l^\alpha$ merevségi mátrix és az $\mathbf{f}_l^\alpha$ tehervektor meghatározása – a fentiekben bemutatott particionálás bevezetése után – ezen $\mathbf{P}^\alpha$ transzformációs mátrix segítségével már egyértelműen elvégezhető.

A 3.1. ábrán jelzett (t_x, t_y, n_c) lokális rendszerben értelmezett $\mathbf{n}_c$ irányú elmozdulás meghatározásához bontsuk fel az $\mathbf{N}_c^\alpha$ alakfüggvényeket. Jelöljük $\mathbf{L}_t^\alpha$ -val azon alakfüggvényeket, melyek az alapsíkba eső – $\mathbf{t}_x$ vagy $\mathbf{t}_y$ irányú – elmozdulás-koordinátákhoz tartoznak, míg $\mathbf{L}_{n_c}^\alpha$ -val azokat, melyek az alapsíkhoz képesti $\mathbf{n}_c$ normál irányú elmozduláshoz tartoznak. Tehát a (2.7)-ben szereplő u_n^α normál irányú elmozdulás-koordináták kiszámításához a következő kifejezést használjuk

$$u_n^\alpha = \mathbf{L}_{n_c}^\alpha \mathbf{q}_{lc}^\alpha. \quad (3.24)$$

Ezt követően írjuk fel a (2.7)-ben szereplő h kezdeti hézagot is mátrixos formában. Tehát

$$h = \sum_{\alpha=1}^2 \mathbf{L}_{n_c}^\alpha \mathbf{h}^\alpha, \quad (3.25)$$

melyben a $\mathbf{h}^\alpha$ ismeretlen paramétervektor segítségével a h kezdeti hézag is az izoparametrikus leképzésnél használt alakfüggvényeken keresztül írható fel. $\mathbf{h}^\alpha$ meghatározásához a

legkisebb hibanégyzetek elvét használjuk fel. Így a testek közötti, alakváltozás utáni d hézagfüggvény a következő végeselemes formában adható meg

$$d = \mathbf{L}_{nc}^2 \mathbf{q}_{lc}^2 - \mathbf{L}_{nc}^1 \mathbf{q}_{lc}^1 + \mathbf{L}_{nc}^1 \mathbf{h}^1 + \mathbf{L}_{nc}^2 \mathbf{h}^2. \quad (3.26)$$

Vegyük észre, hogy a számítások megkönnyítése érdekében érdemes elvégezni a következő átalakításokat d felírásakor

$$\begin{aligned} d &= \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{L}_{nc}^2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}_l^2} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{q}_0^2 \\ \mathbf{q}_{lc}^2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{q}_l^2} - \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{L}_{nc}^1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}_l^1} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{q}_0^1 \\ \mathbf{q}_{lc}^1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{q}_l^1} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{L}_{nc}^1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{h}_l^1} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{h}^1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{h}_l^1} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{L}_{nc}^2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{h}_l^2} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{h}^2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{h}_l^2} = \\ &= \begin{bmatrix} -\mathbf{L}_l^1 & \mathbf{L}_l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_l^1 \\ \mathbf{q}_l^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{L}_l^1 & \mathbf{L}_l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h}_l^1 \\ \mathbf{h}_l^2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

A (2.18)-ban szereplő büntetőparaméteres tag diszkretizált formában – (3.27) alapján – a következő módon írható fel

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_p} c d^2 dS = \frac{1}{2} [\mathbf{q}_l^{1T} \quad \mathbf{q}_l^{2T}] \left(\begin{bmatrix} \mathbf{C}^{11} & -\mathbf{C}^{12} \\ -\mathbf{C}^{21} & \mathbf{C}^{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_l^1 \\ \mathbf{q}_l^2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -\mathbf{f}_h^1 \\ \mathbf{f}_h^2 \end{bmatrix} \right) + áll., \quad (3.28)$$

ahol

$$\mathbf{C}^{\alpha\beta} = \int_{\Omega_p} \mathbf{L}_l^{\alpha T} c \mathbf{L}_l^{\beta} dS, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \quad (3.29)$$

a kontakt elemek merevségi mátrixa, illetve az

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_h^1 &= \int_{\Omega_p} \mathbf{L}_l^{1T} c \mathbf{L}_l^1 dS \mathbf{h}_l^1 + \int_{\Omega_p} \mathbf{L}_l^{1T} c \mathbf{L}_l^2 dS \mathbf{h}_l^2 \\ \mathbf{f}_h^2 &= \int_{\Omega_p} \mathbf{L}_l^{2T} c \mathbf{L}_l^1 dS \mathbf{h}_l^1 + \int_{\Omega_p} \mathbf{L}_l^{2T} c \mathbf{L}_l^2 dS \mathbf{h}_l^2 \end{aligned} \quad (3.30)$$

vektorok a kezdeti hézagból származó tehervektorok, az „áll.” tag a variáció szempontjából állandó, így itt elhagyható.

Hasonló lépésekkel írható át a (2.15)-ben és a (2.18)-ban szereplő, érintkezési nyomásból származó integrál a végeselemes formalizmusra

$$\int_{\Omega_p} d p_n dS = [\mathbf{q}_l^1 \quad \mathbf{q}_l^2] \begin{bmatrix} -\mathbf{f}_p^1 \\ \mathbf{f}_p^2 \end{bmatrix} + áll., \quad (3.31)$$

ahol

$$\mathbf{f}_p^\alpha = \int_{\Omega_p} \mathbf{L}_l^\alpha p_n dS \quad (3.32)$$

az érintkezési nyomásból származó tehervektor.

Ezek alapján a (2.18) által felírt $\mathcal{L}^{AU}$ funkcionált diszkretizált alakban a következő módon írhatjuk fel

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{AU} = \frac{1}{2} [\mathbf{q}_l^{1T} \quad \mathbf{q}_l^{2T}] & \left(\begin{bmatrix} \mathbf{K}_l^1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_l^1 \\ \mathbf{q}_l^2 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} \mathbf{f}_l^1 \\ \mathbf{f}_l^2 \end{bmatrix} + \right. \\ & \left. + \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{11} & -\mathbf{C}^{12} \\ -\mathbf{C}^{21} & \mathbf{C}^{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_l^1 \\ \mathbf{q}_l^2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -\mathbf{f}_h^1 \\ \mathbf{f}_h^2 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} -\mathbf{f}_p^1 \\ \mathbf{f}_p^2 \end{bmatrix} \right) + \text{áll.}, \quad (3.33) \end{aligned}$$

melynek minimalizálásához képezni kell a

$$\frac{\partial \mathcal{L}^{AU}}{\partial \mathbf{q}_l^\alpha} = \mathbf{0} \quad (3.34)$$

parciális deriváltat. Ez a következő lineáris egyenletrendszerhez vezet

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_l^1 + \mathbf{C}^{11} & -\mathbf{C}^{12} \\ -\mathbf{C}^{21} & \mathbf{K}_l^2 + \mathbf{C}^{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_l^1 \\ \mathbf{q}_l^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_l^1 \\ \mathbf{f}_l^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\mathbf{f}_h^1 \\ \mathbf{f}_h^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{f}_p^1 \\ \mathbf{f}_p^2 \end{bmatrix}. \quad (3.35)$$

Az $\mathbf{u}^\alpha$ elmozdulásmező kiszámításához szükséges $\mathbf{q}_l^\alpha$ paraméterek meghatározása a 2.4.3 alfejezetben leírt iterációs elven történik. A (3.35) egyenletben szereplő $\mathbf{C}^{\alpha\beta}$ és $\mathbf{f}_h^\alpha$ a GAUSS kvadratura alapján számítható ki, oly módon, hogy a vizsgált GAUSS integrálási pontokban meghatározott d hézag előjelétől függően csökkentjük vagy növeljük a c büntető paraméter értékét. Ugyanis ahol az első iterációs lépésben a hézag értéke negatív lett, ott c értékét növelni kell, míg ahol $d > \varepsilon$, ($\varepsilon = 10^{-6} \text{ mm}$) hézag adódik ott pedig zérus büntetőparaméter kívánatos. A módosítások elvégzése után újra megoldjuk a (3.35) egyenletet, mely egyre pontosabb közelítést ad az $\mathbf{u}^\alpha$ elmozdulásmezőre.

Az iterációt addig kell folytatni, míg az egyes integrálási pontokban változás mutatkozik c értékében. A változás megszűnése azt jelenti, hogy a d hézagból (2.27) segítségével módosíthatjuk $\mathbf{f}_p^\alpha$ értékét és léphetünk a következő iterációs lépésre. Az iterációt a (2.28) feltétel állítja le.

3.3. Közelítő megoldás GREEN-függvények segítségével

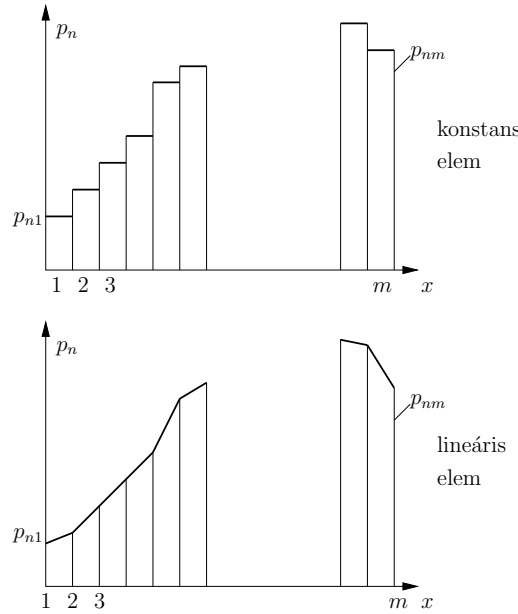
Az érintkezési feladat közelítő megoldásának előállítása olyan módon is elképzelhető, hogy a (2.10c) feltételt integrál értelemben kívánjuk kielégíteni – a $p_n \geq 0$ és a $d \geq 0$ egyenlőtlenségi mellékfeltételeket betartva –, matematikai programozási feladatot állítunk fel és megoldjuk. Természetesen, ha egy testnek merevtestszerű elmozdulása is megengedett, akkor az egyensúly teljesüléséről külön kell gondoskodni, mivel itt nem használjuk ki a potenciális energia minimuma elvét. Az egyensúlyi egyenletek a felső rugalmas testre a következő alakban írhatók fel

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_0 - \int_{S_c} p_n \mathbf{n}_c dS = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}_0 - \int_{S_c} p_n \mathbf{r} \times \mathbf{n}_c dS = \mathbf{0}, \quad (3.36)$$

ahol $\mathbf{F}_0$ és $\mathbf{M}_0$ az ismert külső erőrendszer origóra számított redukált vektorkettősének eredő erője, illetve nyomatéka. Ekkor az érintkezési feladat közelítő megoldását az alábbi feladat jelöli ki

$$\min \left\{ \int_{S_c} p_n dS \mid p_n \geq 0, d \geq 0, \mathbf{r} \in S_c, \mathbf{F} = \mathbf{F}(p_n) = \mathbf{0}, \mathbf{M} = \mathbf{M}(p_n) = \mathbf{0} \right\}. \quad (3.37)$$

A (3.37) feladat numerikus megoldásához diszkretizálást kell végrehajtani.



3.2. ábra: p_n nyomásértékek közelítései

A diszkretizálás során a p_n nyomást valamilyen függvénnyel közelítjük, de tekintettel kell lenni arra, hogy a nyomás csak pozitív lehet. Általánosan felírva a p_n nyomásra kapjuk, hogy

$$p_n = p_n(\mathbf{x}) = [P_1 \ P_2 \ \dots \ P_m] \begin{bmatrix} p_{n1} \\ p_{n2} \\ \vdots \\ p_{nm} \end{bmatrix} = \mathbf{P}^T(\mathbf{x}) \mathbf{p}, \quad (3.38)$$

ahol P_i ($i = 1, \dots, m$) koordinátafüggvényeket jelöli a $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ approximációs mátrixban. Az altartományokhoz rendelt – diszkrét helyeken értelmezett – nyomásértékek $\mathbf{p}$ -ben szerepelnek. $\mathbf{x}$ az érintkezési tartomány pontjainak koordinátáit jelöli.

Vonalmenti érintkezést tekintve a 3.2. ábra a lehetséges közelítések egy csoportját szemlélteti. Konstans elemeknél minden kis tartomány felett állandó nyomást feltételezünk, így $P_i = 1$ ($i = 1, \dots, m$). Lineáris közelítésnél elemenként lineárisak, míg kvadratikusnál elemenként négyzetes polinomok a közelítő függvények. Tartóknál, illetve hékjakknál szokás még az úgynevezett diszkrét elemeket is alkalmazni, amikor a közelítésnél egy-egy altartományon eredőt számítunk és azt a tartomány közepén helyezzük el. A konstans, a lineáris és a kvadratikus elemeknél az ismeretlen az elemek csomópontjainál fellépő nyomásnak felel meg. Térbeli feladatoknál általában konstans, illetve lineáris elemeket használunk.

A programozási feladat felállításának két fő, lehetséges útját különböztetjük meg:

- A rugalmasságtani egzakt megoldás ismeretes, egyrészt a $H^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ GREEN-függvényre, másrészt az adott terhelésből származó $\mathbf{n}_c$ irányába eső $u_{n, \text{terh}}^\alpha(\mathbf{x})$ elmozdulásra. Itt feltételezzük, hogy a merevtestszerű mozgást végző test S_c tartományon ST. VENANT-i értelemben távoli helyen, képzeletbeli támasszal van megfogva.
- A $H^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ GREEN-függvény és az ismert terhelésből származó $u_{n, \text{terh}}^\alpha(\mathbf{x})$ elmozdulás közelítő úton határozható meg, például végeelem-módszerrel. Ez utóbbi esetben a szóban forgó mennyiségek diszkrét pontbeli értékei állnak rendelkezésre [40].

A $H^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ GREEN-függvény megadja az $\mathbf{s}$ helyen működő, $\mathbf{n}_c$ irányba ható koncentrált egységnyi erőből származó, $\mathbf{x}$ pontbeli, $\mathbf{n}_c$ irányba eső elmozdulást. A $H^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ GREEN-függvény és az adott terhelésből származó $u_{n,\text{terh}}^\alpha(\mathbf{x})$ elmozdulás ismeretében az u_n^α normálirányú elmozdulások az alábbiak szerint számíthatók

$$\begin{aligned} u_n^1(\mathbf{x}) &= - \int_{S_c^1} H^1(\mathbf{x}, \mathbf{s}) p_n(\mathbf{s}) dS + u_{n,\text{terh}}^1(\mathbf{x}) + u_{n,\text{merev}}^1(\mathbf{x}) , \\ u_n^2(\mathbf{x}) &= \int_{S_c^2} H^2(\mathbf{x}, \mathbf{s}) p_n(\mathbf{s}) dS + u_{n,\text{terh}}^2(\mathbf{x}) , \end{aligned} \quad (3.39)$$

ahol $u_{n,\text{merev}}^1(\mathbf{x})$ a felső test merevtestszerű elmozdulásából származó $\mathbf{n}_c$ irányú elmozdulás.

Ezáltal a (2.7) által definiált alakváltozás utáni d hézag a következő módon írható fel

$$d(\mathbf{x}) = \int_{S_c} H(\mathbf{x}, \mathbf{s}) p_n(\mathbf{s}) dS + u_{n,\text{terh}}^2(\mathbf{x}) - u_{n,\text{terh}}^1(\mathbf{x}) + h(\mathbf{x}) - u_{n,\text{merev}}^1(\mathbf{x}) \geq 0, \quad (3.40)$$

ahol a $H(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ hatásfüggvény

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = H^1(\mathbf{x}, \mathbf{s}) + H^2(\mathbf{x}, \mathbf{s}). \quad (3.41)$$

A merevtestszerű mozgásból

$$u_{n,\text{merev}}^1(\mathbf{x}) = (\boldsymbol{\lambda}_F + \boldsymbol{\lambda}_M \times \mathbf{r}(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{n}_c \quad (3.42)$$

normál irányú elmozdulás származik, melyben $\boldsymbol{\lambda}_F$, $\boldsymbol{\lambda}_M$ vektorok koordinátái a viszonyítási koordinátarendszer tengelyeinek irányába eső elmozdulást, illetve a tengelyek körüli szögelfordulást tartalmazzák.

A (3.37)-ben szereplő minimalizálandó integrál helyett a (3.38) nyomásfüggvény közelítésére is tekintettel az alábbi kifejezés írható fel

$$\int_{S_c} p_n dS_x \approx \mathbf{p}^T \int_{S_{cx}} \mathbf{P}(\mathbf{x}) d(\mathbf{x}) dS_x = \mathbf{p}^T (\mathbf{H}\mathbf{p} - \mathbf{l} - \mathbf{G}_R \boldsymbol{\lambda}) = 0, \quad (3.43)$$

melyben a $\mathbf{H}$ hatásmátrix, a $\mathbf{G}_R$ geometriai mátrix, a $\mathbf{l}$ külső terhelésből adódó elmozdulásvektor és a $\boldsymbol{\lambda}$ merevtestszerű elmozdulásvektor miatt az alábbi értelmezéseket tekintjük.

A $\mathbf{H}$ pozitív definit hatásmátrix számításához a

$$\mathbf{H} = \int_{S_{cx}} \int_{S_{cs}} \mathbf{P}(\mathbf{x}) H(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \mathbf{P}^T(\mathbf{s}) dS_s dS_x \quad (3.44)$$

egyenletet írhatjuk fel, amelyben dS_s , illetve dS_x az $\mathbf{s}$, illetve az $\mathbf{x}$ változó szerinti integrálásra utal.

Az előírt külső terhelésből és a kezdeti hézagból nyert diszkrétizált alakban felírt elmozdulásvektort $\mathbf{l}$ -el jelöltük és a következő módon értelmezzük

$$\mathbf{l} = \int_{S_c} \mathbf{P}(\mathbf{x}) (u_{n,\text{terh}}^1(\mathbf{x}) - u_{n,\text{terh}}^2(\mathbf{x}) - h(\mathbf{x})) dS_x. \quad (3.45)$$

A merevtestszerű elmozdulásból, tekintetbe véve (3.42)-t kapjuk, hogy

$$\int_{S_c} \mathbf{P}(\mathbf{x}) u_{n,\text{merev}}^1(\mathbf{x}) dS_x = \int_{S_c} \mathbf{P}(\mathbf{x}) (\boldsymbol{\lambda}_F + \boldsymbol{\lambda}_M \times \mathbf{r}(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{n}_c dS_x \rightarrow \mathbf{G}_R \boldsymbol{\lambda}, \quad (3.46)$$

melyben

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_F \\ \boldsymbol{\lambda}_M \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

a felső test merevtestszerű elmozdulásvektora. $\boldsymbol{\lambda}_F$ az elmozdulást, míg $\boldsymbol{\lambda}_M$ a szögelfordulást jelenti. DESCARTES-féle koordinátarendszert feltételezve írhatjuk fel a $\mathbf{G}_R$ geometriai mátrix értelmezését, azaz

$$\mathbf{G}_R \boldsymbol{\lambda} = \underbrace{\int_{S_c} \mathbf{P}(\mathbf{x}) \mathbf{n}^T [\mathbf{I} \quad \boldsymbol{\psi}^T(\mathbf{x})] dS_x}_{\mathbf{G}_R} \boldsymbol{\lambda}, \quad (3.48)$$

melyben $\mathbf{I}$ a másodrendű egységtenzor, továbbá $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x})$ a ferdeszimmetrikus forgatástenzor, melynek értelmezése a következő

$$\boldsymbol{\psi} = - \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.49)$$

továbbá $\mathbf{n}^T = [n_{cx} \quad n_{cy} \quad n_{cz}]$ az érintkezési felület normálisa.

Ily módon a két test között az alakváltozás után kialakuló d távolság diszkrétizált vektora

$$\mathbf{d} = \mathbf{H} \mathbf{p} - \mathbf{G}_R \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{l} \geq 0. \quad (3.50)$$

A (3.36)-nál felírt egyensúlyi egyenleteket diszkrétizált formába átírhatjuk, figyelembe véve a (3.38) és a (3.48) formulákat

$$\mathbf{G}_R^T \mathbf{p} - \mathbf{f}_R = \mathbf{0}, \quad (3.51)$$

ahol

$$\mathbf{f}_R = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_0 \\ \mathbf{M}_0 \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

az előírt külső terhelés redukált vektorkettőse.

Ezek után a matematikai programozási feladat diszkrétizált formában a következő módon fogalmazható meg

$$\min \left\{ \mathbf{p}^T \mathbf{d} \mid \mathbf{p} \geq 0, \mathbf{d} = \mathbf{H} \mathbf{p} - \mathbf{G}_R \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{l} \geq 0, \mathbf{G}_R^T \mathbf{p} - \mathbf{f}_R = \mathbf{0} \right\}, \quad (3.53)$$

illetve az ebből származtatható algebrai egyenlet-/egyenlőtlenségi rendszer a következő

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H} & -\mathbf{G}_R \\ -\mathbf{G}_R^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{l} \\ -\mathbf{f}_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

$$\mathbf{p} \geq 0, \quad \mathbf{d} \geq 0, \quad \mathbf{p}^T \mathbf{d} = 0.$$

A (3.54) egy kvadratikus programozási feladat, mely különféle modifikált szimplex típusú algoritmusokkal oldható meg [37], mi azonban a rendkívül hatékony KALKER-féle iterációs eljárást alkalmazzuk [30].

3.3.1. KALKER-féle iterációs eljárás

Az ebben a részben bemutatott megoldási módszer alapjául a KALKER által írt [30] könyvben bemutatott technika szolgál. A diszkretizálás révén a $\mathbf{p}$ érintkezési nyomás vektora m számú taggal rendelkezik. A (2.10a) és (2.10b) képletek által definiált érintkezési tartományba eső pontok halmaza Ω_p -vel, a réstartományba esőké Ω_0 -val van jelölve.

A numerikus számítások miatt bevezetjük a következő diagonális vezérlőmátrixokat

$$\mathbf{E}_{\Omega_p} = \left\langle 0 \dots 0 \underbrace{1 \dots 1}_{i \in \Omega_p} 0 \dots 0 \right\rangle \quad \mathbf{E}_{\Omega_0} = \left\langle \underbrace{1 \dots 1}_{i \in \Omega_0} 0 \dots 0 \underbrace{1 \dots 1}_{i \in \Omega_0} \right\rangle \quad (3.55)$$

melyek az érintkezési, illetve a réstartományba eső tartományokat jelölik ki a főátlóba helyezett egységnyi elemekkel.

1. lépés: A program indításakor beállított $\mathbf{E}_{\Omega_p}$ és $\mathbf{E}_{\Omega_0}$ diagonális mátrixok segítségével módosított egyenletrendszer felállítása és megoldása, mely a következő módon írható fel:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_{\Omega_p} \mathbf{H} \mathbf{E}_{\Omega_p} + \mathbf{E}_{\Omega_0} & -\mathbf{G}_R \\ -\mathbf{G}_R^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{\Omega_p} \mathbf{1} \\ -\mathbf{f}_R \end{bmatrix}. \quad (3.56)$$

2. lépés: A $\mathbf{p}$ érintkezési nyomásvektor elemeinek ellenőrzése. Ez úgy történik, hogy ha az Ω_p érintkezési tartományhoz tartozó $p_{ni} < 0$ akkor ezt a pontot az Ω_0 réstartományba kell áthelyezni, és $p_{ni} = 0$ nyomásértéket állítunk be. Ezáltal új $\mathbf{E}_{\Omega_0}$ és $\mathbf{E}_{\Omega_p}$ vezérlőmátrixokat kapunk. A (3.56) egyenletrendszert ekkor újra meg kell oldani a módosított adatok alapján. A következő lépésre akkor mehetünk, ha már az Ω_p , illetve az Ω_0 tartományok nem változnak.
3. lépés: Az $i \in \Omega_0$ réstartományba tartozó pontokra meghatározzuk a d_i alakváltozás utáni távolságot a (3.50) egyenlet alapján.
4. lépés: Előfordulhat, hogy egy-egy pont d_i hézag értéke negatív. Ebben az esetben ez a pont átkerül az Ω_p érintkezési tartományba, mivel a réstartományon bármely pontra teljesülni kell a $d_i \geq 0$ egyenlőtlenségnek, azaz a testek egymásba nem hatolhatnak.
5. lépés: Amennyiben a 4. lépés során az Ω_p és az Ω_0 tartományok megváltoztak, akkor új $\mathbf{E}_{\Omega_p}$ és $\mathbf{E}_{\Omega_0}$ vezérlőmátrixokat kell beállítani és vissza kell térni az 1. lépésre.
6. lépés: Ha az Ω_p és Ω_0 tartományok nem változnak akkor a számítás befejeződött.

Az iterációs folyamat során a (3.56) alatti egyenletrendszert oldjuk meg az $\mathbf{E}_{\Omega_0}$ és az $\mathbf{E}_{\Omega_p}$ vezérlőmátrixok segítségével. A ciklusból való kilépéskor az $i \in \Omega_p$ helyeken teljesen érintkezés áll fenn. A 2. lépés alapján a p_{ni} érintkezési nyomás pozitív, míg a testek közötti d_i hézag zérus értékű. Az $i \in \Omega_0$ réstartományban pedig $p_{ni} = 0$ értéket kapjuk (3.56) szerint, továbbá d_i a (3.50) alapján számítható ki. Tehát összefoglalva azt állapíthatjuk meg, hogy a $\mathbf{p}^T \mathbf{d} = 0$ feltétel automatikusan teljesül a teljes $S_c = \Omega_0 \cup \Omega_p$ tartományon.

3.3.2. Hatásmátrix előállítása

Tekintsük most csak a $\mathbf{H}^1$ hatásmátrixot, melynek előállítása a (3.41) és a (3.44) összefüggések alapján a következő módon írható fel

$$\mathbf{H}^1 = \int_{S_{cx}} \int_{S_{cs}} \mathbf{P}(\mathbf{x}) H^1(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \mathbf{P}^T(\mathbf{s}) dS_s dS_x = \int_{S_{cx}} \mathbf{P}(\mathbf{x}) \left[\int_{S_{cs}} H^1(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \mathbf{P}^T(\mathbf{s}) dS_s \right] dS_x. \quad (3.57)$$

Jelölje $W_i(\mathbf{x})$ ($i = 1, \dots, m$) a $P_i(\mathbf{x})$ koordinátafüggvény szerint megoszló terhelésből adódó $\mathbf{n}_c$ normális irányú elmozdulást. Ekkor a $\mathbf{H}^1$ hatásmátrix j -edik oszlopa

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^1 \mathbf{e}_j &= \int_{S_{cx}} \mathbf{P}(\mathbf{x}) \left[\int_{S_{cs}} H^1(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \mathbf{P}^T(\mathbf{s}) dS_s \right] dS_x \mathbf{e}_j = \\ &= \int_{S_{cx}} \mathbf{P}(\mathbf{x}) \left[\int_{S_{cs}} H^1(\mathbf{x}, \mathbf{s}) P_j(\mathbf{s}) dS_s \right] dS_x = \int_{S_{cx}} \mathbf{P}(\mathbf{x}) W_j(\mathbf{x}) dS_x = \\ &= \int_{S_{cx}} \begin{bmatrix} P_1(\mathbf{x}) \\ P_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ P_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix} W_j(\mathbf{x}) dS_x, \end{aligned} \quad (3.58)$$

ahol $\mathbf{e}_j$ olyan vektor, amelynek j -edik tagja egységnyi, a többi zérus.

A $\mathbf{H}^1$ mátrix ij indexű eleme

$$H_{ij}^1 = \mathbf{e}_i^T \mathbf{H}^1 \mathbf{e}_j = \int_{S_c} P_i W_j dS. \quad (3.59)$$

A MAXWELL-féle felcserélhetőségi tétel alapján $H^1(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = H^1(\mathbf{s}, \mathbf{x})$, vagyis az előállított hatásmátrix szimmetrikus, azaz $H_{ij}^1 = H_{ji}^1$.

A kapott összefüggésekből látható, hogy a hatástényezők meghatározásánál a P_j függvény szerint változó terhelésből adódó W_j elmozdulás és a P_i koordinátafüggvények szorzatának integrálja adja a hatásmátrix elemeit. A $\mathbf{H}^2$ és a $\mathbf{G}_R$ mátrixok, továbbá az $\mathbf{l}$ vektor meghatározása is hasonlóan történik.

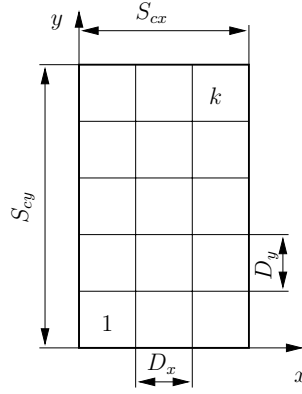
Diszkrét elem esetén, a $\mathbf{H}^\alpha$ hatásmátrix H_{ij}^α elemén az $\mathbf{x}_j$ pontban, az $\mathbf{n}_c(\mathbf{x}_j)$ normális irányba ható egységnyi nagyságú erőből származó $\mathbf{x}_i$ pontbeli, $\mathbf{n}_c(\mathbf{x}_i)$ normális irányú, elmozdulást értjük.

Ha *konstans elemet* használunk, akkor az S_c érintkezési tartományt N darab altartományra bontjuk fel. Ebben az esetben a $\mathbf{P}$ approximációs mátrixban szereplő koordinátafüggvények elemenként állandó, egységnyi magasságú függvények. Következésképp a H_{ij}^α hatástényező alatt, az S_c^j ($j = 1, \dots, N$) altartomány felett, $\mathbf{n}_c(\mathbf{x})$ irányba működő, egységnyi intenzitású megoszló terhelésből származó $W_j(\mathbf{x})$ elmozdulási függvény S_c^i ($i = 1, \dots, N$) altartomány felett vett integrálértékét kell tekinteni. A többi – $\mathbf{G}_R$, $\mathbf{l}$ – mennyiség is hasonlóan számítható. Amennyiben az egyes altartományok kicsinyek, úgy az integrálszámítás középérték tétele értelmében a $W_j(\mathbf{x})$, $u_{n, \text{terh}}^\alpha(\mathbf{x})$, $h(\mathbf{x})$ függvények S_c^i altartományok feletti integrálja helyett vehetjük azok értékét az S_c^i altartományok egy belső, például a középső pontjában lévő elmozdulás, kezdeti hézag és a tartomány méreteinek a szorzataként.

3.3.3. Tükrözési technika

Rugalmas alakváltozásokat feltételezve, a terhelt henger és a rugalmas féltér között kialakuló érintkezés általában a henger hossz tengelyére merőleges irányban, kicsiny szakaszra terjed ki. Ezért gyakran a hengerre vonatkozó hatásfüggvény előállítására is használják a féltérre vonatkozó összefüggéseket, a henger véges hosszúságából adódóan úgynevezett tükrözési technikát is alkalmazva.

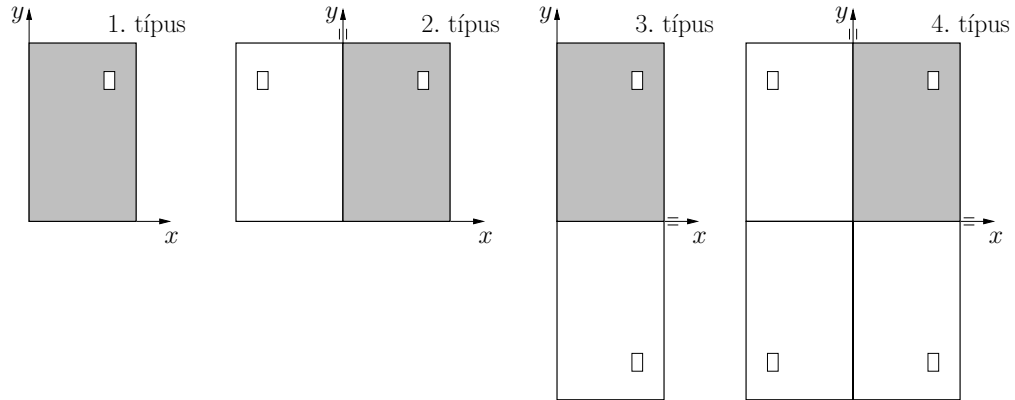
A rugalmas féltér $z = 0$ felületén S_c feltételezett érintkezési tartomány x irányú mérete S_{cx} , y irányú mérete pedig S_{cy} . Továbbá S_c tartományt x és y tengelyek irányában D_x , illetve D_y méretű kis téglalapokra bontjuk fel, ahogy ezt a 3.3. ábra szemlélteti. A hatásfüggvények felépítésére *konstans elemeket* használunk, azaz a kicsiny téglalapok felett



3.3. ábra: Feltételezett érintkezési tartomány jellemző méretei

egységnyi megoszló intenzitású terhelést működtetve, KALKER által levezetett összefüggések révén tudjuk kiszámolni a hatásmátrix elemeit [30].

A szerkezet geometriai és terhelési szimmetriájából adódóan 4 alesetet különböztetünk meg, ami egyrészt a feladatok méretének csökkentését, másrészt a pontosabb eredmény elérését teszi lehetővé. A 3.4. ábrán sötétítéssel jelöltük a különböző lehetséges szimmetria eseteket.

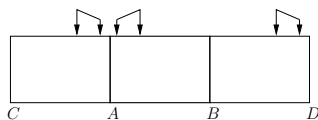


3.4. ábra: Figyelembe vehető szimmetria esetek

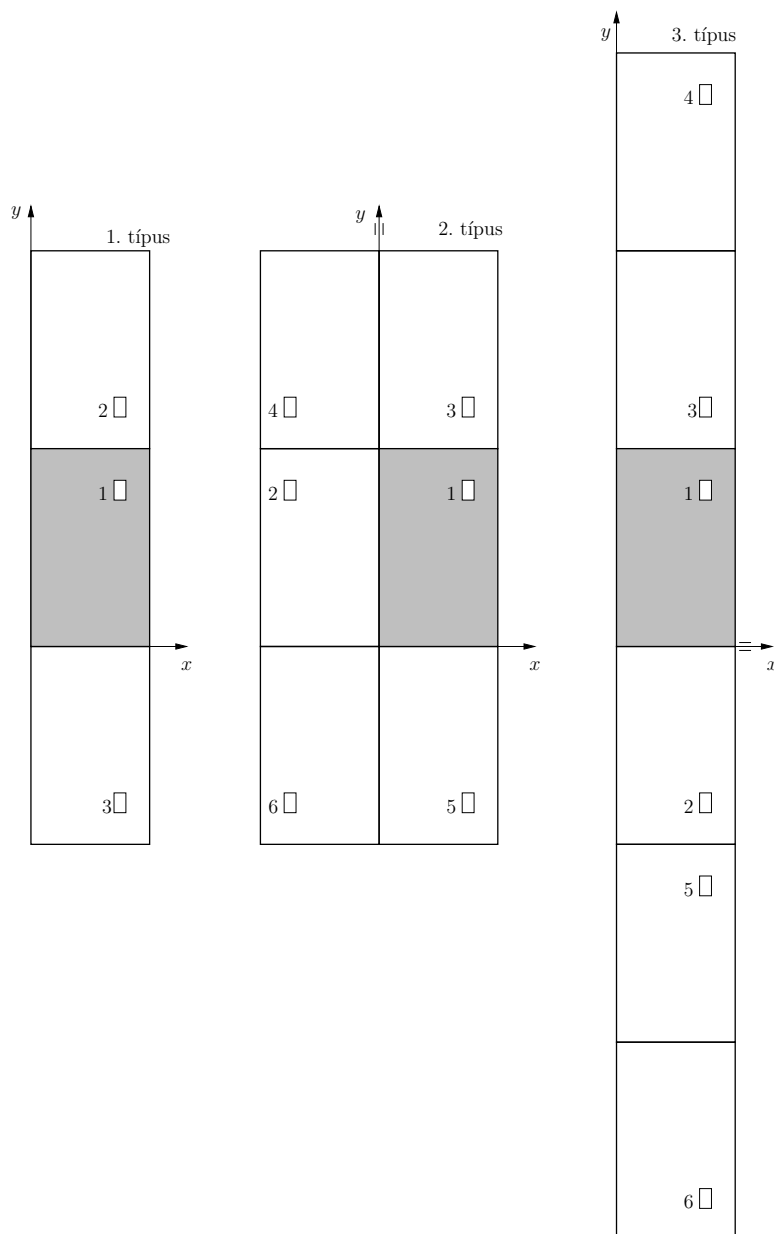
A $\mathbf{H}$ hatásmátrix (i, j) koordinátájának meghatározása a következő módon történhet, melyet először 1929-ben LOVE elemzett, majd jóval később JOHNSON [26]-ben, KALKER [30]-ben foglalt össze. Egy $D_x \times D_y$ méretű, (x_j, y_j) középpontú, tartományon egységnyi állandó nagyságú megoszló terhelés működik, melynek hatására létrejövő elmozdulás egy tetszőleges (x_i, y_i) pontban a következő képlet alapján számítható:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(i, j) = \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \Big\{ & (x_{ij} + a) \ln \left[\frac{(y_{ij} + b) + \sqrt{(y_{ij} + b)^2 + (x_{ij} + a)^2}}{(y_{ij} - b) + \sqrt{(y_{ij} - b)^2 + (x_{ij} + a)^2}} \right] + \\ & + (y_{ij} + b) \ln \left[\frac{(x_{ij} + a) + \sqrt{(y_{ij} + b)^2 + (x_{ij} + a)^2}}{(x_{ij} - a) + \sqrt{(y_{ij} + b)^2 + (x_{ij} - a)^2}} \right] + \\ & + (x_{ij} - a) \ln \left[\frac{(y_{ij} - b) + \sqrt{(y_{ij} - b)^2 + (x_{ij} - a)^2}}{(y_{ij} + b) + \sqrt{(y_{ij} + b)^2 + (x_{ij} - a)^2}} \right] + \\ & + (y_{ij} - b) \ln \left[\frac{(x_{ij} - a) + \sqrt{(y_{ij} - b)^2 + (x_{ij} - a)^2}}{(x_{ij} + a) + \sqrt{(y_{ij} - b)^2 + (x_{ij} + a)^2}} \right] \Big\}, \end{aligned} \quad (3.60)$$

melyben $x_{ij} = x_j - x_i$, illetve $y_{ij} = y_j - y_i$ és az egyszerűbb felírás érdekében felhasználtuk az $a = \frac{D_x}{2}$, illetve a $b = \frac{D_y}{2}$ jelöléseket.



3.5. ábra: Fiktív hengerek hozzáadása



3.6. ábra: Fiktív hengerek különböző szimmetriák esetén

A henger hatásmátrixának számításakor tekintettel kell lennünk arra is, hogy a végpontok ténylegesen feszültségmentesek. A csúsztatófeszültségek zérus értékét az úgynevezett tükrözési technikával biztosítani lehet. A konkrét számításakor ez azt jelenti, hogy a tényleges hengerhez további „fiktív” hengereket toldunk, és a terheléseket a középső – a tényleges

– henger véglapjaira vonatkoztatva szimmetrikusan működtetjük, ahogy a 3.5. ábra szemlélteti. A tükrözési technika sajnos a véglapokon a normálfeszültségek zérus voltát nem biztosítja.

Az A és B véglapokkal jellemzett henger hatásmátrixának meghatározásához az A , C és B , D véglapú „fiktív” hengerek felvételére van szükség az A és B véglapokra vonatkozó szimmetrikus terhelés mellett.

A különböző szerkezeti szimmetriák eseteinél alkalmazott tükrözési technikát a 3.6. ábra szemlélteti. A 4. típus az ábrán vázolt 3. típustól annyiban tér el, hogy az y tengely is szimmetriatengely, így 12 helyen kell működtetni a nyomást a hatásmátrix elemeinek kiszámításakor. A (3.60) összefüggést a tükrözési technikának megfelelő számú terheléshez kell alkalmazni.

4. fejezet

TÉRGÖRBE PARAMÉTERES LEÍRÁSA

A térbeli érintkezési feladatok vizsgálata esetén feltételezzük, hogy az érintkezési tartományt egy sima, zárt térgörbe határolja.

Ebben a fejezetben bemutatjuk a térgörbéknek egy lehetséges paraméteres leírási módját, melyek napjainkban fontos szerepet játszanak. A B-spline görbéket, illetve ezek racionális általánosítását a NURBS – **N**on-**U**niform **R**ational **B**-spline angol elnevezésből – térgörbéket széles körben használják, elsősorban a számítógéppel segített tervezés során. A görbék képzési módszerük alapján rendkívül alkalmasak új objektumok definiálására, létező alakzatok pontos leírására, fontos jellemzőjük továbbá a létező alakzatok könnyű módosíthatósága.

A NURBS görbék definiáló adathalmaz egy egyszerű struktúrát jelent. Három alapvető elemet sorolhatunk itt fel: a kontrollpontok, a csomóértékek vektora és a kontrollpontokhoz rendelt súlyértékek vektorát – ezen utóbbi súlyérték-halmaz a nem racionális B-spline-oknál nem szerepel. Így a görbe módosítását ezen három struktúraelem valamelyikének változtatásával érhetjük el. Egyik legrészletesebb összefoglaló erről a területről a PIEGL és TILLER által írt könyv [54], melyben az alakváltoztatást kontrollpontok átrendezésével, illetve a hozzájuk tartozó súlyértékek módosításával érik el.

Számunkra ezen paraméteres görbék az érintkezési tartomány leírásakor játszanak központi szerepet a térbeli érintkezési feladatok vizsgálatakor. A NURBS görbék a kúpszeletektől kezdve tetszőleges térbeli nyitott és zárt alakzatok leírására alkalmasak, módosításuk egyszerűen néhány paraméter változtatásával elérhető.

4.1. B-spline alapfüggvény

A B-spline alapfüggvények, mint súlyok szerepelnek a következő szakaszban felírt B-spline görbék előállításakor, de az előállításuk komplex volta megköveteli a részletes bemutatást. Két lényeges tulajdonságát szokás a B-spline alapfüggvényeknek kiemelni:

1. az alapfüggvények értelmezési tartománya úgynevezett csomóértékek által további részintervallumokra van bontva.
2. az alapfüggvények zérustól való eltérése nem jellemző az egész tartományon, ez valójában csak néhány részintervallumon teljesül. Azt szokás mondani, hogy a B-spline alapfüggvények meglehetősen lokálisak.

Tekintsük az $\mathbf{u}$ csomóértékek vektorát, mely l darab nem csökkenő valós szám sorozatát tartalmazza, azaz

$$\mathbf{u} = [u_1 \dots, u_l]^T, \quad \text{ahol } u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_{l-1} \leq u_l, \quad (4.1)$$

ahol az u_i értékeket csomóértékeknek nevezzük. Az $[u_i, u_{i+1})$ jobbról nyitott intervallumot az i -edik csomóértékhez tartozó csomóintervallumnak nevezzük. Mivel a csomóértékek között fennállhat egyenlőség is, így előfordulhat, hogy némely csomóintervallum nem létezik. Ha egy csomóérték k -szor szerepel – azaz $u_i = u_{i+1} = \dots = u_{i+k-1}$ – akkor a csomóérték multiplicitása k , ahol $k > 1$. Egyébként, ha a csomóérték csak egyszer tűnik fel az $\mathbf{u}$ csomóvektorban, akkor az egyszeres csomóérték. Ha a csomóértékek közötti különbség állandó – azaz $u_{i+1} - u_i = \text{áll.} \forall 1 \leq i \leq l$ – akkor a csomóvektorról azt mondjuk, hogy egyenközü. Ellenkező esetben azt, hogy nem, idegen szóval *non-uniform*.

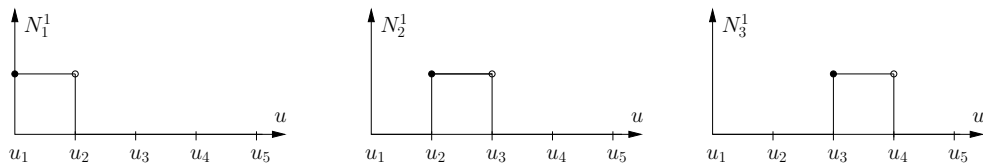
A csomóértékek tehát úgy értelmezhetőek, mint az $[u_1, u_l]$ intervallum osztópontjai. Minden B-spline alapfüggvénynek megvan a saját értelmezési tartománya az $[u_1, u_l]$ intervallumon. Gyakran élünk azzal a választással, mely nem sérti az általánosságot, hogy $u_1 = 0$ és $u_l = 1$, tehát a zárt értelmezési tartomány ebben az esetben a $[0, 1]$.

A B-spline alapfüggvény definíciója megkíván egy további paramétert, a fokszámot. A p -ed rendű, azaz $(p - 1)$ -ed fokú, i -edik B-spline alapfüggvény a következő rekurzív formulával definiált:

$$N_i^1(u) = \begin{cases} 1 & \text{ha } u_i \leq u < u_{i+1} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \quad (4.2)$$

$$N_i^p(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+p-1} - u_i} N_i^{p-1}(u) + \frac{u_{i+p} - u}{u_{i+p} - u_{i+1}} N_{i+1}^{p-1}(u) \quad i = 1, \dots, l.$$

Ezt a képzési módszert a szakirodalomban COX-DE BOOR-féle rekurzív eljárásnak nevezik [54, 28]. Az alapfüggvények definíciója komplex, de viszonylag könnyen értelmezhető. Ha a fokszám zérus ($p = 1$), akkor ezek az alapfüggvények – a (4.2) első képlete szerint – egységnyi konstans függvények. Például, ha az egymást követő csomóértékek: $u_1 = 0, u_2 = 1, u_3 = 2, u_4 = 3$ és így tovább, akkor a csomóérték intervallumok $[0, 1), [1, 2), [2, 3)$. Az intervallumokon értelmezett 0-ad fokú B-spline alapfüggvények: $N_1^1(u) = 1 \forall u \in [0, 1)$, egyébként zérus értékű; $N_2^1(u) = 1 \forall u \in [1, 2)$, egyébként zérus értékű; $N_3^1(u) = 1 \forall u \in [2, 3)$, egyébként zérus értékű; ahogy ezt a 4.1. ábra mutatja.

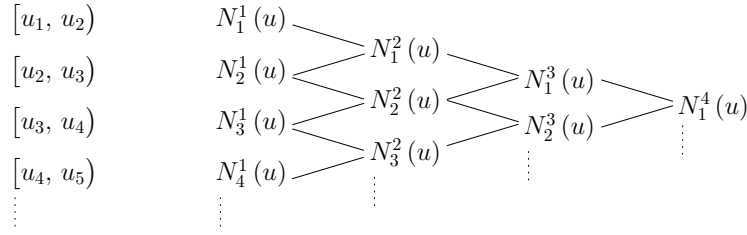


4.1. ábra: Három 0-ad fokú B-spline alapfüggvény

A magasabb fokú $N_i^p(u)$ alapfüggvények előállításának értelmezéséhez hasznos a 4.2. ábrán szemléltetett számítási struktúra. Az ábrán az első oszlopban a csomóérték intervallumok vannak felsorolva, míg a második oszlopban a 0-ad fokú B-spline alapfüggvények. Az $N_i^2(u)$ meghatározásához tehát szükség van az $N_i^1(u)$, illetve az $N_{i+1}^1(u)$ függvényekre. Ezáltal minden 1. fokú alapfüggvény kiszámítható. Az 1. fokú B-spline alapfüggvények a harmadik oszlopban vannak felsorolva. E rekurzív folyamat egészen addig folytatódik ahányad fokú alapfüggvény meghatározása szükséges.

Most határozzuk meg a fenti példából kiindulva $N_1^2(u)$ -t és $N_2^2(u)$ -t – azaz az 1. fokú alapfüggvényeket. (4.2) alapján – mivel $u_1 = 0, u_2 = 1$ és $u_3 = 2$ – felírható, hogy

$$N_1^2(u) = \frac{u - u_1}{u_2 - u_1} N_1^1(u) + \frac{u_3 - u}{u_3 - u_2} N_2^1(u) = u N_1^1(u) + (2 - u) N_2^1(u), \quad (4.3)$$

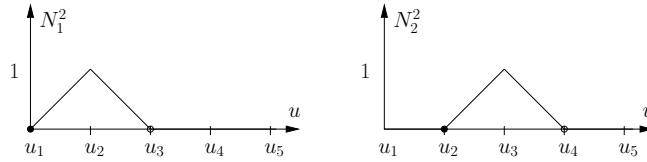


4.2. ábra: $(p - 1)$ -ed fokú B-spline alapfüggvények előállítási sémája

illetve

$$N_2^2(u) = \frac{u - u_2}{u_3 - u_2} N_2^1(u) + \frac{u_4 - u}{u_4 - u_3} N_3^1(u) = (u - 1) N_2^1(u) + (3 - u) N_3^1(u). \quad (4.4)$$

Ebből látható, hogy ezen alapfüggvények szakaszonként lineáris függvényekből állnak össze. $N_1^2(u)$ nem-zérus értéket csak az $[u_1, u_3)$ jobbról nyitott intervallumon vesz fel, ezen kívüli értéke pedig nulla, ahogy ezt a 4.3. ábra szemlélteti. A további 1. fokú alapfüggvények képzése is így módon történik. A 4.3. ábra bemutatja az $N_2^2(u)$ B-spline alapfüggvényt is, mely már az $[u_2, u_4)$ intervallumon rendelkezik zérustól különböző értékkel.



4.3. ábra: Két 1. fokú B-spline alapfüggvény

(4.2) szerint a 2. fokú alapfüggvények előállítása megköveteli az 1. fokú alapfüggvények meglétét. Így $N_1^3(u)$ felírható $N_1^2(u)$ és $N_2^2(u)$ segítségével:

$$N_1^3(u) = \frac{u - u_1}{u_3 - u_1} N_1^2(u) + \frac{u_4 - u}{u_4 - u_2} N_2^2(u), \quad (4.5)$$

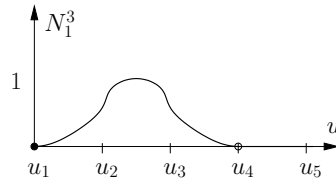
mely az u_i ($i = 1, \dots, 4$) csomóértékek alapján

$$N_1^3(u) = \frac{1}{2}u N_1^2(u) + \frac{1}{2}(3 - u) N_2^2(u) \quad (4.6)$$

alakban adható meg. Mivel $N_1^2(u)$ a $[0, 1)$ és a $[1, 2)$ intervallumon vesz fel zérustól különböző értéket, míg $N_2^2(u)$ a $[1, 2)$ és a $[2, 3)$ intervallumon, így három esetet kell megkülönböztetnünk:

$$N_1^3(u) = \begin{cases} \frac{1}{2}u^2 & \text{ha } u \in [0, 1), \\ \frac{1}{2}u(2 - u) + \frac{1}{2}(3 - u)(u - 1) = -u^2 + 3u - 1.5 & \text{ha } u \in [1, 2), \\ \frac{1}{2}(3 - u)(3 - u) = \frac{1}{2}u^2 - 3u + 4.5 & \text{ha } u \in [2, 3). \end{cases} \quad (4.7)$$

Ha a három különböző esetben kapott görbeszakaszt egy koordináta-rendszerben ábrázoljuk, akkor láthatjuk, hogy a görbeszakaszok pontosan a csomóértékeknél kapcsolódnak egymásba, így alkotva egy folytonos függvényt (4.4. ábra). Az olvasható le, hogy a görbeszakaszok folytonosan csatlakoznak egymáshoz, azonban itt meg kell jegyezni, hogy ez nincs mindig így, tekintetbe véve a csomóértékek lehetséges multiplicitását.



4.4. ábra: Egy 2. fokú B-spline alapfüggvény

Megállapítható tehát, hogy $N_i^p(u)$ B-spline alapfüggvény csak $[u_i, u_{i+p})$ intervallumon ad zérustól különböző értéket, vagyis p darab csomóérték intervallumon $[u_i, u_{i+1})$, $[u_i, u_{i+2})$, $\dots$, $[u_i, u_{i+p})$.

Végül tekintsük át a B-spline alapfüggvény néhány fontos tulajdonságát [17]:

- $N_i^p(u)$ az u paraméter $(p-1)$ -ed fokú polinom függvénye.
- $N_i^p(u)$ nem negatív, azaz $N_i^p(u) \geq 0 \forall i, p, u$.
- $N_i^p(u)$ csak lokális hatással bír, azaz $N_i^p(u) > 0$ az $[u_i, u_{i+p})$ intervallumon.
- A nem-zérus $(p-1)$ -ed fokú $N_i^p(u)$ alapfüggvények összege egy az $[u_i, u_{i+p})$ intervallumon

$$\sum_{j=i}^{i+p-1} N_j^p(u) = 1 \quad p > 1.$$

- Az $N_i^p(u)$ alapfüggvény $(p-1)$ -ed fokú polinomok összegeként áll elő az $[u_i, u_{i+p})$ intervallumon úgy, hogy a csatlakozási pont mindig csomóértékre esik.
- Ha egy csomóérték multiplicitása k , akkor az adott csomóértéknél az alapfüggvény C^{p-1-k} osztályú folytonos görbe.
- Ha a csomóértékek száma l , az alapfüggvények rendje p , akkor a $(p-1)$ -ed fokú alapfüggvények száma n , tehát $l = n + p$. Ami könnyen belátható, ha figyelembe vesszük, hogy $N_n^p(u)$ az utolsó $(p-1)$ -ed fokú alapfüggvény, mely nem-zérus értéket csak az $[u_n, u_{n+p})$ intervallumon vesz fel. Mivel az utolsó csomóérték u_l , mely megegyezik u_{n+p} -vel, ezért $l = n + p$.

4.2. A B-spline definíciója

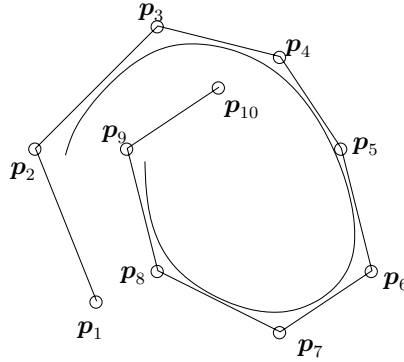
Adott n térbeli kontrollpont $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$ és egy csomóértékeket tartalmazó $\mathbf{u}$ vektor, ahol $\mathbf{u} = [u_1, \dots, u_l]^T$. A $\mathbf{c}(u)$ B-spline görbe a $\mathbf{p}_i$ kontrollpontok és az $\mathbf{u}$ csomóvektor alapján a következő módon állítható elő [28].

$$\mathbf{c}(u) = \sum_{i=1}^n N_i^p(u) \mathbf{p}_i, \quad (4.8)$$

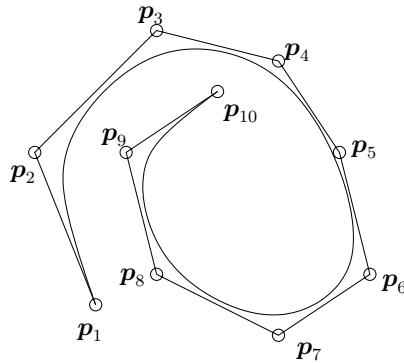
ahol $N_i^p(u)$ az u paraméterhez tartozó p -ed rendű $-(p-1)$ -ed fokú B-spline alapfüggvény, melynek képzése (4.2) alapján történik.

Az u_i csomóértékek nem csökkenő valós számsorozatot alkotnak. A definícióban előforduló $\frac{0}{0}$ hányadost zérusnak tekintjük. A p rendszám, az l csomóértékek száma és az n kontrollpontok száma között fenn kell állni a következő összefüggésnek: $l = n + p$. Pontosabban, ha n kontrollponttal kívánunk definiálni egy p -ed rendű B-spline térgörbét, akkor biztosítanunk kell $n + p$ darab csomóértéket. Másfelől, ha adott n kontrollpont, l csomóérték akkor az általuk generált B-spline térgörbe p rendje $l - n$.

Tehát a paraméteres p -ed rendű B-spline görbe a B-spline alapfüggvények lineáris kombinációjaként állítható elő. A $p = 4$ rend választás azt jelenti, hogy köbös – azaz 3-ad fokú – alapfüggvényekkel írjuk le a B-spline-t. Ez a görbe – a csomóérték vektor struktúrájától és a kontrollpont elhelyezkedésétől függően – lehet *nyitott* (open), *zárt* (closed) vagy *rögzített* (clamped) típusú.



4.5. ábra: Nyitott 3-ad fokú B-spline görbe



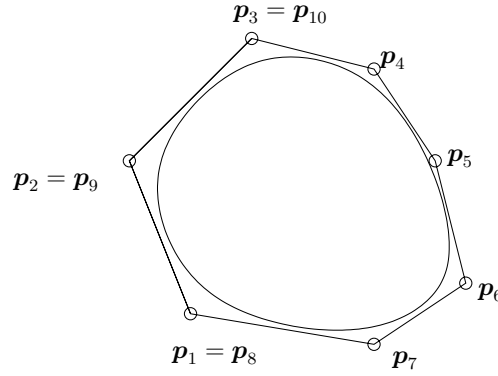
4.6. ábra: Rögzített végű 3-ad fokú B-spline görbe

Nyitott görbét akkor kapunk, ha sem a csomóérték vektornak, sem a kontrollpoligonnak nincs speciális jellemzője, azaz minden csomóérték és kontrollpont különböző. Ezt mutatja a 4.5. ábra. Ha az első és az utolsó csomóértéket meg többszörözünk, akkor a rögzített végű B-spline-hoz jutunk, mely befut az első és az utolsó kontrollpontba (lásd a 4.6. ábrát). Ha a kontrollpontok által létrehozott kontrollpoligon zárt, azaz az első és utolsó néhány kontrollpont egybeesik – konkrét számuk a választott p rendszámtól függ –, továbbá a csomóvektor speciális ciklikus szerkezetet mutat [50, 29], akkor zárt B-spline görbét kapunk. Erre mutat példát a 4.7. ábra.

A rögzített végű B-spline görbe előállításakor a csomóértékek a következő speciális formát mutatják. Az első és az utolsó csomóértékek ismétlődve szerepelnek a végeken, a multiplicitásuk pedig a B-spline alapfüggvény p rendjével megegyező, tehát

$$\mathbf{u} = \underbrace{[u_1 = u_2 = \dots = u_p]}_p, u_{p+1}, \dots, u_{l-p}, \underbrace{[u_{l-p+1} = u_{l-p+2} = \dots = u_l]}_p^T, \quad (4.9)$$

ahol u_1 értékét 0-ra, illetve u_l értékét gyakran 1-re választjuk, így normalizált csomóértékekkel dolgozhatunk. A ciklikus csomóvektort PARK és KIM vezette be a [50] cikkben.



4.7. ábra: Zárt 3-ad fokú B-spline görbe

Ennek használata akkor előnyös, ha zárt B-spline görbékkel kell leírni [49]. Ebben az esetben az $\mathbf{u}$ csomóértékek vektora a következő módon írható:

$$\mathbf{u} = [u_{-(p-1)}, \dots, u_{-1}, u_1, \dots, u_{n-p+2}, u_{n-p+3}, \dots, u_{n+1}]^T. \quad (4.10)$$

ahol

$$\begin{aligned} u_{-i} &= u_{1-i} + u_{n-p-i+2} - u_{n-p-i+3} \\ u_1 &= 0 \quad u_{n-p+2} = 1 \\ u_{n-p+2+i} &= u_{n-p+1+i} + u_{i+1} - u_i \quad i = 1, \dots, p-1. \end{aligned}$$

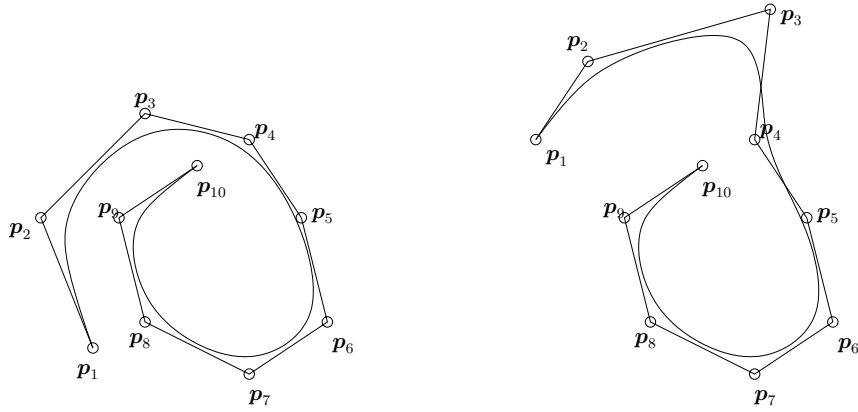
A végeken egybeejtve $(p-1)$ darab kontrollpontot, azaz

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_{i \bmod (n-p+2)} \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.11)$$

egy olyan zárt görbét kapunk, mely $C^{(p-2)}$ rendű folytonosságot mutat a görbe értelmezési tartományán. A $(i \bmod j)$ művelet i -nek j -vel való osztási maradékát adja.

A B-spline fontosabb tulajdonságainak áttekintéséhez, tekintsünk egy n kontrollpont által definiált, rögzített végű p -ed rendű – azaz $(p-1)$ -ed fokú – B-spline térgörbét.

- A (4.8)-ban felírt $\mathbf{c}(\mathbf{u})$ B-spline térgörbe $(p-1)$ -ed fokú görbék folytonos összekapcsolásával jön létre. Általánosan az mondható el, hogy minél kisebb a foksám, a görbe annál közelebb kerül a kontrollpoligonhoz. Határesetben, ha a foksám egy, akkor a B-spline görbe a kontrollpoligont adja.
- A rögzített végű B-spline térgörbe áthalad a $\mathbf{p}_1$ első és a $\mathbf{p}_n$ utolsó kontrollponton.
- A konvex burok tulajdonságot kielégíti. A $\mathbf{c}(\mathbf{u})$ B-spline térgörbe a kontrollpoligon által létrehozott konvex burokban található. E konvex burok konvex kontrollpoligon esetén maga a poligon, konkáv kontrollpoligon esetén lásd a [8] könyv 32. oldalát.
- Lokális változtathatóság, mely azt jelenti, hogy ha változtatjuk a $\mathbf{p}_i$ kontrollpont helyzetét, akkor ennek csak az $[u_i, u_{i+p})$ intervallumon van hatása. Ez a tulajdonság rendkívül fontos a tervezés során, ui. egy-egy kontrollpont mozgatása nem módosítja az egész görbe alakját, csak a kontrollpont környezetében változtat.
- Sima, oszcilláció mentes görbe.
- Ha egy u csomóérték multiplicitása k , akkor abban a $\mathbf{c}(\mathbf{u})$ pontban a görbe $C^{(p-k)}$ rendben folytonos.
- A görbe alakját befolyásolhatjuk a $\mathbf{p}_i$ kontrollpontok, a p foksám, illetve az u_i csomóértékek által. Például elérhető – a csomóértékek alkalmas megválasztásával –,



4.8. ábra: 3-ad fokú B-spline görbe kontrollpontjainak mozgatása

hogy a B-spline görbe tartalmazzon egyenes szakaszt is, úgy hogy a kontrollpontok nem esnek egy egyenesbe.

A B-spline görbék előállítása megköveteli számos jellemző előre meghatározását, úgy mint a fokszám, vagy a megfelelő számú csomóértékek rögzítése. Egy további hátrány a görbe létrehozásának komplex módja. Cserébe azonban egy nagyon jól használható eszközt jelent a tervező mérnökök számára.

Sajnos meg kell azonban említeni egy lényeges fogyatékosságát ezen térgörbe típusnak: mivel polinomok építik fel, így a legegyszerűbbnek tűnő, általánosan használt görbék, például a kúpszeletek, nem írhatóak le vele egzakt módon. Ezen segít a B-spline általánosításának tekintett NURBS térgörbe.

4.3. NURBS térgörbék

Azok a paraméteres térgörbeleírási módszerek, melyek csak polinomok lineáris kombinációjaként állítanak elő görbéket, nem jók minden esetben, mivel sok görbe – úgymint a kör, az ellipszis, vagy a parabola – nem adható meg egzaktul ilyen módon. A kör csak racionális függvények által reprezentálható, tehát olyan függvényekkel, melyek polinomok hányadosai. Ennek hatására alakult ki a B-spline görbék általánosított változata, melyet angol elnevezéssel **Non-Uniform Rational B-spline**-nak – a továbbiakban röviden NURBS-nek – nevezünk [54].

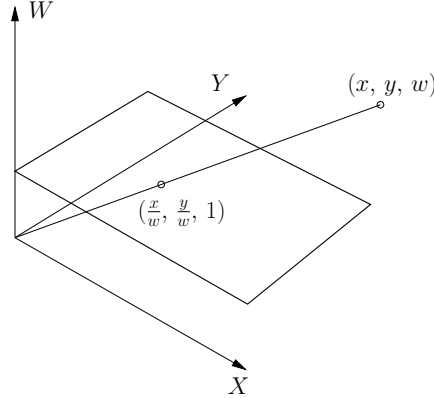
4.3.1. Homogén koordináták

Egyik fontos célja a homogén koordináták használatának az, hogy a végtelen távoli pontot értelmezni tudjuk. Az EUKLIDESZI koordinátarendszerben végtelen hely nincs értelmezve. Azonban számtalan esetben lényegesen leegyszerűsödik egy-egy elv, illetve az elvégzendő számítás, ha rendelkezésre áll a végtelen távoli hely fogalma. Ez a megállapítás a görbe és felület tervezésnél is érvényben van. Homogén koordináták nélkül számtalan bonyodalommal kerülnének szembe a modellezéssel foglalkozók a számítógépes grafika és a számítógéppel segített tervezés területén. Gondoljunk csak egy hétköznapi kockára, melyet a számítógép monitorán kívánunk megjeleníteni centrális vetítéssel. Még egy laikus szemlélőnek is feltűnik, hogy a kocka élei, mintha egy végtelen távoli pont felé tartva találkoznának egymással.

A végtelen távoli pont bevezetésének érdekében tekintsük az u és w két valós számot, majd képezzük ezek hányadosát $\frac{u}{w}$. Most u értékét vegyük rögzítettnek, w -t pedig csökkentsük, akkor $\frac{u}{w}$ hányados egyre nagyobb lesz. Ha w eléri a zérus értéket, akkor $\frac{u}{w}$

hányados végtelen nagy lesz! Ez adja a lehetőséget arra, hogy egy tetszőleges $a = \frac{u}{w}$ valós számot két másik valós számmal, u -val és w -vel írjunk fel. Ugyanis, ha $w \neq 0$, akkor a értéke pontosan $a = \frac{u}{w}$. Ellenkező esetben, ha $w = 0$, akkor a szám $a = \infty$, azaz a végtelen távoli pontot $(u, 0) = \infty$ módon azonosíthatjuk.

Térpontokat tekintve a *homogén koordinátákat* a következő módon értelmezzük: a tér végesben és a végtelen távolban fekvő P pontjait az $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ helyvektor és a ξ skalár jellemzi, mely csak a 0 és 1 értékeket veszi fel, azaz az (x, y, z, ξ) a P ponthoz rendelt homogén koordinátákat jelenti.



4.9. ábra: Az (x, y, w) homogén koordináták értelmezése

Ezt a módszert használjuk a két-, illetve a háromdimenziós tér pontjainak homogén koordinátákkal való megadásához is. A könnyebb megértés érdekében most egy kétdimenziós (x, y, w) homogén koordinátás alakban felírt pont származtatását mutatjuk be [28] alapján. Ahogy a 4.9. ábra szemlélteti, az (x, y, w) egy térbeli pont X , Y és W tengely irányú koordinátáit jelenti. A koordinátarendszer origóját és az (x, y, w) pontot összekötő egyenes a $w = 1$ síkot az $(\frac{x}{w}, \frac{y}{w}, 1)$ ponton dőli át. Nyilvánvaló, hogy ez a transzformáció, bármely homogén koordinátákkal megadott pontnál elvégezhető és az is látható, hogy a síkon lévő pontok az $(\frac{x}{w}, \frac{y}{w}, 1)$ alakú homogén koordinátákkal megadhatóak, ha minden így értelmezett pontra elvégezzük a fent leírt transzformációt.

A 4.9. ábrából az is látható, hogy ez a transzformáció nem kölcsönösen egyértelmű, mivel az origót és az (x, y, w) pontot összekötő egyenes minden pontját csak az $(\frac{x}{w}, \frac{y}{w}, 1)$ pontra tudjuk leképezni. Ezért amikor a hagyományos EUKLIDESZI koordinátaival adott pontot transzformáljuk homogén koordinátás alakba, akkor általában azt tesszük, hogy a $w = 1$ feltevéssel élünk – azaz egy térbeli (x, y, z) pont homogén koordinátás alakban a következő $(1 \cdot x, 1 \cdot y, 1 \cdot z, 1) = (x, y, z, 1)$. Tehát észrevehető az, hogy a homogén koordináták száma 3, illetve 4, amikor egy xy -síkbeli, illetve egy térbeli pontot kívánunk velük leírni.

4.3.2. NURBS térgörbe előállítás

Tekintsük a (4.8) által definiált $\mathbf{c}(u)$ B-spline görbét, de a $\mathbf{p}_i$ ($i = 1, \dots, n$) kontrollpont esetében térjünk át $\mathbf{p}_i^h$ homogén koordinátás alakra úgy, hogy a negyedik koordinátát válasszuk 1-re

$$\mathbf{p}_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} \quad \mathbf{p}_i^h = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (4.12)$$

A $\mathbf{p}_i$ pontokat ezáltal homogén koordinátásként kezelhetjük, mivel ha megszorozzuk a – homogén koordinátaival adott – pont minden koordinátáját egy nem-zérus értékkel,

akkor az a pont helyzetét nem változtatja meg, tehát w_i súllyal szorozva megkapjuk a $\mathbf{p}_i$ pont egy másik homogén koordinátás alakját:

$$\mathbf{p}_i^w = \begin{bmatrix} w_i x_i \\ w_i y_i \\ w_i z_i \\ w_i \end{bmatrix}. \quad (4.13)$$

Ezen $\mathbf{p}_i^w$ pontot visszaírva a (4.8) egyenletbe kapjuk a következő formulát:

$$\mathbf{c}^w(u) = \sum_{i=1}^n N_i^p(u) \mathbf{p}_i^w = \sum_{i=1}^n N_i^p(u) \begin{bmatrix} w_i x_i \\ w_i y_i \\ w_i z_i \\ w_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n N_i^p(u) w_i x_i \\ \sum_{i=1}^n N_i^p(u) w_i y_i \\ \sum_{i=1}^n N_i^p(u) w_i z_i \\ \sum_{i=1}^n N_i^p(u) w_i \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

mellyel megkaphatjuk az eredeti $\mathbf{c}(u)$ B-spline görbe homogén koordinátákkal felírt alakját, ha $w_i = 1$ értékű. Visszaírva ezen formulát EUKLIDESZI koordinátás alakba, a NURBS térgörbe definíciójához jutunk [51], melyhez a $\mathbf{c}^w(u)$ negyedik koordinátájával kell elosztani minden koordinátát:

$$\mathbf{c}_r^h(u) = \frac{\sum_{i=1}^n N_i^p(u) w_i \mathbf{p}_i^h}{\sum_{j=1}^n N_j^p(u) w_j}, \quad \mathbf{c}_r(u) = \frac{\sum_{i=1}^n N_i^p(u) w_i \mathbf{p}_i}{\sum_{j=1}^n N_j^p(u) w_j}, \quad (4.15)$$

melyben $\mathbf{c}_r^h(u)$ a homogén, $\mathbf{c}_r(u)$ pedig az EUKLIDESZI koordinátáival felírt NURBS térgörbét jelenti.

A (4.15) által definiált $(p-1)$ -ed fokú NURBS térgörbe előállításához szükség van tehát a $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n$ kontrollpontokra, az $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_l]^T$ csomóértékekre, továbbá a $w_1, \dots, w_n$ súlyokra is. Mivel a w_i súlyérték a $\mathbf{p}_i$ kontrollponthoz van rendelve, ezért a súlyértékek száma meg kell egyezzen a kontrollpontok számával.

Általánosan az mondható el, hogy a w_i súlyértékek pozitívak, de van néhány érdekes alkalmazás, ahol negatív súlyértékek is szerepelhetnek. Ha egy w_i súly zérus, akkor az azt jelenti, hogy a $\mathbf{p}_i$ kontrollpontnak nincs hatása a $\mathbf{c}_r(u)$ térgörbe meghatározására – azaz olyan mintha a $\mathbf{p}_i$ kontrollpont nem szerepelne a kontrollpontok között.

A (4.15) definícióból két fontos következtetés vonható le:

- A NURBS térgörbe racionális, mivel a $\mathbf{p}_i$ kontrollpont együtthatója két $(p-1)$ -ed fokú polinom hányadosa.
- Ha az összes w_i súly értéke 1, akkor a NURBS térgörbe B-spline térgörbére redukálódik.

Ezek alapján azt mondhatjuk, hogy a B-spline görbék a NURBS görbék speciális esetei. Továbbá a NURBS görbe alkalmas arra, hogy egzakt módon leírja a kört, a parabolát és sok más egyéb olyan térgörbét is, melyeket B-spline-okkal nem volt lehetséges egzakt módon megadni [54].

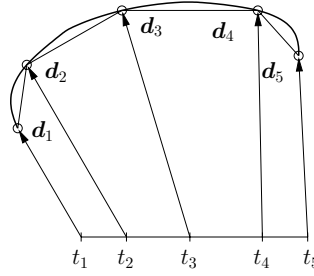
4.4. Interpoláció paraméteres térgörbével

Egy interpoláló NURBS létrehozásakor a kiindulási adatot egy ponthalmaz jelenti, mely pontokon a létrehozandó térgörbének keresztül kell haladnia, ezek az interpolációs pontok. Ezért az első lépés minden esetben az, hogy keressünk egy paramétersokaságot ezen pontokhoz, melyek hozzárendelik a megadott pontokat a térgörbéhez. Egészen pontosan arról van szó, hogy ha adott a $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \dots, \mathbf{d}_n$ interpolációs pontsokaság, akkor n

darab $t_1, t_2, \dots, t_n$ paramétert kell keresni a görbe értelmezési tartományából úgy, hogy a $\mathbf{d}_i$ ponthoz a t_i ($i = 1, \dots, n$) paramétert rendeljük hozzá. Ez azt jelenti, hogy a létrehozott interpolációs térgörbe – mely áthalad a megadott pontokon a felvett sorrendben – teljesíti a következő egyenletet

$$\mathbf{d}_i = \mathbf{c}_r(t_i) \quad 1 \leq i \leq n, \quad (4.16)$$

ahol $\mathbf{c}_r(t)$ alatt a (4.15) egyenlet által definiált görbét értjük. A 4.10. ábrán 5 megadott ponton kell a görbének áthaladni, így a $t_1, \dots, t_5$ paramétereket kell meghatározni első lépésben. A t_i paraméterek és a $\mathbf{d}_i$ pontok egymáshoz rendelésére számtalan lehetőség



4.10. ábra: Interpoláló görbe és a t_i paraméterek kapcsolata

kínálkozik. Például feloszthatjuk a görbe értelmezési tartományát valamilyen szempont alapján, vagy csak véletlenszerűen választunk ki n paramétert a lehetséges tartományból. Ha azonban a paraméterek és a pontok összerendelése véletlenszerűen, nem előre tervezett módon történik, akkor a létrehozott térgörbe alakja megjósolhatatlanná válik.

A következőkben két általunk használt technikát mutatunk be arra, hogy hogyan lehet a paramétereket és az interpolációs pontokat egymáshoz rendelni: az egyenletes paraméterkiosztás technikájával, illetve a húrhossz alapú paraméterezéssel, mely a kontrollpoligon oldaléleivel arányos paraméterkiosztást jelent. Ha a paraméterkiosztás megtörtént, akkor a következő lényeges lépés az $\mathbf{u} = [u_1, \dots, u_l]^T$ csomóérték vektor előállítása.

4.4.1. Egyenletes paraméterezés

A legegyszerűbb paraméterezési technika az, amikor a paramétereket az értelmezési tartományban egyenletesen osztjuk el. Tegyük fel az egyszerűség kedvéért, hogy a $[0, 1]$ értelmezési tartományt kell n részre egyenletesen felosztani. Azt szeretnénk, hogy az előállított görbe mind az első, mind az utolsó interpolációs ponton áthaladjon, ezért a $t_1 = 0$ és a $t_n = 1$ paraméter választással élünk.

Mivel n paramétert kell meghatározni így a $[0, 1]$ tartományt $(n - 1)$ részre kell felosztani, melyek hossza állandó $\frac{1}{n-1}$, tehát a paraméterek

$$\begin{aligned} t_1 &= 0, \\ t_i &= \frac{i}{n-1} \quad 1 < i < n-1, \\ t_n &= 1. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Természetesen, ha az értelmezési tartomány nem a $[0, 1]$ intervallum, hanem az $[a, b]$, akkor a felosztás a következő módon történik

$$\begin{aligned} t_1 &= a, \\ t_i &= a + i \frac{b-a}{n-1} \quad 1 < i < n-1, \\ t_n &= b. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Sajnálatos módon, ezen egyszerű paraméterkiosztás nem minden esetben eredményez kielégítő interpolációs görbét. Például, ha a megadott interpolációs pontok nem egyenletesen helyezkednek el, akkor az egyenletes paraméterkiosztás által létrehozott interpolációs görbe nagy hullámokat, éles csúcsokat és akár hurkokat is tartalmazhat, ami az esetek többségében elkerülendő [49].

4.4.2. Húrhossz alapú paraméterezés

Ha egy interpoláló görbétől azt várjuk, hogy a lehető legközelebb haladjon az interpolációs pontok által kifeszített nyitott poligonhoz, akkor két egymást követő interpolációs pont közötti távolság közel azonos a létrehozott görbe azon szakaszának ívhosszával. Ezek alapján az is teljesül, hogy az interpolációs pontok által létrehozott poligon hossza és az interpoláló görbe hossza közel van egymáshoz. Ha a paramétereket aszerint osztjuk ki, hogy az interpolációs pontok milyen távolságra vannak egymástól, akkor jutunk a húrhossz alapú paraméterezéshez.

Tekintsük a $\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n$ interpolációs pontokat. A $\mathbf{d}_{i-1}$ és a $\mathbf{d}_i$ pontok közötti távolság $|\mathbf{d}_i - \mathbf{d}_{i-1}|$, illetve a teljes nyitott poligon hossza ezen távolságok összege

$$L = \sum_{i=2}^n |\mathbf{d}_i - \mathbf{d}_{i-1}|. \quad (4.19)$$

Egy tetszőleges i -edik interpolációs pont paraméterértékét úgy határozzuk meg, hogy összegezzük a húrpoligon oldalait $\mathbf{d}_i$ pontig és elosztjuk a nyitott húrpoligon teljes L hosszával. Ezek alapján a paraméterkiosztás a következő:

$$\begin{aligned} t_1 &= 0, \\ t_i &= \frac{1}{L} \sum_{j=2}^i |\mathbf{d}_j - \mathbf{d}_{j-1}| \quad 1 < i < n-1, \\ t_n &= 1. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Ezáltal a paraméterek a görbe értelmezési tartományát a húrhosszal arányosan osztják fel.

Természetesen, ha az értelmezési tartomány nem a $[0, 1]$ intervallum, hanem az $[a, b]$, akkor a felosztás a következő módon történik

$$\begin{aligned} t_1 &= a, \\ t_i &= a + \frac{(b-a)}{L} \sum_{j=2}^i |\mathbf{d}_j - \mathbf{d}_{j-1}| \quad 1 < i < n-1, \\ t_n &= b. \end{aligned} \quad (4.21)$$

A húrhossz alapú paraméterezést széles körben használják és gyakran jó eredményt szolgáltat. Azonban a módszer hátránya akkor jelentkezik, ha egy-két húr jóval hosszabb, mint a többi. Így ezen szakaszokon az interpoláció sokszor hosszabb görbét eredményez, mint várnánk.

4.4.3. Paraméterezés zárt interpoláló görbéhez

Amennyiben az előállítani kívánt interpoláló görbe zárt, tehát $\mathbf{d}_1$ és $\mathbf{d}_{n+1}$ interpolációs pont egy és ugyanaz a pont, akkor az interpolációs pontok által meghatározott poligon is zárt. A megadott $\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n$ pontok különbözőek, csak a „fiktív” $\mathbf{d}_{n+1}$ egyezik meg az első interpolációs ponttal. Ebben az esetben a paraméterkiosztás úgy történik, hogy a $t_1 = 0$ paramétert a $\mathbf{d}_1$ ponthoz, míg a $t_{n+1} = 1$ paraméter értéket pedig a $\mathbf{d}_{n+1}$ ponthoz rendeljük hozzá. A további t_i ($i = 2, \dots, n$) paraméterértékek pedig a következő módon számíthatók:

$$\begin{aligned} t_1 &= 0, \\ t_i &= \frac{1}{L_z} \sum_{j=2}^i |\mathbf{d}_j - \mathbf{d}_{j-1}| \quad 1 < i < n+1, \end{aligned} \quad (4.22)$$

ahol L_z a zárt poligon kerülete

$$L_z = \sum_{i=2}^{n+1} |\mathbf{d}_i - \mathbf{d}_{i-1}|. \quad (4.23)$$

Természetesen ebben az esetben is lehetséges, hogy a görbe értelmezési tartománya nem a $[0, 1]$ intervallum, hanem az $[a, b]$. Ekkor a paraméterek kiosztása hasonló az előzőekben felírtakkal:

$$\begin{aligned} t_1 &= a, \\ t_i &= a + \frac{(b-a)}{L_z} \sum_{j=2}^i |\mathbf{d}_j - \mathbf{d}_{j-1}| \quad 1 < i < n+1, \\ t_{n+1} &= b. \end{aligned} \quad (4.24)$$

4.4.4. Csomóérték vektor előállítása

Az alábbiakban két esetet különböztetünk meg. Elsőként azt az esetet vizsgáljuk, amikor *nyitott* interpoláló görbe előállítása a cél. Ebben az esetben a csomóértékek előállítása a következő elvek alapján történhet.

Ha már rendelkezünk az interpolációs pontokhoz rendelt t_i ($i = 1, \dots, n$) paraméterértékekkel, továbbá adott a B-spline görbe p rendszáma, akkor elő lehet állítani az $\mathbf{u} = [u_1, \dots, u_l]^T$ csomóértékek vektorát. A csomóértékek darabszáma $l = n + p$. Ha az interpoláló görbe a végeken rögzített, akkor az első és utolsó p csomóérték egymással megegyezik, pontosabban az első p darab csomóérték $u_1 = u_2 = \dots = u_p = 0$, az utolsó p darab csomóérték pedig $u_{l-p+1} = u_{l-p+2} = \dots = u_l = 1$. A fennmaradó $n - 2p$ csomóértéket választhatjuk egyenlő osztásközzel, vagy valamilyen más technika segítségével.

Ha egyenlő osztásközzel hozzuk létre az $\mathbf{u}$ csomóérték vektort, akkor a csomóértékek a következő módon határozhatók meg

$$\begin{aligned} u_1 &= u_2 = \dots = u_p = 0, \\ u_{p+i} &= \frac{i}{n-p+1} \quad i = 1, \dots, n-p, \\ u_{l-p+1} &= u_{l-p+2} = \dots = u_l = 1. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Látható, hogy ha ilyen módon hozzuk létre a csomóérték vektort, akkor nincs szükség a t_i paraméterértékekre, tehát ez egy nagyon egyszerű módszer, ami azonban a szakirodalom által nem javasolt, mivel az interpoláció során felállítandó lineáris egyenletrendszer szingulárisává válhat [49].

Számtalan más módszer létezik, mely képes a t_i paraméterkiosztás figyelembevételére [50, 51, 49]. Ilyen például a DE BOOR által bevezetett átlagolási módszer, vagy a PARK által felírt eltolásos – idegen szóval *shifting-method* – technika.

Az átlagolási módszer szerint a t_{p+i} csomóérték az egymást követő p paraméterértékek átlaga, azaz

$$\begin{aligned} u_1 &= u_2 = \dots = u_p = 0 \\ u_{p+i} &= \frac{1}{p} \sum_{j=i}^{p+i-1} t_j \quad i = 1, 2, \dots, n-p \\ u_{l-p+1} &= u_{l-p+2} = \dots = u_l = 1. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Második esetként tekintsük azt, amikor *zárt* interpoláló görbéhez keresünk csomóérték vektort. A (4.10)-ben felírt ciklikus csomóérték vektor előállítására a célunk, oly módon, hogy figyelembe vegyük a már létező $t_1, t_2, \dots, t_m$ paraméterkiosztást – azaz itt m a megadott interpolációs pontok száma –, mely azt is jelenti, hogy $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \dots, \mathbf{d}_m$ interpolációs pont adott. Zárt B-spline, vagy NURBS térgörbe esetén tudjuk, hogy a végeken $(p-1)$ darab kontrollpont egybeesik, tehát az interpoláló zárt térgörbéhez $n = m + p - 1$ kontrollpont tartozik. Ezeket $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n$ -el jelöljük. Tehát összesen $l = m + 2p - 1$ csomóérték meghatározása a célunk.

Ebben az esetben nincsenek olyan csomóértékek, melyek $k > 1$ multiplicitásúak. Minden csomóérték egyszeres. A (4.10) képzéséhez ismert képlet alapján, csak az $u_2 \dots u_{n-p+1}$ csomóértékek ismeretlenek. Ezek előállításához tekintsük a következő összefüggéseket [51]:

$$u_i = \frac{1}{2d+1} \sum_{j=i-d}^{i+d} s_j \quad i = 2, \dots, n-p+1, \quad (4.27)$$

ahol $d = \lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor$ – melyben $\lfloor x \rfloor$ jelentse a legnagyobb egész számot, mely nem nagyobb mint x –, továbbá s_j ($j = -(d+2), \dots, m+d$) számítására felhasználjuk, hogy

$$s_j = \begin{cases} u_1 + t_{m+1+j} - t_{m+1} & \text{ha } -(d-1) \leq j \leq -1, \\ t_j & \text{ha } 1 \leq j \leq m+1, \\ u_{n-p+2} + t_{j-m-1} - t_1 & \text{ha } m+2 \leq j \leq m+d, \end{cases} \quad (4.28)$$

ahol $u_{n-p+2} = t_{m+1} = 1$.

Az előzőekben felírt képletek könnyebb értelmezéséhez tekintsük a következő egyszerű példát. Adott $m = 8$ interpolációs pont, célunk, hogy létrehozzunk egy harmadfokú ($p = 4$) zárt interpolációs B-spline görbét, mely mindegyik $\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_8$ interpolációs ponton áthalad. Ismert továbbá az, hogy a megadott pontok távolsága alapján meghatározott paraméterhalmaz $t_1, \dots, t_8$ milyen értékeket tartalmaz (4.1. táblázat). Feladatunk most az, hogy meghatározzuk a ciklikus csomóérték vektort.

4.1. táblázat: Paraméterértékek $m = 8$ interpolációs ponthoz

t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9
0	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{7}{8}$	1

Az ismert összefüggések szerint a kontrollpontok száma $n = m + p - 1 = 11$, ezért a csomóértékek száma $l = n + p = 15$. Az $u_1 = 0$, illetve az $u_{n-p+2} = u_9 = 1$, a hiányzó csomóértékek pedig meghatározhatóak (4.10) és (4.27) alapján. A csomóértékeket a 4.2. táblázat tartalmazza.

4.2. táblázat: Ciklikus csomóérték vektor ($p = 4, m = 8$)

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)
u_{-3}	u_{-2}	u_{-1}	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}
$-\frac{3}{8}$	$-\frac{2}{8}$	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{7}{8}$	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{8}$	$\frac{11}{8}$

4.4.5. Interpoláló NURBS előállítás

Feladatunk a következő: adott a $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \dots, \mathbf{d}_m$ interpolációs pontsokaság és keressük azt a $\mathbf{c}_r(t_i)$ NURBS térgörbét, mely kielégíti a következő egyenleteket

$$\mathbf{d}_i = \mathbf{c}_r(t_i) = \frac{\sum_{k=1}^n N_k^p(t_i) w_k \mathbf{p}_k}{\sum_{j=1}^n N_j^p(t_i) w_j} \quad 1 \leq i \leq m, \quad (4.29)$$

ahol $\mathbf{p}_i$ -k a (4.15) egyenlet által definiált térgörbe kontrollpontjai. Az n darab B-spline alapfüggvény meghatározható a már ismert t_i paraméterértékek és az $\mathbf{u}$ csomóértékek vektora alapján, továbbá figyelembe véve, hogy a (4.29) által felírt egyenletek mindegyikében szerepel a $\sum_{j=1}^n N_j^p(t_i) w_j$ tag, így a következő együttható mátrix áll elő

$$\mathbf{N}^p(t) = \frac{1}{\sum_{j=1}^n N_j^p(t_i) w_j} \begin{bmatrix} w_1 N_1^p(t_1) & w_2 N_2^p(t_1) & \dots & w_n N_n^p(t_1) \\ w_1 N_1^p(t_2) & w_2 N_2^p(t_2) & \dots & w_n N_n^p(t_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ w_1 N_1^p(t_m) & w_2 N_2^p(t_m) & \dots & w_n N_n^p(t_m) \end{bmatrix}. \quad (4.30)$$

Látható, hogy ez egy $m \times n$ -es együttható mátrix. Továbbá, mind a $\mathbf{d}_i$ ($1 \leq i \leq m$) interpolációs pontok, mind a $\mathbf{p}_k$ ($1 \leq k \leq n$) kontrollpontok – a különböző irányú koordinátáik alapján – egy-egy mátrixba rendezhetők, azaz

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_{1x} & d_{2x} & \dots & d_{mx} \\ d_{1y} & d_{2y} & \dots & d_{my} \\ d_{1z} & d_{2z} & \dots & d_{mz} \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_{1x} & p_{2x} & \dots & p_{nx} \\ p_{1y} & p_{2y} & \dots & p_{ny} \\ p_{1z} & p_{2z} & \dots & p_{nz} \end{bmatrix}^T. \quad (4.31)$$

A megoldandó lineáris algebrai egyenletrendszer tehát, ha nem zárt interpoláló térgörbét kívánunk létrehozni:

$$\mathbf{N}^p \cdot \mathbf{p} = \mathbf{d}, \quad (4.32)$$

amelynek akkor létezik megoldása, ha $m \leq n$ fennáll [51]. E fenti egyenletrendszer tehát azt jelenti, hogy mind az x , mind az y , mind a z koordináták tekintetében ugyanazzal az együttható mátrixszal kell a feladatot megoldani ahhoz, hogy az ismeretlen $\mathbf{p}_k$ kontrollpontokat meghatározzuk.

Amikor zárt interpoláló NURBS térgörbét kívánunk meghatározni, akkor a (4.29) kiindulási feladat módosul. Az előző szakaszban felírt ciklikus csomóérték vektort használjuk fel, továbbá tudjuk, hogy az előálló kontrollpontok a p rendszámtól függő mértékű átfedést mutatnak, azaz $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_{m+1}, \dots, \mathbf{p}_p = \mathbf{p}_{m+p-1}$. Ez úgy is felírható, hogy

$$\mathbf{p}_{[i]} = \begin{cases} \mathbf{p}_i & \text{ha } 1 \leq i \leq m, \\ \mathbf{p}_{i \bmod (m+1)+1} & \text{ha } m < i \leq m+p-1, \end{cases} \quad (4.33)$$

mely alapján a (4.29) átírható a következő egyszerűbb alakba

$$\mathbf{d}_i = \mathbf{c}_r(t_i) = \frac{\sum_{k=1}^n N_k^p(t_i) w_k \mathbf{p}_{[k]}}{\sum_{j=1}^n N_j^p(t_i) w_j} \quad 1 \leq i \leq m. \quad (4.34)$$

Ebben az esetben az előállított együttható mátrix már egy $m \times m$ -es négyzetes mátrix. Tehát m interpolációs pont által n kontrollpont egyértelműen meghatározható, mivel az $m+1.$, $m+2.$, $\dots$ kontrollpontok megegyeznek az $1.$, $2.$, $\dots$ kontrollpontokkal. Tekintettel kell azonban lenni arra, hogy az $\mathbf{N}^p$ együttható mátrix előállításakor az $1.$, $2.$, $\dots$, $p-1.$ oszlopokhoz még hozzá kell adni az $N_{m+1}^p(u)$, $N_{m+2}^p(u)$, $\dots$, $N_{m+p-1}^p(u)$ -ből származó tagokat, azaz a mátrixba rendezés a következő módon történhet meg:

$$\mathbf{N}^p(t) = \frac{1}{\sum_{j=1}^n N_j^p(t_i) w_j} \begin{bmatrix} w_1 N_1^p(t_1) + w_{m+1} N_{m+1}^p(t_1) & \dots & w_m N_m^p(t_1) \\ w_1 N_1^p(t_2) + w_{m+1} N_{m+1}^p(t_2) & \dots & w_m N_m^p(t_2) \\ \vdots & & \vdots \\ w_1 N_1^p(t_m) + w_{m+1} N_{m+1}^p(t_m) & \dots & w_m N_m^p(t_m) \end{bmatrix}. \quad (4.35)$$

4.5. Számpélda

A zárt interpoláló térgörbe létrehozására írt program működését egy egyszerű síkbeli számpéldával kívánjuk bemutatni. Az ilyen jellegű térgörbe leírasi és létrehozási technikát az általunk kifejlesztett végeselemes programban használjuk majd fel, térbeli érintkezési feladatok érintkezési-elválási határának egy sima görbével való pontos leírására.

Tekintsünk egy olyan feladatot, melyben adott a $\mathbf{d}_i$, ($i = 1, 2, \dots, 8$) pontokból álló interpolációs pontsokaság, lásd a 4.3. táblázatot.

4.3. táblázat: Interpolációs pontok koordinátái

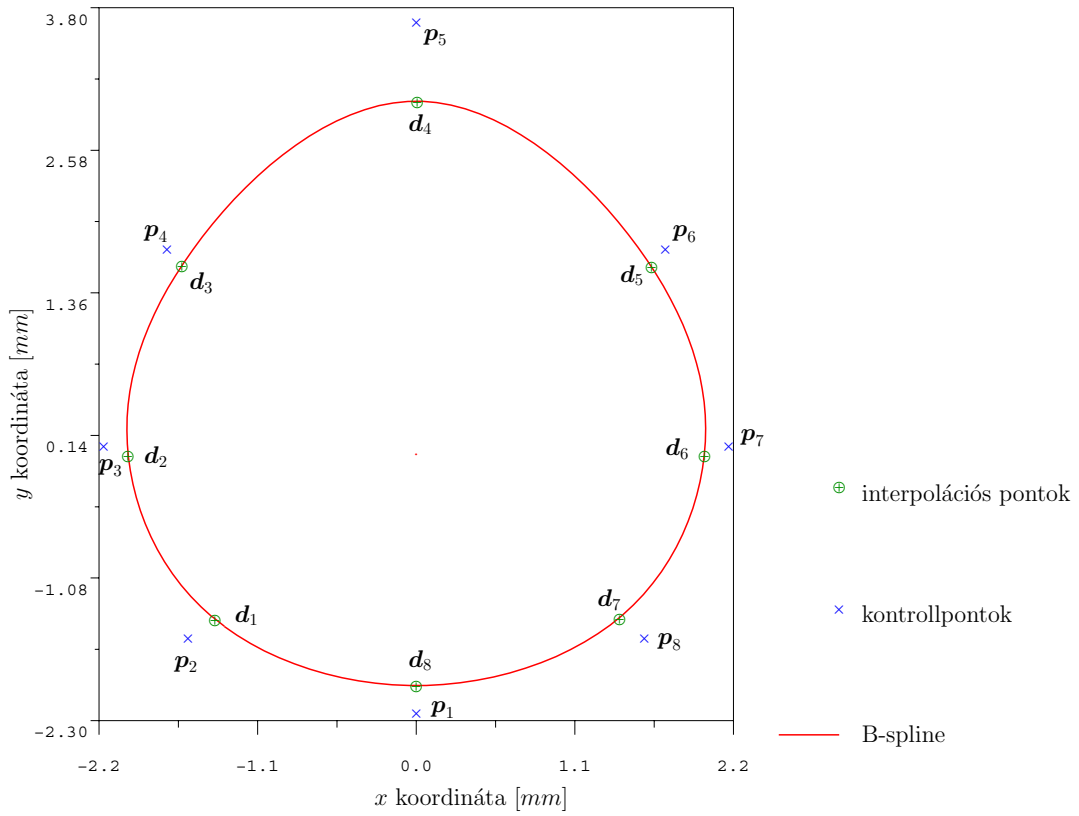
$\mathbf{d}_i$	x	y	z
$\mathbf{d}_1$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	5.0
$\mathbf{d}_2$	-2.0	0.0	5.0
$\mathbf{d}_3$	$-\sqrt{2} - 0.2$	$\sqrt{2} + 0.2$	5.0
$\mathbf{d}_4$	0.0	3.0	5.0
$\mathbf{d}_5$	$\sqrt{2} + 0.2$	$\sqrt{2} + 0.2$	5.0
$\mathbf{d}_6$	2.0	0.0	5.0
$\mathbf{d}_7$	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	5.0
$\mathbf{d}_8$	0.0	-2.0	5.0

Célunk, első lépésként az, hogy meghatározzuk az ezen pontokhoz tartozó zárt interpoláló NURBS térgörbe $\mathbf{p}_i$ ($i = 1, 2, \dots, 11$) kontrollpontjait. A B-spline alapfüggvények rendjét $p = 4$ -re választottuk, azaz 3-ad fokú függvényekkel állítjuk elő a kívánt térgörbét. Így az első és utolsó három kontrollpont egybeesik. Az egyszerűség kedvéért itt $w_i = 1$ súlyértékeket alkalmazunk, így valójában egy B-spline görbe meghatározása a feladat. A megoldáskor húrhossz alapú paraméterezést használunk fel. Az elkészített program segítségével a 4.4. táblázatban összefoglalt értékeket kaptuk.

Szemléltetésként megrajzoljuk az előállított kontrollpontok által generált görbét. Ehhez a térgörbén található pontokat kell generálni a kirajzolás pontosságát megkívánt számban. Itt 303 pontnak állítjuk elő a koordinátáit, és ezen pontok felhasználásával, lineáris interpoláció segítségével jelenítjük meg a térgörbét.

4.4. táblázat: Numerikusan előállított kontrollpontok

p_i	x	y	z
$p_1 = p_9$	0.0	-2.21321307831708	5.0
$p_2 = p_{10}$	-1.58342432392788	-1.57357384336584	5.0
$p_3 = p_{11}$	-2.16753687904293	0.067034006487873	5.0
p_4	-1.72789358108819	1.75406491835431	5.0
p_5	0.0	3.69991654328768	5.0
p_6	1.72789358108819	1.75406491835431	5.0
p_7	2.16753687904293	0.067034006487873	5.0
p_8	1.58342432392788	-1.57357384336584	5.0



4.11. ábra: Numerikusan előállított zárt interpoláló térgörbe

A 4.11. ábrán feltüntettük a megadott interpolációs pontok mellett az általuk generált kontrollpontok elhelyezkedését is, továbbá megrajzoltuk a létrehozott 3-ad fokú zárt interpolációs NURBS térgörbét, $w_i = 1$ súlyértékkel. A kapott görbe, mint látható a 4.11. ábrából, szép, sima és folytonos, valóban keresztülmegy a d_i ($i = 1, 2, \dots, 8$) interpolációs pontokon.

5. fejezet

ALAKOPTIMALIZÁLÁS AZ ÉRINTKEZÉSI NYOMÁS VEZÉRLÉSÉVEL

A különböző gépelemek feszültségállapotát jelentősen befolyásolja az érintkező elemek geometriai kialakítása, formája. Nemcsak a legáltalánosabban használt gépalkatrészek – úgymint illesztett szárú csavarok, görgős-, vagy golyóscsapágyak elemei –, hanem akár a legbonyolultabb szerszámgépek esetében is rendkívüli jelentősége van az egymással érintkezésbe kerülő gépelemek, alkatrészek optimális tervezésének. A szingularitások elkerülése, illetve a működés közben felmerülő, terhelés következtében létrejövő feszültségállapotot hosszú távon elviselő szerkezetek létrehozása az elsődleges cél, melyhez sok esetben speciális megfontolások szükségesek.

Optimalizálási feladatok során gyakran tekintjük tervezési paraméternek például az anyagjellemzőket, az alakot és méretet jellemző mérőszámokat, terheléseket, a gépelemek közötti kapcsolatok jellegét, illetve a kapcsolódó gépelemek topológiáját, amivel részletesen foglalkozott MRÓZ a [39] dolgozatban. A mérnöki gyakorlatban a gépelemek közötti kapcsolatokat sok esetben egyoldalú érintkezési feladatként modellezzük, erről olvashatunk számtalan munkát, ha a kontakt feladatok irodalmát vizsgáljuk [35, 24]. HASLINGER és NEITTAANMAKI [22] könyve széleskörűen ismerteti az érintkezési feladatok kapcsán felállítható optimalizációs problémák matematikai hátterét. Találkozhatunk korábbi munkákkal, melyekben célfüggvényként a maximális érintkezési nyomást vizsgálták, úgymint CONRY és SEIREG cikke [12], vagy PÁCZELT és HERPAI munkája [43]. Az érintkezési nyomás azonban egy nem folytonosan differenciálható függvény, mely az optimalizálás során problémákat vet fel. A [34], [36] és a [52] cikkek a teljes potenciális energiát veszik fel költségfüggvénynek, míg a hézagfüggvény integrál értelemben vett mellékfeltételként szerepel az optimalizációs feladatban.

Rugalmas vagy merev testként modellezett henger és egy lineárisan rugalmas test érintkezési feladatát vizsgálta optimalizálási szempontból számtalan szerző, úgymint KIKUCHI és TAYLOR [34], KLARBRING és HASLINGER [36], vagy PÁCZELT és SZABÓ [45, 47]. Az érintkezési nyomás megoszlásának vezérlésével valósítottak meg alakoptimalizálást, h - és p -verziós végelem-módszer használatával a szerzők [46]-ban. Egy összefoglaló munkában PÁCZELT mutat különböző gyakorlati problémákra megoldást, az érintkezési nyomás megoszlásának vezérlésével, amikor az érintkező testek egyike merevtestszerű elmozdulással és elfordulással is rendelkezik [41].

Jelen fejezetben az érintkezési nyomás megoszlásának vezérlésével valósítunk meg optimalizálást, különböző szempontok alapján. Bemutatunk egy általunk továbbfejlesztett vezérlő függvényt [42], melyet alkalmassá tettünk térbeli feladatok alakoptimalizálására is. A következő optimalizációs feladatokat tűztük ki:

1. Az érintkezési nyomás maximumának minimalizálása.
2. Merevtestszerű elmozdulás maximalizálása.
3. Redukált nyomaték vagy erő maximalizálása.

4. Súrlódási (kopási) teljesítményből származó veszteség minimalizálása.
5. Gördülő test alakoptimalizálása az érintkezési nyomás megoszlásának vezérlésével.

A 2–5. feladatokat úgy is megoldjuk, hogy az érintkezésben résztvevő testekre megengedett HUBER-MISES-HENKY, vagy röviden a továbbiakban VON MISES-féle redukált feszültséget is figyelembe véve hajtunk végre alakoptimalizálást.

Az első négy optimalizálási feladat esetében p -verziós végelem-módszert alkalmazunk az érintkezési tartomány diszkretizálásához, míg a gördülőelem optimalizálásakor a 3.3 részben felírt hatásmátrix segítségével oldjuk meg az érintkezési feladatot, melynek során a tükrözési technikát is felhasználjuk.

5.1. Nyomásmegoszlást vezérlő függvény

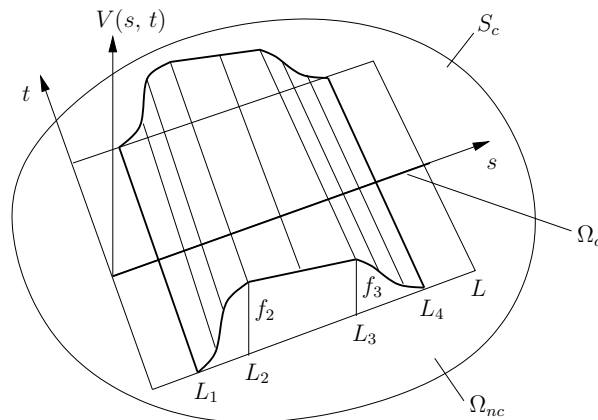
Az 5.1 ábrán jelzett S_c -vel jelölt feltételezett érintkezési tartomány, – a korábbi 2. fejezetben már bemutatott érintkezési-elválási altartományokra $S_c = \Omega_p \cup \Omega_0$ való felbontása mellett – itt egy másik lényeges szempont szerint is két részre van bontva. Nevezetesen aszerint, hogy az adott részen történik-e nyomásvezérlés vagy sem. Ennek értelmében Ω_c jelöli azon résztartományt – itt az s koordinátavonal egy szakaszát –, ahol nyomásvezérlés történik. Továbbá az S_c tartomány másik részét képezi az Ω_{nc} , ahol nem történik nyomásvezérlés ezen az altartományon csak a vezérelt részről származó hatások érzékelhetőek. Így tehát a feltételezett érintkezési tartomány egyrészt felbontható Ω_p érintkezési és Ω_0 elválási, vagy rés altartományokra, azaz $S_c = \Omega_p \cup \Omega_0$; de más szempont szerint tekinthetjük a vezérelt Ω_c és a nem vezérelt Ω_{nc} résztartományra bontást is, amelyből $S_c = \Omega_c \cup \Omega_{nc}$.

Feltételezzük, hogy az érintkező testek az Ω_c résztartományon érintkezésben vannak. A teljes S_c feltételezett érintkezési tartománynak azon részét, ahol a d hézagfüggvény pozitív, Ω_0 -val jelöljük, tehát $S_c = \Omega_0 \cup \Omega_p$. Itt az s és t felületi koordinátákat vezettük be, és feltételezzük, hogy az s koordináta mentén az alakoptimalizálás eredményeként a következő nyomásmegoszlást kapjuk:

$$p_n(s) = V(s) p_{\max} = V(s, t=0) p_{\max} = V(\mathbf{x}) p_{\max} \quad \mathbf{x} \in \Omega_c, \quad (5.1)$$

ahol a kiválasztott $V(s)$ nyomásmegoszlást vezérlő függvény – a továbbiakban *vezérlő függvény* – kielégíti azt a feltételt, hogy

$$0 \leq V(s) \leq 1, \quad p_{\max} = \max p_n(s), \quad \mathbf{x} = [s, t=0] \in \Omega_c. \quad (5.2)$$



5.1. ábra: A $V(\mathbf{x})$ nyomásmegoszlást vezérlő függvény

A vezérlő függvényt a következő módon értelmezzük

$$V(\mathbf{x}) = V(s) \cdot \bar{V}(t), \quad (5.3)$$

ahol $\bar{V}(t) = 1$ ($\forall t$) állandó függvény, mely azt jelenti, hogy

$$0 \leq V(\mathbf{x}) \leq 1 \quad \mathbf{x} = [s, t] \in \Omega_c. \quad (5.4)$$

Az Ω_{nc} tartományon az érintkezési nyomást nem vezéreljük, ezen a tartományon nem teljesül az (5.1) egyenlet, azaz

$$\chi(\mathbf{x}) = V(\mathbf{x}) p_{\max} - p_n(\mathbf{x}) \geq 0 \quad \mathbf{x} \in \Omega_{nc}, \quad (5.5)$$

melyben Ω_{nc} két részből áll, egyik részén érintkezés lép fel, míg a másik részén hézag van, azaz $\Omega_c \cup \Omega_{nc} = \Omega_p \cup \Omega_0$.

A legtöbb esetben, úgymint síkbeli vagy hengerszimmetrikus érintkezési feladatoknál, elegendő, ha csak az s -koordináta függvényében változik a vezérlő függvény, míg a t -koordináta szerint állandó értéket mutat, ahogy azt az 5.1. ábra szemlélteti. Feltételezzük, hogy az érintkezési nyomás változása az Ω_c tartományon a következő C^1 osztályú $V(s)$ függvény által írható le:

$$V(s) = \begin{cases} 0 & \text{ha } 0 \leq s \leq L_1, \\ V^*(s) \left[3 \left(\frac{s-L_1}{L_2-L_1} \right)^2 - 2 \left(\frac{s-L_1}{L_2-L_1} \right)^3 \right] & \text{ha } L_1 \leq s \leq L_2, \\ V^*(s) & \text{ha } L_2 \leq s \leq L_3, \\ V^*(s) \left[1 - 3 \left(\frac{s-L_3}{L_4-L_3} \right)^2 + 2 \left(\frac{s-L_3}{L_4-L_3} \right)^3 \right] & \text{ha } L_3 \leq s \leq L_4, \\ 0 & \text{ha } L_4 \leq s \leq L, \end{cases} \quad (5.6)$$

ahol $V^*(s)$ a következő általunk felvett C^1 osztályú függvény

$$V^*(s) = f_2 + (f_3 - f_2) \frac{s - L_2}{L_3 - L_2} \quad f_2 \geq 0, \quad f_3 \geq 0, \quad (5.7)$$

továbbá f_2, f_3, L_i ($i = 1, 2, 3, 4$) mind a vezérlő függvény paraméterei. Ezen paraméterek közül néhányat előre rögzítünk, míg a többit csak az optimalizálási folyamat végén határozzuk meg, hogy pontosan melyeket, az attól függ, hogy mi az optimalizálási feladat célfüggvénye.

Ha tekintjük például a következő esetet

$$f_2 = f_3, \quad L_1 = L_2 = 0, \quad L_3 = L_4 = L, \quad (5.8)$$

akkor állandó nyomásmegoszlást kapunk az egész Ω_c tényleges érintkezési tartományon. Részletes tanulmányt mutat be a [42] cikk mind a kétdimenziós, mind a háromdimenziós érintkezési-optimalizációs feladatok vonatkozásában.

Néhány esetben szükséges lehet, hogy az érintkezési nyomásmegoszlást, a feltételezett S_c érintkezési tartományon, variációs elvekből számítsuk. Ekkor az érintkezési nyomás a következő módon állítható elő

$$p_n(\mathbf{x}) = \sum_i V_i(\mathbf{x}) \tilde{V}_i, \quad (5.9)$$

ahol $V_i(\mathbf{x})$ -k ismert függvények, míg $\tilde{V}_i$ -k az egyensúlyi egyenletekből számíthatók [42].

5.2. Iteratív megoldási módszer

Az egyszerűség kedvéért, először a terhelés hatására létrejövő feszültségekből számított redukált feszültségre nem vagyunk tekintettel és a megoldást egy ismert iterációs módszerrel keressük, melyet érintkezési feladatok kapcsán PÁCZELT publikált a [41] cikkben. Ez részletesen leírja az iterációs eljárás felépítését, itt most csak a számunkra fontos egy-mást követő lépéseket emeljük ki, és a továbbiakban *1. típusú*-iterációnak nevezzük ezen eljárást.

Az iterációs számítás kiterjesztésével foglalkoztunk a [42] cikkben, pontosabban azzal, hogy hogyan lehet a terhelések hatására létrejövő feszültségekből származtatott redukált feszültséget is figyelembe venni az alakoptimalizálás során. Ezen utóbbi munka részletesen kitér a *2. típusú*-iterációra, melyet itt szintén felhasználunk a megoldáshoz.

Az iteratív megoldás a következő séma szerint építhető fel:

1. típusú-iteráció:

1. Az eredeti érintkezési feladat megoldása, illetve a $p_n^{(0)} = p_n^{(0)}(s)$ érintkezési nyomás meghatározása; maximális érintkezési nyomás meghatározása $p_{\max}^{(0)}$; $k = 0$.
2. $k = k + 1$, azaz növeljük a k ciklusváltozó értéket.
3. Célunk az, hogy az érintkezési nyomásmegoszlás az (5.1), vagy az (5.9) szerint változzon, azaz $p_n^{(k)}(s) = V(s)p^*$. Ha a feladatot adott elmozduláshoz tartozóan kell megoldani, akkor p^* paraméter értéke az előző $(k - 1)$. ciklusban megoldott érintkezési feladatból származik, $p^* = \max p_n^{(k-1)}(s)$. Ha a terhelést nem egy előírt elmozdulás generálja, akkor nincs szükség az érintkezési feladat megoldására, mivel a p^* paraméter értéke minden lépésben a terhelési egyensúlyból származtatható:

$$F_0 = 2\pi p^* \int_0^L V(s)(r_b + s) ds,$$

melyben F_0 a testeket összeszorító eredő erő.

4. Az egymástól elválasztott testek itt a $p_n^{(k)}(s)$ és $-p_n^{(k)}(s)$ érintkezési nyomással normális irányban, illetve súrlódásos érintkezés feltételezésekor a $\mu p_n^{(k)}(s)$ és $-\mu p_n^{(k)}(s)$ csúsztató feszültséggel érintő irányban terheltek az S_c érintkezési felület mentén. Az $u_n^{1(k)}$ és $u_n^{2(k)}$ elmozdulások ekkor meghatározhatók.
5. Kiszámítjuk a normál irányú elmozdulásbeli szakadások értékét:

$$m^{(k)}(s) = u_n^{1(k)} - u_n^{2(k)}.$$

6. Ezek közül kiválasztjuk a minimális értékűt:

$$\min m^{(k)}(s) = m^{(k)}(s_*).$$

7. Ezek után az új hézagfüggvény a következő módon állítható elő:

$$h^{(k)}(s) = m^{(k)}(s) - m^{(k)}(s_*).$$

8. A kinematikai peremfeltétel biztosítása érdekében megoldjuk az érintkezési feladatot az új hézagfüggvénnyel és megkapjuk az érintkezési nyomásmegoszlást:

$$p_n^{(k)} = p_n^{(k)}(s).$$

9. A 2-8 lépéseket addig ismételjük, míg a következő kilépési feltétel nem teljesül

$$h_{\text{tol}} = 2\pi \int_{r_b}^{r_k} \left| \frac{h^{(k)} - h^{(k-1)}}{h^{(k)}} \right| r dr \leq \theta = 10^{-4}.$$

2. *típusú*-iteráció:

A [42] cikkben bevezetett pótlólagos feltétel arra szolgál, hogy a kialakuló feszültségállapotot az adott anyag még el tudja viselni, tehát ne hozzunk létre olyan optimalizált gépelemet, amelyben a maximális redukált feszültség az anyagra megengedettnél magasabb:

$$\max \sigma_{eq} \leq \sigma_U. \quad (5.10)$$

Ha az (5.10) által definiált mellékfeltételt is tartalmazza az optimalizációs feladat, akkor az 1. *típusú*-iteráción belül egy másik iterációs ciklust is el kell helyezni. Ez annyit jelent, hogy bármely GAUSS integrációs pontban teljesíteni kell az (5.10) feltételt. Az optimalizálás során először mindig az 1. *típusú*-iterációval határozunk meg egy optimális alakot, mely azonban még nem veszi figyelembe, hogy ez mekkora feszültséget okoz az anyagban. A következő lépésben az 1. *típusú*-iteráció által optimális eredményt létrehozó paramétereket tovább kell változtatni annak érdekében, hogy az (5.10) mellékfeltételt is ki tudjuk elégíteni. Ez azt jelenti, hogy a nyomásmegoszlást befolyásoló vezérlési paramétert vagy tovább kell növelni, vagy éppen csökkenteni kell, a feladattípustól függően.

Jelölje f az általunk keresett tetszőleges paramétert, melynek végső értékét a 2. *típusú*-iteráció fogja megkeresni úgy, hogy a létrejövő optimális alak már teljesíti az (5.10) egyenlőtlenségi mellékfeltételt. A terhelési folyamat jellemző ciklusváltozója i_{step} , mely az egymást követő – úgynevezett glogáblis – iterációs lépések során növekszik: $i_{\text{step}} = 1, 2, 3, \dots$. Ezáltal f paraméter értékét a következő képlet szerint állítjuk be az iteráció során:

$$f = f_0 + \Delta f (i_{\text{step}} - 1), \quad (5.11)$$

ahol f_0 és Δf értéke előre rögzített feladatfüggő állandó. Az optimalizálási feladat iterációs megoldása a következő lépésekkel jellemezhető:

1. $i_{\text{step}} = 0$, f_0 és Δf inicializálása az adott optimalizálásnak megfelelően.
2. (5.11) értelmében változtatjuk f értékét, melyhez újabb és újabb felső test alakot határozunk meg. Az optimalizálás során rögzített f érték mellett 1. *típusú*-iterációt hajtunk végre.
3. A kapott alakú testekre – lineárisan rugalmas rendszert tekintve – a VON-MISES-féle σ_{eq} redukált feszültséget a használt véges elemek minden GAUSS-integrációs pontjában kiértékeljük, azaz

$$\sigma_{eq} = \sigma_{eq}(\xi, \eta) \quad \text{ahol} \quad \xi = -1, \xi_1, \dots, \xi_{NG}, 1 \quad \text{és} \quad \eta = -1, \eta_1, \dots, \eta_{NG}, 1,$$

ahol ξ, η felületi helyi koordináták, míg NG az integrációs pontok száma ξ , illetve η irányban.

4. Jelölje i_{step}^{**} azt a globális iterációs lépést, amikor

$$\max \sigma_{eq}^{**} > \sigma_U$$

először teljesül. Ehhez a lépéshez tartozik az f^{**} paraméterérték. Tehát az előző ciklusban ($i_{\text{step}} = i_{\text{step}}^{**} - 1 = i_{\text{step}}^*$) még a

$$\max \sigma_{eq}^* \leq \sigma_U$$

feltétel igaz volt, melyhez az f^* érték tartozott.

5. Az $f_{\text{opt}}^{(j)}$ optimális alakhoz tartozó paramétert az $f^* < f_{\text{opt}}^{(j)} < f^{**}$ intervallumból a következő lineáris approximációval határozzuk meg

$$f_{\text{opt}}^{(j)} = f^* + \left(f^{**} - f^* \right) \frac{\sigma_U - \sigma_{eq}^*}{\sigma_{eq}^{**} - \sigma_{eq}^*} \quad j = 1, 2, \dots,$$

ahol $f^{**} = f^{**} = f^*$, $\sigma_{eq}^{**} = \sigma_{eq}^*$.

6. Az 5. előző pontban felírt, úgynevezett 2. típusú-iterációt addig folytatjuk, amíg a

$$\frac{|\sigma_U - \sigma_{eq}^{**}|}{\sigma_U} \leq 0.015$$

kilépési feltétel nem teljesül.

5.3. Optimalizációs érintkezési feladatok felállítása

Ebben a részben az általunk optimalizált érintkezési feladatok körét tekintjük át. Külön megvizsgálva a henger alakú bélyeg érintkezését egy rugalmas vagy merev testtel, illetve az elsősorban csapágynál előforduló mechanikai érintkezési feladat modellezésére alkalmas hengersizű gördülő elem és rugalmas féltér kapcsolatát. Mindkét esetben ismert egy $h = h(\mathbf{x}) \geq 0$ hézagfüggvény, mely az érintkező testek kiindulási alakját határozza meg. A $h = 0$ feltétel azt jelenti, hogy vannak olyan kiindulási pontok, amelyek már kezdetben érintkeznek. Míg h pozitív volta azt mutatja, hogy a nem érintkező pontok között mekkora $\mathbf{n}_c$ irányú távolság van.

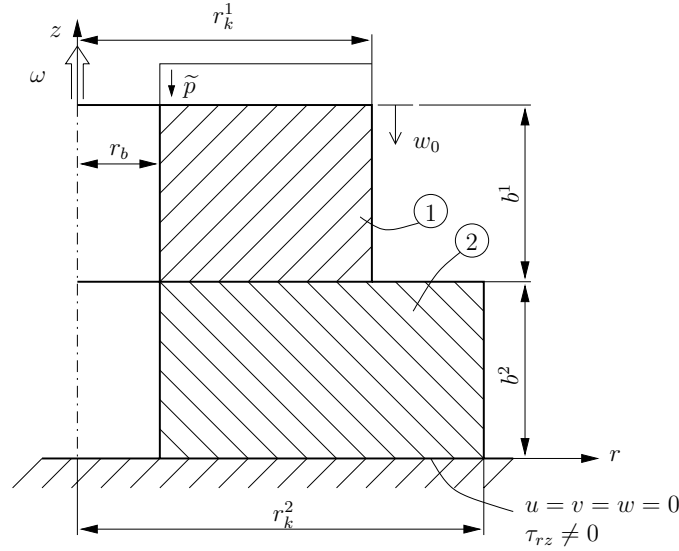
Rugalmasságtani feladatokról lévén szó, a kinematikai és/vagy dinamikai peremfeltételek előírása alapvetően megkülönbözteti a megoldani kívánt feladatokat. Általában az mondható el, hogy három típusú előírást szokás megadni:

- előírás lehetséges az elmozdulásmező vonatkozásában (*tisztán kinematikai*),
- felületi megoszló terhelést adhatunk meg a kiválasztott felületeken (*csak dinamikai*),
- valamint ezen kettő típus kombinálásával is rögzíthetünk peremfeltételeket (*vegyes peremfeltétel*).

5.3.1. Tengelyszimmetrikus feladatok vizsgálata

Tekintsük két lineárisan rugalmas anyagú hengernek az 5.2. ábrán vázolt elrendezését. A vizsgált 1-es jelű felső és 2-es jelű alsó henger anyaga megegyezik, a numerikus szám példánál ezt az $E = E^1 = E^2 = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$ rugalmassági modulus és $\nu = \nu^1 = \nu^2 = 0.3$ POISSON-tényező beállításával biztosítottuk. Az anyagokra megengedett maximális redukált feszültség nagysága $\sigma_U = \sigma_U^1 = \sigma_U^2 = 250 \text{ MPa}$.

A vázolt helyzetben jelzett geometriai jellemzők a következők. Az érintkező hengerekben lévő furat sugara $r_b = r_b^1 = r_b^2 = 20 \text{ mm}$, a felső henger külső sugara $r_k^1 = 120 \text{ mm}$, míg az alsó hengeré $r_k^2 = 140 \text{ mm}$. A hengerek magassága egyaránt $b^1 = b^2 = 50 \text{ mm}$.



5.2. ábra: Érintkező hengerek geometriai és terhelési jellemzői

A 2-es jelű alsó test $z = 0$ síkjában azzal a feltevéssel élünk, hogy ott a test úgy van rögzítve, hogy z és r -re merőleges irányú elmozdulása zérus értékű, azaz $u = v = w = 0$, továbbá nem köthetjük ki, hogy a τ_{rz} csúsztató feszültség is zérus értékű ezen a felületen. A terhelésekre majd az egyes optimalizációs feladatok kapcsán fogunk kitérni, de ahogy azt az 5.2. ábra jelzi, terhelési előírást az 1-es jelű test felső lapján fogunk megadni, ahol ω jelenti a szögsebességet, $\tilde{p}$ a függőleges irányú megoszló terhelést, illetve w_0 a felső lap $-z$ irányú elmozdulását.

A következő optimalizációs feladatokat vizsgáljuk:

– *Kinematikai terhelés esetén:*

P1: Az 1-es jelű felső test – továbbiakban bélyeg – felső peremén $w_0 = 0.1 \text{ mm}$ függőleges elmozdulást írunk elő. Az érintkezési nyomás vezérlésekor az L_i ($i = 1, 2, 3, 4$) paraméterértékek előre rögzítettek, oly módon, hogy az optimalizált érintkezési nyomásmegoszlás az előírt sima vezérlő függvény szerint változzon. Ehhez a bélyeg alakját a kívánt mértékben módosítjuk úgy, hogy a bélyeg eredeti magassága ne változzon. Ha bevezetjük az $s = r - r_b$ koordinátát, és a Δh hézagfüggvényt akkor a következő optimalizációs feladatot kapjuk [41]

$$\min \left\{ p_{\max} \left| \begin{array}{l} p_n \geq 0, d = d(p_n, \Delta h) = 0 \quad \mathbf{x} \in S_c^1, w = -w_0 \quad \mathbf{x} \in S_u^1, \\ \chi = V(s) p_{\max} - p_n(s) = 0, \min \Delta h = 0 \quad \mathbf{x} \in \Omega_c \end{array} \right. \right\}. \quad (5.12)$$

A feladat megoldását az 1. típusú-iterációs algoritmussal keressük meg.

P2: A **P1** optimalizációhoz képest egy további mellékfeltételként tekintjük azt, hogy az anyagra megengedett σ_U redukált feszültséget nem haladhatja meg az anyagban ébredő σ_{eq} legmagasabb redukált feszültség, azaz

$$\sigma_{eq} \leq \sigma_U \quad \mathbf{x} \in V^1 \cup V^2 = V. \quad (5.13)$$

Így a kezdetben előírt w_0 elmozdulást kell maximalizálni úgy, hogy a redukált feszültségre vonatkozó feltételt is teljesítsük. Az optimalizáció matematikai formában a következő módon írható fel

$$\max \left\{ w_0 \left| \begin{array}{l} \min \{ p_{\max} \mid p_n \geq 0, d = d(p_n, \Delta h) = 0, \min \Delta h = 0 \\ \chi = V(s) p_{\max} - p_n(s) = 0 \quad \mathbf{x} \in \Omega_c, \\ w = -w_0 \quad \mathbf{x} \in S_u^1 \}; \sigma_{eq} \leq \sigma_U \quad \mathbf{x} \in V \end{array} \right. \right\}, \quad (5.14)$$

ahol a belső optimalizációt a **P1** esetben használt algoritmussal oldjuk meg, míg w_0 esetében 2. típusú-iterációs eljárásra is szükség van.

P3: Ebben az esetben a **P1** feladatnál alkalmazott eljárást követjük, azaz előírjuk a w_0 elmozdulást, továbbá a vezérlő függvény L_i paramétereit, és úgy hajtjuk végre az alakoptimalizálást, hogy az eredő F_p összeszorító erő egy előre választott értéket adjon [41]. Az optimalizálási feladatot ekkor a következő formában írhatjuk elő

$$\min \left\{ p_{\max} \left| \begin{array}{l} p_n \geq 0, d = d(p_n, \Delta h) = 0, \chi = V(s) p_{\max} - p_n(s) = 0, \mathbf{x} \in \Omega_c, \\ w = -w_0 \quad \mathbf{x} \in S_u^1, F_p = 2\pi \int_{r_b}^{r_k^1} r p_n dr \end{array} \right. \right\}. \quad (5.15)$$

P4: Ha az anyagra megengedett σ_U maximális feszültséget is figyelembe vesszük, akkor nyilvánvaló, hogy az F_p összeszorító erő nem választható meg tetszőleges nagyságúra. Így ennek értéke ismeretlenként szerepel az optimalizációs eljárásban. A megoldandó matematikai feladat a következő

$$\max \left\{ F_p \left| \begin{array}{l} \min \{ p_{\max} \mid p_n \geq 0, d = d(p_n, \Delta h) = 0, w = -w_0 \quad \mathbf{x} \in S_u^1, \\ \chi = 0 \quad \mathbf{x} \in \Omega_c \}; \sigma_{eq} \leq \sigma_U \quad \mathbf{x} \in V \end{array} \right. \right\}. \quad (5.16)$$

– Adott függőleges irányú terhelés esetén

P5: A bélyeg felső felületén $\tilde{p}$ állandó intenzitású megoszló terhelés működik. Ennek eredője

$$F_0 = \pi(r_k^1 - r_b^2)\tilde{p}. \quad (5.17)$$

Adott f_2, f_3 és L_j ($j = 1, 2, 3, 4$) vezérlő paraméterek esetén

$$\chi = \chi(s, p_n, \text{rögzített vez. paraméterek}) = V(s) p_{\max} - p_n(s) = 0, \quad (5.18)$$

és így a bélyegre felírható egyensúlyi egyenletből

$$F_0 = F_p = 2\pi \int_0^L (r_b + s) p_n(s) ds = 2\pi p_{\max} \int_0^L V(s) (r_b + s) ds \quad (5.19)$$

a nyomás $p_{\max}$ maximális értéke kiszámolható, és az 1. típusú iterációnál a bélyeg kezdeti alakja, azaz a

$$\min \left\{ p_{\max} \mid p_n \geq 0, d = 0, \chi = 0, \min \Delta h = 0, F_0 = F_p, \mathbf{x} \in \Omega_c \right\} \quad (5.20)$$

feladat megoldhatóvá válik.

– Vegyes peremfeltételek mellett

P6: Tételezzük fel, hogy a felső bélyeget a függőleges eltolódás mellett a z forgástengely körül el kívánjuk fordítani.

Ezzel határhelyzetben

$$M_T = 2\pi\mu \int_{r_b}^{r_k^1} r^2 p_n dr \quad (5.21)$$

csavaró nyomaték vihető át a testek között, a μ súrlódási tényező esetén.

Könnyen belátható, hogy az egyensúlyi viszonyok miatt

$$F_p = 2\pi \int_{r_b}^{r_k^1} r p_n dr = F_0. \quad (5.22)$$

Így egyrészt

$$M_T \leq 2\pi\mu \int_{r_b}^{r_k^1} r p_n dr r_k^1 \leq r_k^1 \mu F_0, \quad (5.23)$$

másrészt

$$2\pi\mu \int_{r_b}^{r_k^1} r p_n dr r_b \leq M_T, \quad (5.24)$$

vagyis

$$r_b \mu F_0 \leq M_T \leq r_k^1 \mu F_0. \quad (5.25)$$

Az nyilvánvaló, hogy maximális nyomatékátvitel akkor érhető el, ha az érintkezési tartomány csak a bélyeg külső peremének közelében alakul ki, azaz $r = r_k^1$, illetve a minimális érték akkor áll elő, ha csak a belső perem közelében érintkeznek a hengerek, azaz $r = r_b$.

Annak érdekében, hogy sima feszültségeloszlást kapjunk az optimalizálás eredményeként, a bélyeg alakját a vezérlő függvény néhány paraméterével tudjuk beállítani. Pontosabban az L_3 és L_4 paraméterek rögzítettek, illetve az $L_2 - L_1$ különbség is előre be van állítva az egyenletes nyomásmegoszlás érdekében. Tehát a vezérlő függvényben csak az L_1 paraméter marad meg változóként, mivel az $L_2 = L_2(L_1)$. Így jutunk a

$$\chi = \chi(s, p_n, L_1) = V(s, L_1) p_{\max} - p_n(s, L_1) = 0 \quad (5.26)$$

egyenlethez, melyből kifejezhető a

$$p_n(s, L_1) = V(s, L_1) p_{\max} \quad (5.27)$$

érintkezési nyomásmegoszlás függvény.

A felső testre felírható az

$$F = F(L_1, p_{\max} \text{ rögzített}) = F_0 - 2\pi \int_{r_b}^{r_k^1} r V(s, L_1) p_{\max} dr = 0 \quad (5.28)$$

egyensúlyi egyenlet, melyből L_1 értéke kifejezhető, mivel a $p_{\max}$ érintkezési nyomás értéke itt rögzített. Ezáltal az optimalizálási feladat

$$\max_{L_1} \left\{ \frac{M_T}{\mu} \left| \begin{array}{l} p_n = p_n(s, L_1) \geq 0, d = d(p_n, \Delta h) = 0, \chi = \chi(s, p_n, L_1) = 0, \\ \min \Delta h = 0 \quad \mathbf{x} \in \Omega_c, F = F(L_1, p_{\max} \text{ rögzített}) = 0 \end{array} \right. \right\}, \quad (5.29)$$

ahol L_1 , Δh és p_n paraméterek jelentenek ismeretlen változókat [41].

P7: Az anyagra vonatkozó σ_U megengedett maximális feszültséget is tekintetbe vesszük a kialakuló feszültségállapot vizsgálatakor, azaz a $\sigma_{eq} \leq \sigma_U$ betartása mellett végezzük el a **P6**-ban felírt optimalizációs feladatot. Ekkor már a $p_{\max}$ maximális érintkezési nyomást nem lehet előre rögzített értéknek tekinteni a nyomaték maximalizálásakor. Az optimalizáció során úgy kell az L_1 távolságot maximalizálni, hogy közben tekintettel legyünk a σ_U megengedett maximális feszültségre is, ezáltal a megoldandó feladat így írható fel:

$$\max_{L_1} \left\{ \frac{M_T}{\mu} \left| \begin{array}{l} p_n = p_n(s, p_{\max}(L_1)) \geq 0, d = d(p_n, \Delta h) = 0, \\ \min \Delta h = 0, \chi = \chi(s, p_n, L_1) = 0 \quad \mathbf{x} \in \Omega_c \\ F = F(p_{\max}(L_1)) = 0; \sigma_{eq} \leq \sigma_U \quad \mathbf{x} \in V \end{array} \right. \right\}. \quad (5.30)$$

Az optimalizáció során az L_1 távolság értékét $\Delta L_1 = \frac{L_3 - L_2}{10}$ konstans értékkel változtatjuk az iterációs megoldás során, mígnem az optimális L_1^{opt} kiválasztása két egymást követő $L_1^{(i)}$ és $L_1^{(i+1)}$ között lineáris approximációval történik, a 2. típusú iterációval.

P8: Ennél a feladatnál feltételezzük, hogy a bélyeg ω relatív szögsebességgel forog. Célszerű az, hogy a bélyeg érintkezési tartományba eső részét úgy alakítsuk ki, hogy a súrlódás következtében fellépő súrlódási teljesítmény-veszteség minimális legyen. Ezért a vezérlő függvény paramétereit a következő módon állítjuk be: $L_1 = L_2 = 0$ és az $L_4 - L_3$ különbség előírt értékű a sima feszültségeloszlás érdekében.

Az érintkező hengerek közötti relatív sebesség $v_r = r\omega$, a súrlódási tényező μ , illetve az érintkezési nyomás p_n , melyből $\tau_n = \mu p_n$ érintkezési csúsztató feszültség keletkezik. A testek egymáson való elcsúszásából származó súrlódási teljesítmény-veszteség ekkor a következő képlet szerint számítható:

$$D = \int_{S_c} \tau_n v_r dS = 2\pi\mu\omega \int_{r_b}^{r_k^1} r^2 p_n dr = M_T\omega, \quad (5.31)$$

ahol M_T a testek között átvihető nyomaték. A súrlódási teljesítmény-veszteség annál kisebb lesz, minél közelebb kerül a megoszló érintkezési nyomás eredője az r_b belső sugárhoz, így az optimalizálás a következő formában írható fel:

$$\min_{L_4} \left\{ \frac{D}{\mu\omega} \left| \begin{array}{l} p_n = p_n(s, L_4) \geq 0, d = d(p_n, \Delta h) = 0, \\ \chi = V(s, L_1, L_2 \text{ rögzített}, L_3(L_4), L_4) p_{\max} - p_n(s, L_4) = 0 \\ \min \Delta h = 0 \quad \mathbf{x} \in \Omega_c, F = F(L_4, p_{\max} \text{ rögzített}) = 0 \end{array} \right. \right\}, \quad (5.32)$$

ahol az L_4 , a Δh és a p_n ismeretlen paraméterek, míg $p_{\max}$ az előírt maximális érték.

P9: Ennél az optimalizációnál tekintettel vagyunk az anyagra megengedett σ_U maximális redukált feszültségre is, miközben keressük L_4 minimumát, annak érdekében

hogy a **P8**-ban felírt optimalizációnak megfelelően minimálisra csökkentjük a súrlódásból származó teljesítmény-veszteséget. Hasonlóan a **P7** megoldási módszeréhez, itt is két egymásba ágyazott iterációval tudjuk az optimális megoldást megkeresni. Matematikailag a következő feladatot kell vizsgálnunk:

$$\min_{L_4} \left\{ \frac{D}{\mu\omega} \left| \begin{array}{l} p_n = p_n(s, p_{\max}(L_4)) \geq 0, d = d(p_n, \Delta h) = 0, \\ \chi = \chi(s, p_n, L_4) = 0, \min \Delta h = 0 \quad \mathbf{x} \in \Omega_c \\ F = F(p_{\max}(L_4)) = 0; \sigma_{eq} \leq \sigma_U \quad \mathbf{x} \in V \end{array} \right. \right\}. \quad (5.33)$$

A feladat megoldásához – a 2. típusú-iterációs séma használatakor – a következő paraméter beállításokat használtuk

$$f = L_4, \quad f_0 = r_k^1 - r_b^1 = L, \quad \Delta f = -\frac{(r_k^1 - r_b^1)}{10}.$$

– *Tisztán kinematikai előírások*

A vegyes peremfeltételek mellett megfogalmazott feladatokat könnyen át tudjuk fogalmazni azokra az esetekre, amikor a függőleges $\tilde{p}$ terhelés helyett a bélyeg felső peremének w_0 eltolódása van megadva. Ekkor a **P7** és **P9** helyett az alábbi optimalizálási feladatok írhatók fel.

P10: Az átvihető nyomaték maximalizálásához:

$$\max_{L_1} \left\{ \frac{M_T}{\mu} \left| \begin{array}{l} p = p_n(s, p_{\max}(L_1)) \geq 0, d = d(p_n, \Delta h) = 0, \\ \min \Delta h = 0, \chi = \chi(s, p_n, L_1) = 0 \quad \mathbf{x} \in \Omega_c \\ w = -w_0 \quad \mathbf{x} \in S_u^1; \sigma_{eq} \leq \sigma_U \end{array} \right. \right\}. \quad (5.34)$$

P11: A súrlódási teljesítmény-veszteség minimalizálásához:

$$\min_{L_4} \left\{ \frac{D}{\mu\omega} \left| \begin{array}{l} p = p_n(s, p_{\max}(L_4)) \geq 0, d = d(p_n, \Delta h) = 0, \\ \min \Delta h = 0, \chi = \chi(s, p_n, L_4) = 0 \quad \mathbf{x} \in \Omega_c \\ w = -w_0 \quad \mathbf{x} \in S_u^1; \sigma_{eq} \leq \sigma_U \end{array} \right. \right\}. \quad (5.35)$$

Az előzőekben felállított optimalizációs feladatokat numerikus úton p -verziós végeselem módszer segítségével oldjuk meg. Erre néhány példa kapcsán a 5.4.1. részben láthatunk eredményeket.

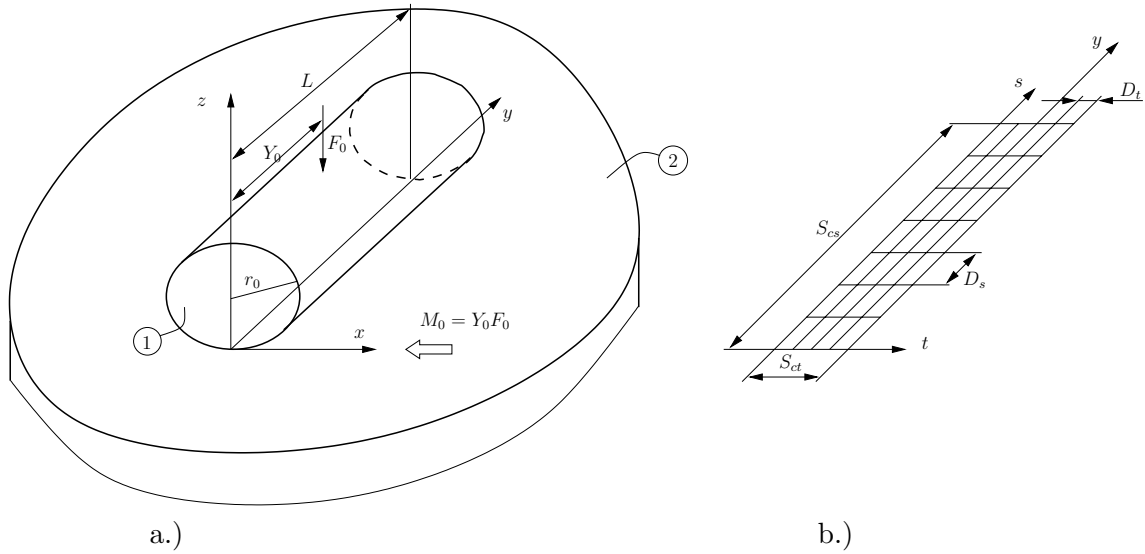
5.3.2. Görgő alakoptimalizálása

Görgőszerű gépelemeket – mint például henger-, vagy kúpgörgőket a csapágyakban – számtalan gépszerkezetben használnak. A gördülő elemek élettartamát nagy mértékben növeli, ha a bennük ébredő feszültségértékeket minél alacsonyabb, kis változást mutató értéken tudjuk tartani, a teljes gördülő elem mentén. Elkerülve így, az egyébként szinguláris helyet jelentő, hengervégeken adódó rendkívül magas feszültségeket.

Számtalan publikáció foglalkozott már a gördülő testek végein szükséges lekerekítésekkel [45, 58, 21, 11]. Azonban az itt felsorolt cikkek mindegyike előre rögzített lekerekítési sugárral dolgozik, és eredményként azt adják, hogy a kialakuló feszültségállapot – mely az érintkezési nyomásból származik – nem sima. A [41] cikk megvizsgálta a gördülő testek optimalizálását, lényegében az (5.1)-(5.9) összefüggések alapján, azonban a vezérlő függvény f_2, f_3 paramétereit nem használta fel, hanem egységnyinek feltételezte.

A görgőszerű elem merevtestszerű elmozdulással és elfordulással is rendelkezik, illetve feltételezzük azt is, hogy tiszta, súrlódásmentes érintkezésről van szó. Az érintkezésben

résztvevő felső test tehát egy henger, mely a felső test palástján megoszló terheléssel rendelkezik. Ebből származtatható az eredő F_0 -val jelölt – az 5.3. ábrán vázolt – erő, amely a henger palástján hat. Ezen erőből egy redukált vektorkettőst számíthatunk a koordináta-rendszer kezdőpontjában F_0 -val, illetve M_0 -val jelölve.



5.3. ábra: a.) Hengerszerű test és rugalmas féltér érintkezése geometria és terhelés, b.) Feltételezett érintkezési tartomány jellemzői

Az 5.3. ábra hengeres, lineárisan rugalmas test és féltér érintkezésének geometriai és erőtanai jellemzőit szemlélteti, valamint leolvashatjuk a diszkretizálásnál használt paraméterek értelmezését is. A rugalmas féltér $z = 0$ felületén található a kiinduláskor feltételezett téglalap alakú érintkezési tartomány – mérete, ahogy az 5.3. ábrán látható, $S_{ct} \times S_{cs}$ –, mely további $D_t \times D_s$ területű téglalapokra van bontva.

A hengerre vonatkozó $\mathbf{H}$ hatásmátrix felépítéséhez ezen kis téglalapokra működtetünk egységnyi nagyságú normál, vagy x irányú érintő irányú terhelést, és a 3.3 részben elmondottakat használjuk fel. A henger végein adódó nyírófeszültségek kiküszöbölése érdekében a már korábban bemutatott tükrözési technikát használjuk fel.

Két különböző irányban vizsgáltuk meg ezen típusú érintkezési optimalizálási feladatokat [42]:

1. A görgő alakoptimalizálását oly módon hajtjuk végre, hogy a hengerre működő megoszló terhelés nem szimmetrikus, azaz az F_0 eredő erő nem esik a görgő közepére

$$Y_0 < \frac{S_{cs}}{2}. \quad (5.36)$$

Azonban feltételezzük a súrlódásmentes állapotot, $\mu = \mu_0 = 0$.

Ez azt jelenti, hogy az optimalizált alakot úgy kell létrehozni, hogy az ekkor kialakuló érintkezési nyomás teljesítse a következő egyenletet:

$$Y_0 \int_{\Omega_p} p_n dS = \int_{\Omega_p} y p_n dS.$$

Képezve ezen két oldal különbségét azt kapjuk, hogy az

$$M_* = Y_0 \int_{\Omega_p} p_n dS - \int_{\Omega_p} y p_n dS \quad (5.37)$$

nyomaték minimalizálásával érhetjük el a kitűzött célt. Két lehetséges algoritmust vizsgáltunk:

- Először az (5.9) vezérlő függvényben szereplő paraméterek értékét $f_2 = f_3 = 1$ -re választjuk, és az így kialakuló érintkezési tartomány nem ér végig a henger teljes palástján.
 - Másodszor az a célunk, hogy a gördülő elem teljes hossza mentén biztosítsuk az érintkezést, ehhez azonban $f_2 = 1$ és $f_3 < 1$ paraméterbeállítás szükséges.
2. A gördülés pontos vizsgálata érdekében a nyírófeszültségeket is tekintetbe vesszük az optimalizálás elvégzésekor, vagyis $\mu \neq 0$, illetve $\mu_0 \neq 0$. Azonban ekkor már azzal a feltételezéssel élünk, hogy a gördülő henger szimmetrikus terhelésű, azaz az eredő F_0 erő pontosan a henger palástjának közepére esik.

Az optimalizált érintkezési nyomást az (5.6) vezérlő függvény L_i ($i = 1, 2, 3, 4$) paraméterértékekkel állítjuk elő. A gördülési érintkezési feladat megoldásakor a KALKER által – FORTRAN nyelven – elkészített programot fejlesztettük tovább, felhasználva a KOMBI eljárást, mely az F_0 előírt terhelést és elmozdulást szolgáltatja x irányban. A programmal kapcsolatos elméleti háttér a [31, 32] munkák tartalmazzák.

A görgő alakú testek alakoptimalizálására az 5.4.2. és 5.4.3 részekben mutatunk be numerikus számítási eredményeket.

5.4. Numerikusan kiszámított optimalizációs feladatok

5.4.1. Bélyegfeladatok

P4-ben definiált optimalizáció

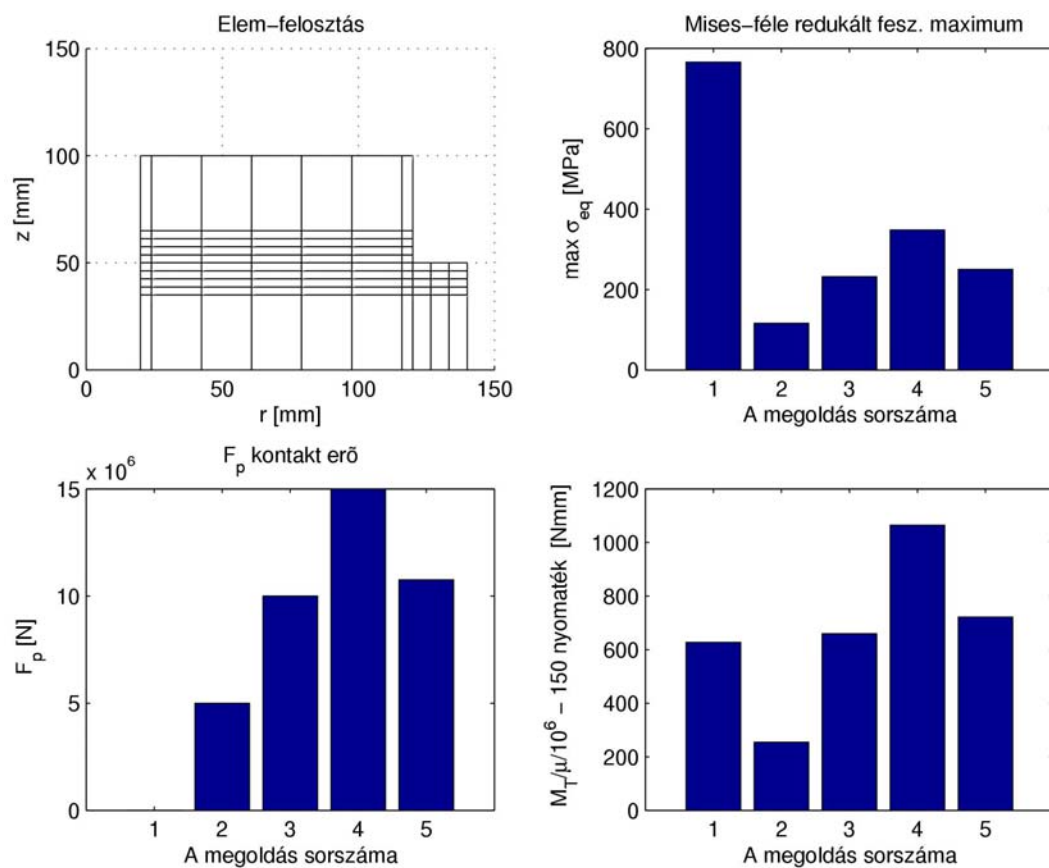
Az előzőekben megadott geometriai és anyagjellemzőkkel tekintsünk először a **P4**-ben felírt optimalizációra egy numerikus számpéldát. Az 1-es jelű test felső peremén $w_0 = 0.1 \text{ mm}$ a $-z$ irányban előírt elmozdulásmező. Az (5.6)-ban felírt vezérlő függvény paramétereit a következő értékekre választottuk:

$$L_1 = 0 \text{ mm}, \quad L_2 = 4 \text{ mm}, \quad L_3 = 96 \text{ mm}, \quad L_4 = 100 \text{ mm}.$$

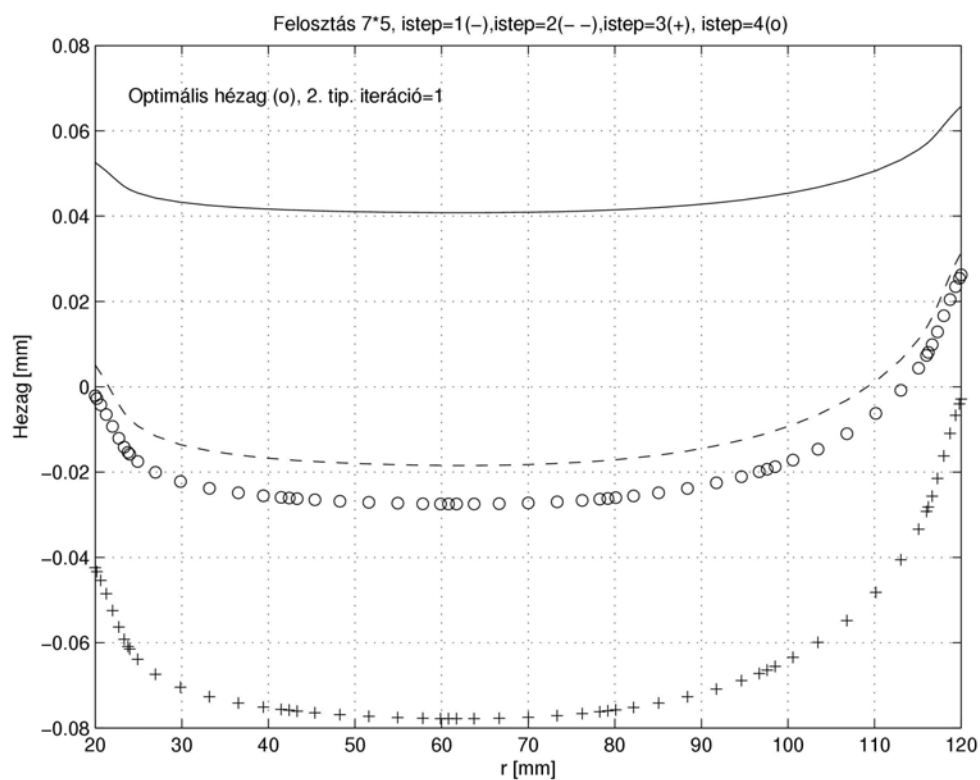
Az alakoptimalizálást tehát úgy hajtuk végre, hogy figyelembe kell vennünk az (5.10) egyenletet, melyhez a 2. típusú-iterációt alkalmazzuk. Ehhez rögzítjük az (5.11)-ben szereplő paramétert $\Delta f = 5000 \text{ N}$ értékre.

Az optimalizációs lépéseket a második megoldástól számítjuk. Az (5.10) pótlólagos feltétel az első optimalizációs lépésben – a megoldások sorszámát tekintve a második megoldáskor (lásd az 5.4. ábrát) –, teljesül, azonban $i_{\text{step}} = 4$ -nél már a program által számított σ_{eq} redukált feszültség maximuma meghaladja az anyagra megengedett $\sigma_U = 250 \text{ MPa}$ értéket. Így a 2. típusú-iterációs eljárás szerint határozzuk meg az optimális eredményt. Az 5.4. ábra szemlélteti a bal felső sarokban az érintkező testeknél felvett végeselemes hálót. A numerikus számítási tapasztalatok azt mutatták, hogy a sima, oszcillációmentes feszültségeloszlások meghatározása csak az érintkezési tartomány határán felvett, kis méretű elemekkel lehetséges.

A 5.4. ábrán láthatjuk még az F_p érintkezési eredő erő változását, a $\max \sigma_{eq}$ értéket, valamint az M_T/μ optimalizált mennyiségből származtatott mérőszámot a különböző iterációs lépésekhez tartozóan. Az optimális megoldást a 4. optimalizációs lépésben számította ki a program. Az 5.4. ábrán jelzett első oszlopok az eredeti érintkezési feladat kezdeti hézag nélküli megoldásához tartoznak, tehát ekkor még nincs optimalizálás.



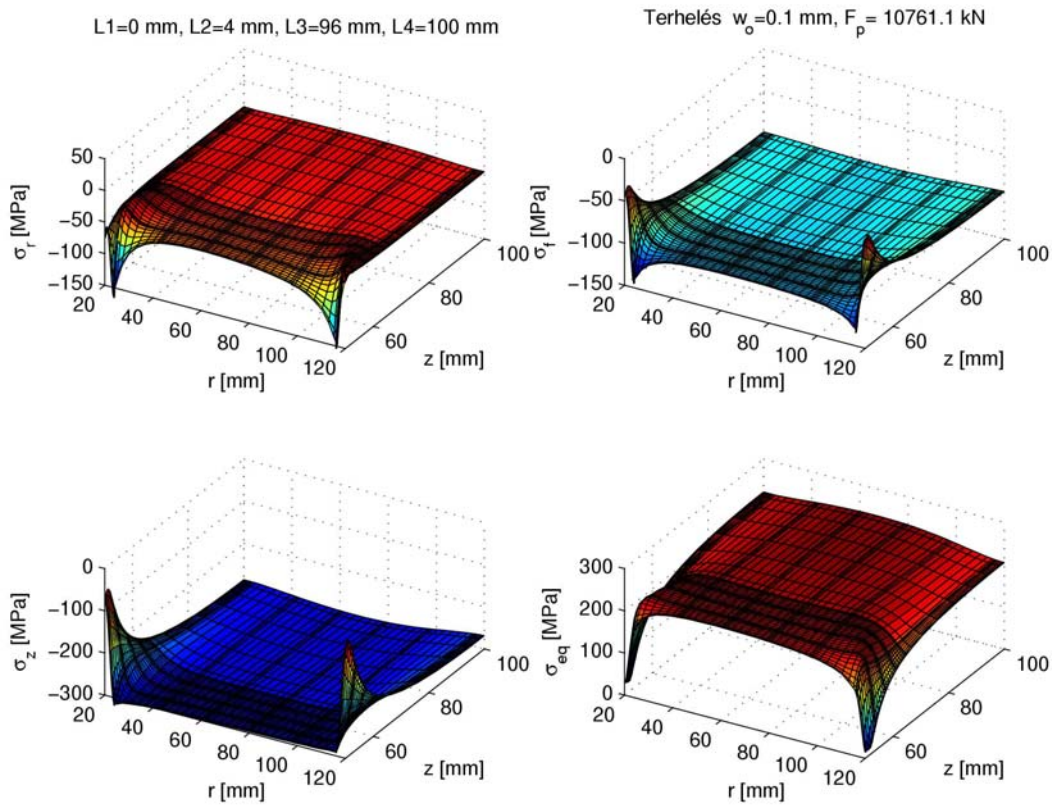
5.4. ábra: A testek végelemekes felosztása és különböző számított jellemzők a **P4**-es optimalizációra



5.5. ábra: A testek közötti kezdeti távolság a **P4**-es optimalizációra

Az 5.5. ábra a felső testre vonatkozó alakokat mutatja be, az egymást követő iterációs lépésekben ($i_{\text{step}} = \text{istep}$). Ezek az alakok a maximalizálni kívánt F_p erő különböző értékeihez tartoznak $F_p = 5000\text{ N}$, 10000 N , 15000 N és a 10761.1 N (optimális megoldás). Az ábrából leolvasható optimális alak – melyet „o” jelez – elérése érdekében az eredeti bélyeg méretét a vázolt módon kell megnövelni, hogy az érintkezési nyomásmegoszlás a vezérlő függvény szerint alakuljon, figyelembe véve az anyagra megengedett σ_U redukált feszültségi korlátot.

A megoldáshoz tartozó $\sigma_\varphi = \sigma_r$, $\sigma_z = \sigma_z$ és $\sigma_{eq} = \sigma_{eq}$ feszültségeloszlásokat az $r = r$ és $z = z$ koordináták függvényében szemlélteti az 5.6. ábra. Az érintkezési tartomány határán felvett kis elemek miatt a feszültségmezők eloszlásában nem tapasztalunk oszcillációt.



5.6. ábra: A felső testre meghatározott feszültségeloszlások a **P4**-es optimalizációra

P7-ben definiált optimalizáció

A következő optimalizációs feladat, melyet numerikusan megvizsgálunk, a **P7**-ben definiált alakoptimalizálás. Itt is az előre rögzített geometriai és anyagjellemzőket használjuk fel, a vezérlő függvény paramétereit pedig a **P4**-nél felírt értékekkel vesszük számításba.

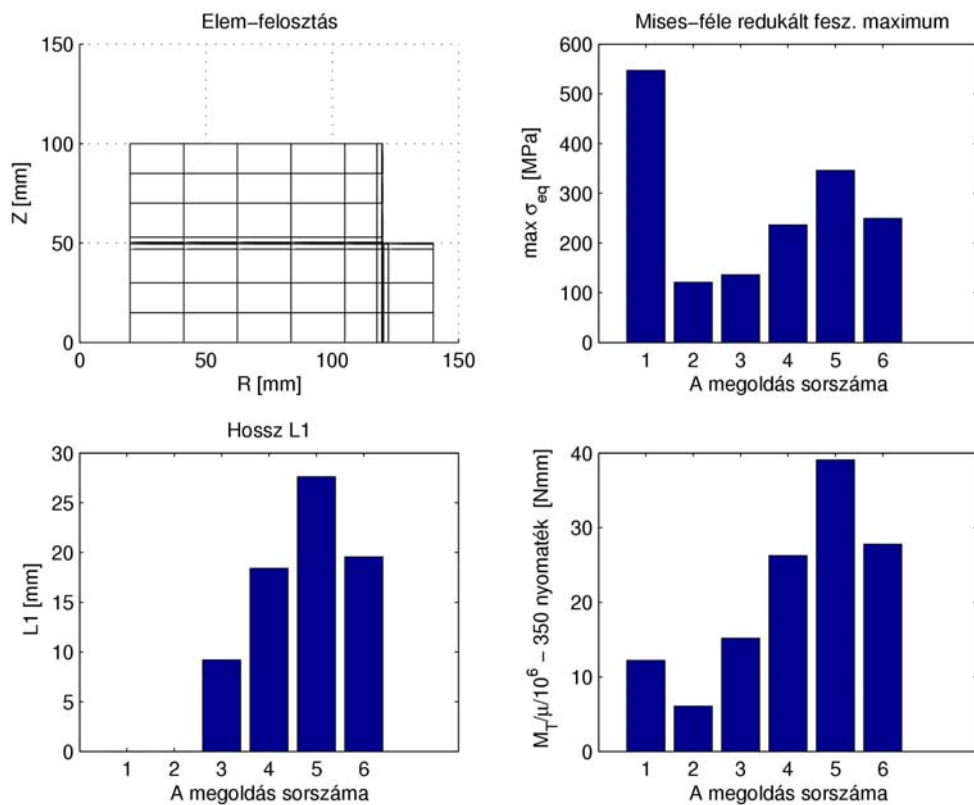
Célunk itt az átvihető M_T nyomaték maximalizálása, melyhez az (5.11)-ben szereplő Δf értéke a vezérlő függvény L_1 paraméterét változtatja a kíván mértékben. Tehát

$$\Delta f = \Delta L_1 = \frac{L_3 - L_2}{10} = 9.2\text{ mm}.$$

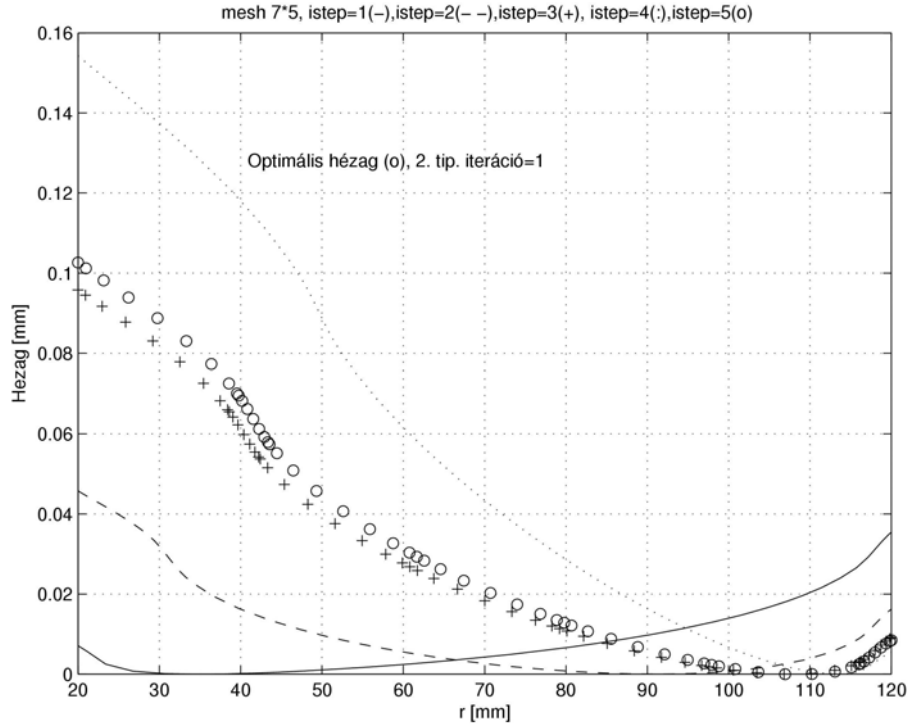
Az 1-es jelű test felső peremén az előírt felületi terhelés $\tilde{p} = 100 \text{ MPa}$. Az optimalizálási feladat megoldása után a következő eredményeket kaptuk:

$$L_1^{\text{opt}} = 19.42 \text{ mm}, \quad L_2 = L_1^{\text{opt}} + 4, \quad \frac{M_T}{\mu} = 377.68 \cdot 10^6 \text{ Nmm}.$$

Az 5.7. ábra a testek optimalizáció előtti végeleemes felosztását és a megoldási folyamat során számított mennyiségeket illusztrálja grafikus formában. A jobb felső részében a σ_{eq} redukált feszültség maximum értékét látjuk, míg a bal alsó részben a vezérlő L_1 távolság változtatását követhetjük nyomon. A jobb alsó oszlopdiagram az optimalizált $\frac{M_T}{\mu}$ nyomatókból származtatott mérőszámot jeleníti meg.



5.7. ábra: Végeleemes felosztás és különböző számított jellemzők a **P7**-es optimalizációra

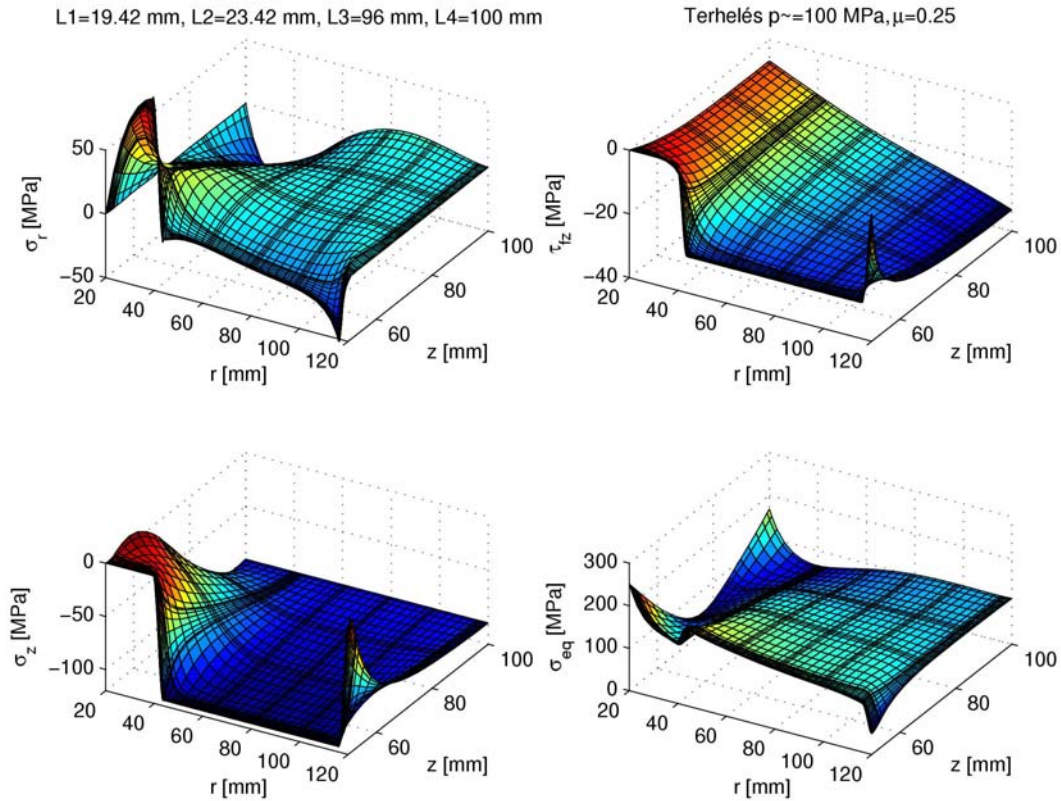


5.8. ábra: A testek közötti kezdeti távolság változása a **P7**-es optimalizációra

A megoldást a program a *2. típusú*-iteráció 1. lépésében megtalálta. Az 5.7. ábrán jelzett első lépésben az érintkezési feladat optimalizálás nélküli megoldása történik, majd a következő $i_{\text{step}} = 1$ lépésben az eredeti $L_1 = 0$ értékkel keressük az optimális alakot és ezt követően az *1. típusú*-iterációval dolgozunk, amíg az (5.10)-beli korlát igaz. Mivel az 5. lépésében a redukált feszültség maximuma nagyobb, mint a σ_U anyagra megengedett legnagyobb feszültség, így itt indul a *2. típusú* iteráció, mely egy lépés alatt előállítja – az (5.10) feltételt is kielégítő – optimális alakot. Az érintkezési feladat ebben az esetben összeségében 6-szor került megoldásra.

Az alakoptimalizálás során a testek közötti kezdeti távolságot, mely valójában a felső test alakját jelenti a gyakorlatban, folyamatosan változtatjuk. Ezt az alakmódosítást szemlélteti az 5.8. ábra. Az optimális megoldást az ábrán jelzett $i_{\text{step}} = 5$ lépéshez tartozó kis körök mutatják.

Az $i_{\text{step}} = 5$ -ödik lépésben a feladat megoldásához tartozó $\sigma_r = \sigma_r$, $\sigma_z = \sigma_z$, $\tau_{\varphi z} = \tau_{\varphi z}$, $\tau_{rz} = \mu p_n = -\mu \sigma_z$ és $\sigma_{eq} = \sigma_{eq}$ feszültségeloszlásokat is kiszámítottuk, melyet az 5.9. ábra szemléltet az $r = r$ és $z = z$ hengerkoordináták függvényében. Látható, hogy a kapott feszültségképek oszcillációmentesek, melyek az érintkezés-elválási határ közelében felvett kis méretű elemekkel kaphatók csak meg.



5.9. ábra: A felső testre meghatározott feszültségeloszlások a **P7**-es optimalizációra

5.1. táblázat: Különböző terhelések esetén számított megoldások a **P7** feladatra

$\tilde{p} \text{ [MPa]}$	$L_1 \text{ [mm]}$	$\frac{M_T}{\mu} \cdot 10^{-6} \text{ [Nmm]}$	$p_{\max} \text{ [MPa]}$	$\max \sigma_{eq} \text{ [MPa]}$
40	48.932	169.646	62.968	249.98
60	33.454	238.869	77.468	252.69
80	24.569	307.771	95.210	248.12
100	19.418	377.677	114.480	249.35

A **P7**-ben felállított optimalizációt további $\tilde{p}$ terhelési esetekre vonatkozóan is kiszámítottuk, ahogy az 5.1. táblázat mutatja. Összességében megállapíthatjuk, hogy bár a terhelés nagyságát lineáris módon növeltük, a különböző terhelésekhez tartozó M_T nyomaték értékek nem lineáris módon változtak.

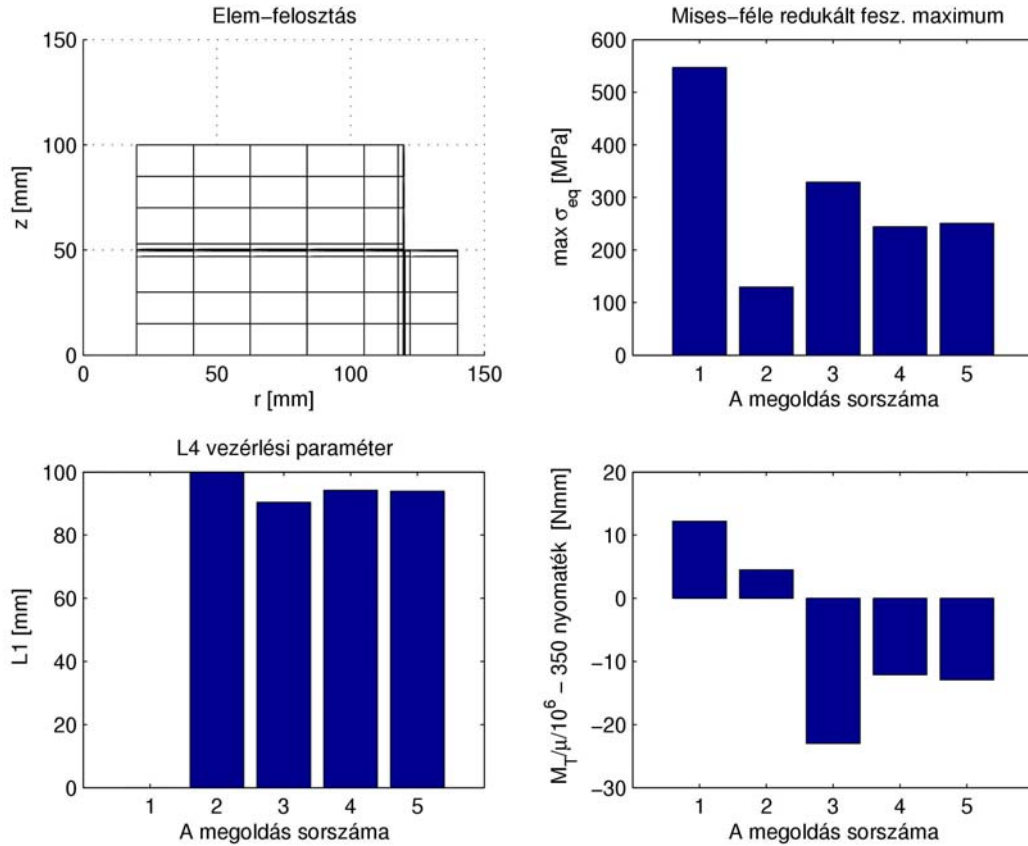
P9-ben definiált optimalizáció

A bélyegfeladatok közül végül tekintsük a **P9**-ben definiált optimalizálást, amikor a súrlódásból származó D teljesítmény-veszteséget minimalizáljuk. Ez azt jelenti, hogy a vezérlő függvény L_4 paraméterértékét kell minimalizálni a kívánt feltételek betartásával.

Jelen esetben is a korábbiakban felírt geometriai és anyagjellemzőket használjuk fel. Az 1-es test felső peremén $\tilde{p} = 100 \text{ MPa}$ terhelést alkalmazunk, az iterációnál pedig a következő paramétereket állítjuk be:

$$f = L_4, \quad f_0 = r_k^1 - r_b^1 = 100 \text{ mm}, \quad \Delta f = -\frac{r_k^1 - r_b^1}{10} = 10 \text{ mm}.$$

Az optimalizálási folyamat végrehajtása a **P7**-nél elmondottakhoz hasonlóan történik. Az 5.10. ábra az alkalmazott végeleemes felosztást és a megoldási folyamat során kiszámított jellemzőket mutatja be.



5.10. ábra: Végeleemes felosztás és különböző számított jellemzők a **P9**-es optimalizációra

Az optimalizáció során az L_4 vezérlő paraméter minimalizálását végezzük el. Az 5.10. ábra bal alsó oszlopdiagrammja mutatja, hogy az érintkezési feladat megoldása után az L_4 paramétert beállítjuk a legnagyobb értékre és azt az 1. típusú-iterációval változtatjuk az optimalizáció során. Az $i_{\text{step}} = 2$. lépésben – mely valójában az érintkezési feladat 3. megoldását jelenti, ahogy ezt az 5.10. ábra jelzi –, az (5.10) feltétel nem teljesül, így ekkor indul a 2. típusú-iteráció, mely két lépésben megadja az optimális eredményt.

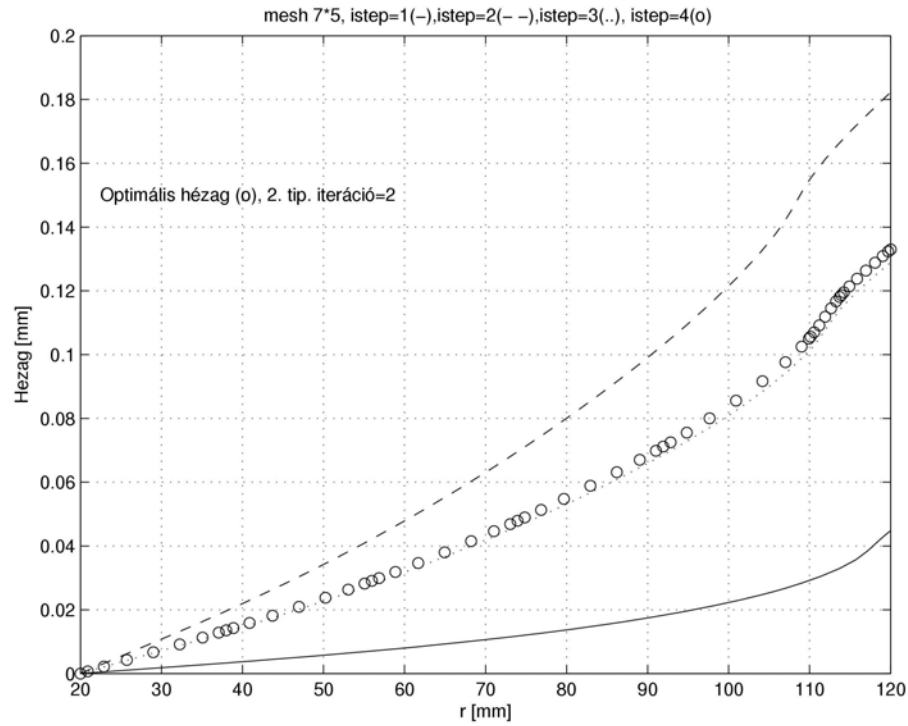
A megoldáshoz tartozó vezérlő paraméterek, és az optimalizált mennyiség a következők:

$$L_4 = 93.90 \text{ mm}, \quad L_1 = L_2 = 0 \text{ mm}, \quad L_3 = L_4 - 4, \quad \frac{D}{\omega\mu} = 337.09 \cdot 10^6 \text{ Nmm}.$$

Minden iterációs lépésben újabb alakot határozott meg az általunk írt program, ezeket az 5.11. ábra jeleníti meg. Ennél a feladatnál a program a 2. típusú-iterációt kétszer hajtotta végre az alakoptimalizálás érdekében, ahogy ezt az 5.11. ábra bemutatja.

Az 5.12. ábra az optimális alakkal kiszámított elmozdulásmezőből származtatott $\sigma_r = \sigma_r$, $\sigma_z = \sigma_z$, $\tau_{\varphi z} = \tau_{\varphi z} = \mu p_n = -\mu\sigma_z$ és $\sigma_{eq} = \sigma_{eq}$ feszültség eloszlásokat mutatja az $r = r$ és $z = z$ koordináták függvényében.

A feszültségértékek ilyen sima, oszcillációmentes meghatározásához az eredeti végelelem hálózat – mely nagy méretű p -verziós elemeket használ – nem elegendő. Az érintkezési és réstartomány határán elemsűrítést kell felvenni a pontos megoldás kiszámításának érdekében. Az elemhálózat módosítását és sűrítését a kidolgozott program futási időben „adaptív” módon végzi.



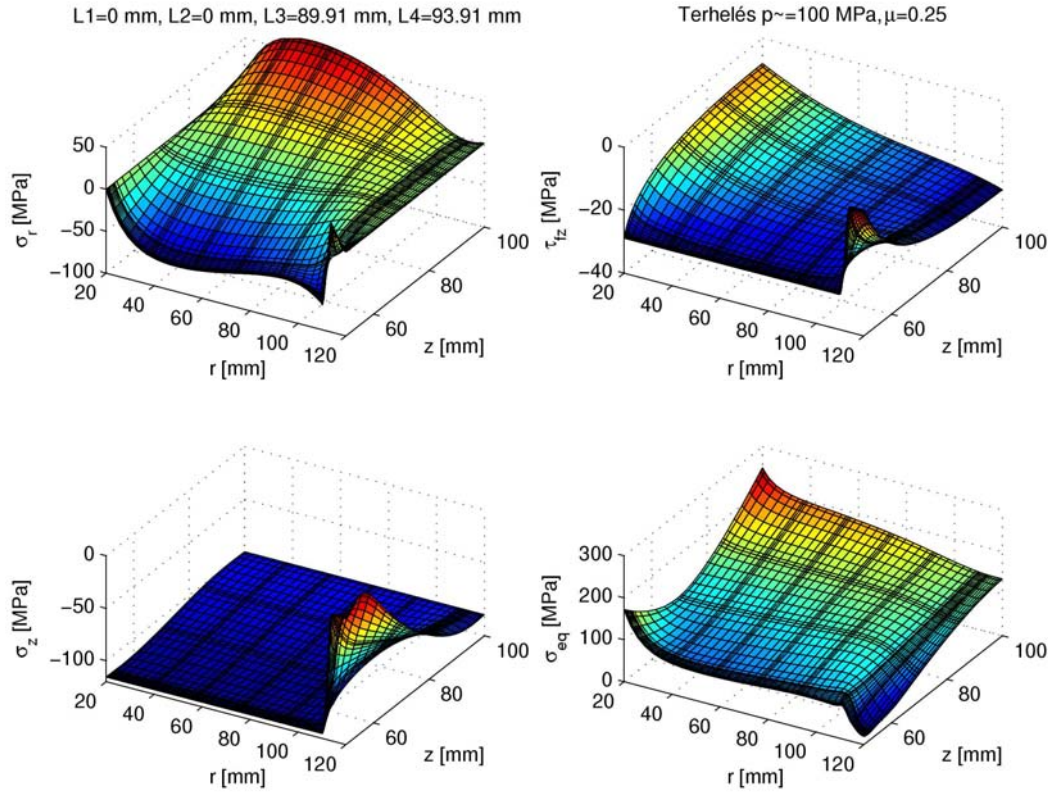
5.11. ábra: A testek közötti kezdeti távolság változása a **P9**-es optimalizációra

5.2. táblázat: Különböző terhelések esetén számított megoldások a **P9** feladatra

$\tilde{p}$ [MPa]	L_4 [mm]	$\frac{D}{\mu\omega} \cdot 10^{-6}$ [Nmm]	$p_{\max}$ [MPa]	$\max \sigma_{eq}$ [MPa]
40	78.15	116.839	63.29	249.18
60	86.81	190.064	79.34	247.47
80	91.27	263.595	97.06	247.64
100	93.90	337.091	115.45	250.46

A **P9** optimalizációt végrehajtottuk különböző $\tilde{p}$ terhelések mellett, melyek eredményeit az 5.2. táblázat foglalja össze. A lineárisan növekvő terhelés nemlineáris változást okoz az optimális alakra vonatkozó D terhelési teljesítmény-vesztésben.

Az 5.2. táblázatban nem szereplő $\tilde{p} = 50$ MPa terhelés mellett is megvizsgáltuk ezen **P9**-es optimalizációt annak érdekében, hogy összehasonlítsuk az iterációs feladatmegoldásokat.



5.12. ábra: Feszültségmező változása a **P9**-es optimalizációra

A **P10** és **P11** optimalizációs feladatok numerikus megoldását $w_0 = -0.11 \text{ mm}$ kinematikai terhelés mellett határoztuk meg és a hozzájuk tartozó eredményképeket a C. függelékben helyeztük el, lásd a C.1. – C.4. ábrákat.

5.4.2. Nem középen terhelt görgő

A vizsgált feladatnál azt a célt tűztük ki, hogy az optimalizálás nélküli görgő végén tapasztalható nagy feszültségcsúcsot csökkentjük az (5.6) vezérlő függvény felhasználásával, a bélyegfeladatoknál ismertetett módszer segítségével.

A vizsgált görgő sugara $r_0 = 60 \text{ mm}$, hossza $L = 35 \text{ mm}$. Az $S_c = S_{ct} \times S_{cs}$ feltételezett érintkezési tartomány $0.6 \cdot 35 \text{ mm}$ méretű és $10 \times 40 \text{ db}$ részre van felbontva. A görgőre működő terhelést a következő adatok jellemzik, lásd az 5.3. ábrán feltüntetett mennyiségeket:

$$F_0 = 2500 \text{ N}, \quad M_0 = 33000 \text{ Nmm}, \quad Y_0 = 13.2 \text{ mm}.$$

Az érintkező testekre vonatkozó anyagjellemzők rendre a rugalmassági modulus és a POISSON-szám

$$E = 2.1 \cdot 10^5 \text{ MPa}, \quad \nu = 0.3.$$

Az (5.6) vezérlő függvény paramétereit az

$$L_1 = 0 \text{ mm}, \quad L_2 = 4 \text{ mm}, \quad L_4 = L, \quad L_3 = L_4 - 4$$

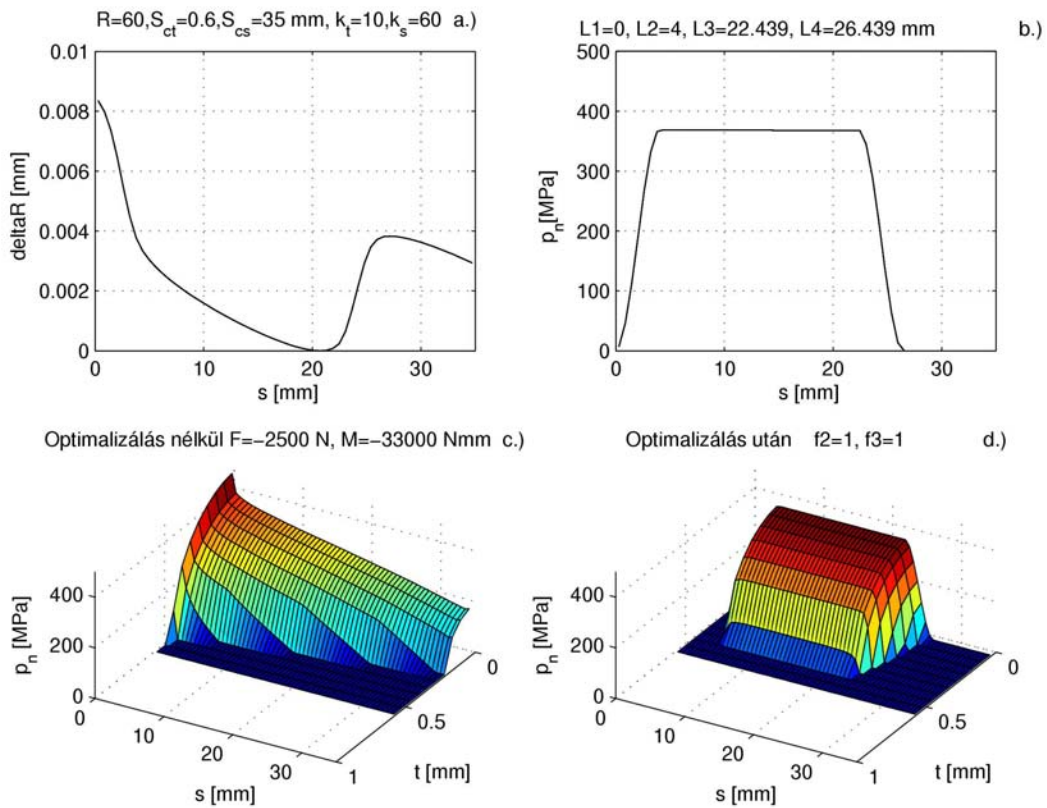
értékekre választottuk meg. Az S_c feltételezett érintkezési tartományt $10 \cdot 60$ téglalapra bontottuk fel a hatásmátrixokkal végzett megoldási folyamat érdekében.

A optimalizálást kétféle módon végeztük el. Az első esetben a vezérlő függvény $f_2 = f_3 = 1$ értéke mellett minimalizáljuk az (5.37) által definiált nyomatékot oly módon, hogy a kialakuló érintkezési tartomány méretét az L_4 paraméter változtatásával állítjuk be.

Ebben az esetben a következő eredményeket kapjuk, a fenti kiindulási adatokat felhasználva:

$$M^* = -6.65 \text{ Nm}, \quad L_4 = 26.44 \text{ mm}, \quad p_{\max} = 368.9 \text{ MPa}.$$

A kiszámított eredményekről grafikus formában az 5.13. ábra számol be. Az ábra bal alsó részében – a c.) részában – az optimalizálás nélküli p_n érintkezési nyomás változását látjuk az érintkezési felületen felvett s és t koordináták függvényében (lásd az 5.3. ábrát). Ez esetben a feltételezett téglalap alakú érintkezési tartomány megváltozott. A b.) és d.) részában feltüntetett nyomásmegoszlás eléréséhez az a.) részában bemutatott optimalizált kezdeti alakkal kell a gördülőelemnek rendelkezni.



5.13. ábra: Görgő alakoptimalizálása állandó p_n nyomás mellett

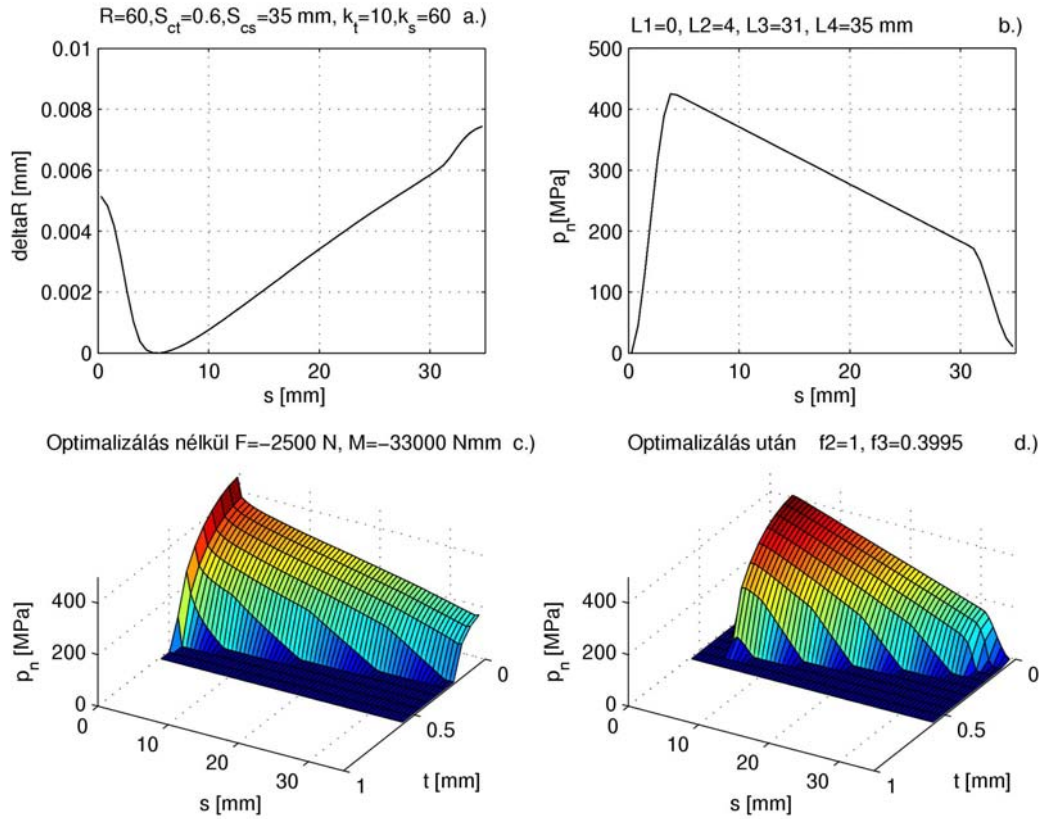
A második esetben az alakoptimalizálást oly módon hajtjuk végre, hogy a görgő L hossza mentén lineárisan változó érintkezési nyomásmegoszlást hozunk létre az (5.6)-ban használt $f_2 = 1$ és $f_3 < 1$ paraméterek által. Ekkor az $L_4 = L$ paraméterérték változtatása nélkül, csak az f_3 csökkentésével kívánjuk az alakoptimalizálást elvégezni oly módon, hogy az (5.37)-ben felírt M^* nyomatékot minimalizáljuk.

A numerikus számítás a következő eredményeket szolgáltatta:

$$M^* = 47.58 \text{ Nm}, \quad f_3 = 0.3995, \quad p_{\max} = 425 \text{ MPa}.$$

Ha figyelembe vesszük az eredetileg kitűzött $\min p_{\max}$ célt, akkor a kvázi állandó p_n nyomás mellett kiszámított eredmények jelentik a két vizsgált eset közül a jobb megoldást, tehát az optimális alakot.

Az 5.14. ábra az 5.13. ábrához hasonlóan mutatja be a kiszámított optimális görgőalakot, és az ehhez kapcsolódó p_n érintkezési nyomásmegoszlást.



5.14. ábra: Görgő alakoptimalizálása változó p_n nyomás mellett

5.4.3. Középen terhelt görgő

Ebben a számpéldában középen terhelt görgő és rugalmas féltér érintkezését tekintjük oly módon, hogy figyelembe vesszük a súrlódásból származó hatásokat is. A megoldáshoz felhasználtuk, hogy a görgő sugara $r_0 = 60 \text{ mm}$, hossza $L = 35 \text{ mm}$, – tekintve az 5.3. ábra jelöléseit – továbbá a görgőre középen működő terhelés adatai:

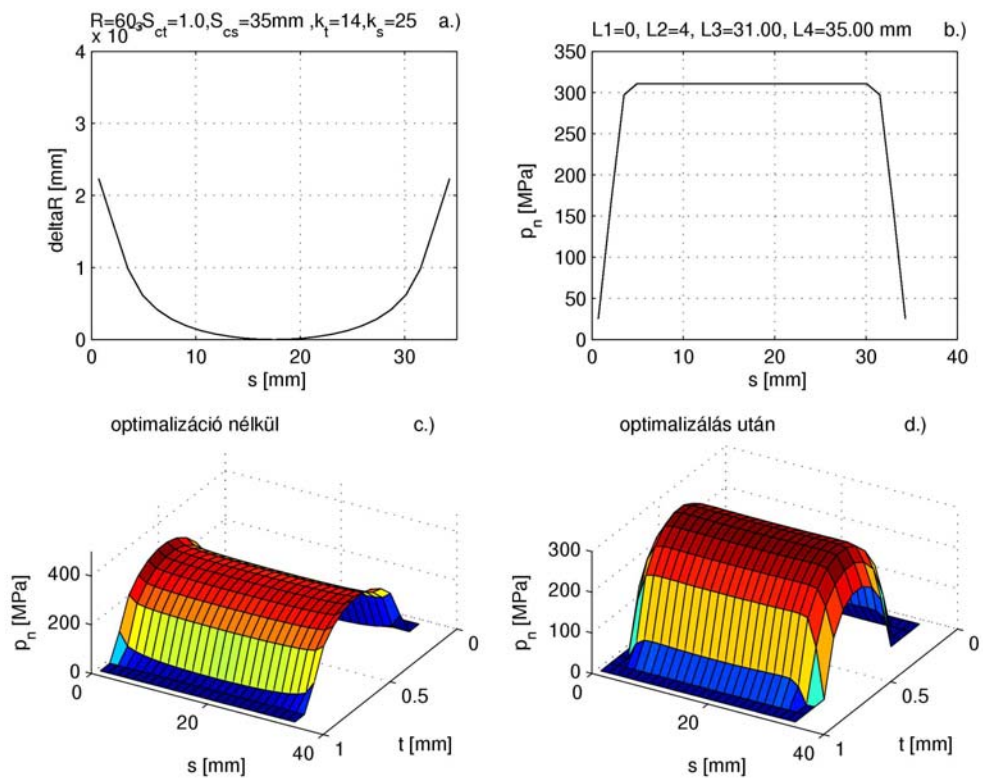
$$F_0 = 5000 \text{ N}, \quad M_0 = 87500 \text{ N}, \quad Y_0 = 17.5 \text{ mm}.$$

A vezérlő függvény paraméterei

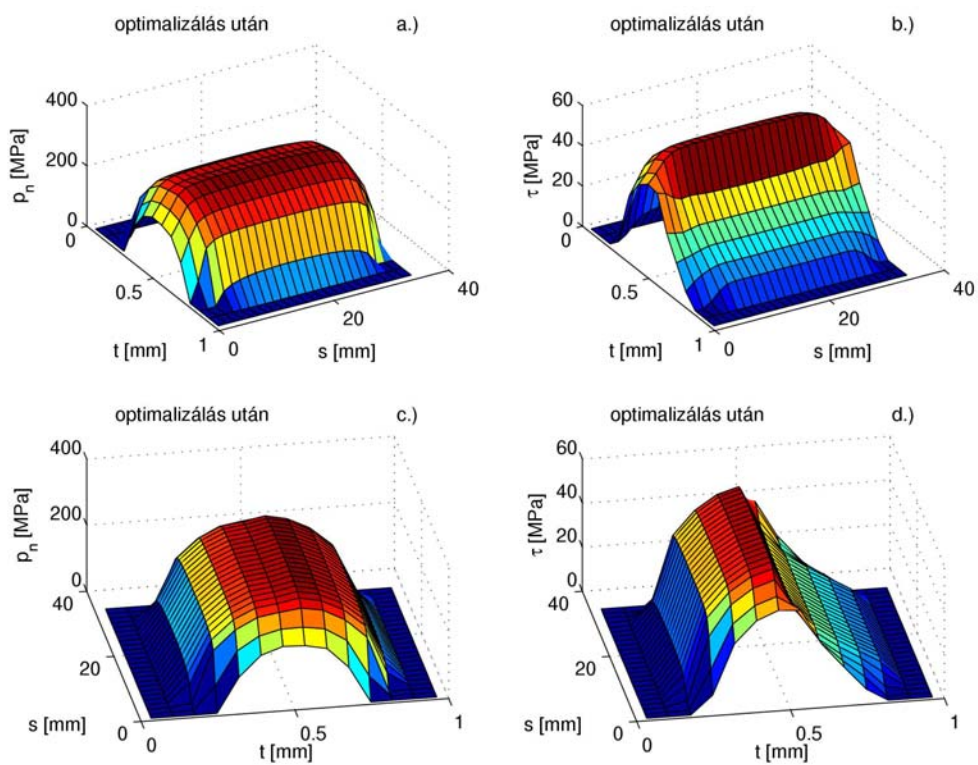
$$L_1 = 0 \text{ mm}, \quad L_2 = 4 \text{ mm}, \quad L_4 = L, \quad L_3 = L_4 - 4, \quad f_2 = f_3 = 1.$$

A feltételezett érintkezési tartomány szélessége $S_{ct} = 1 \text{ mm}$, hossza $S_{cs} = 35 \text{ mm}$, melyet 14×25 téglalapra bontunk fel a diszkretizálási folyamat során. A tapadási és a csúszási súrlódási tényező értéke egyaránt $\mu = \mu_0 = 0.2$. A görgő középvonalának elmozdulása x irányban $u_x = 0.005 \text{ mm}$.

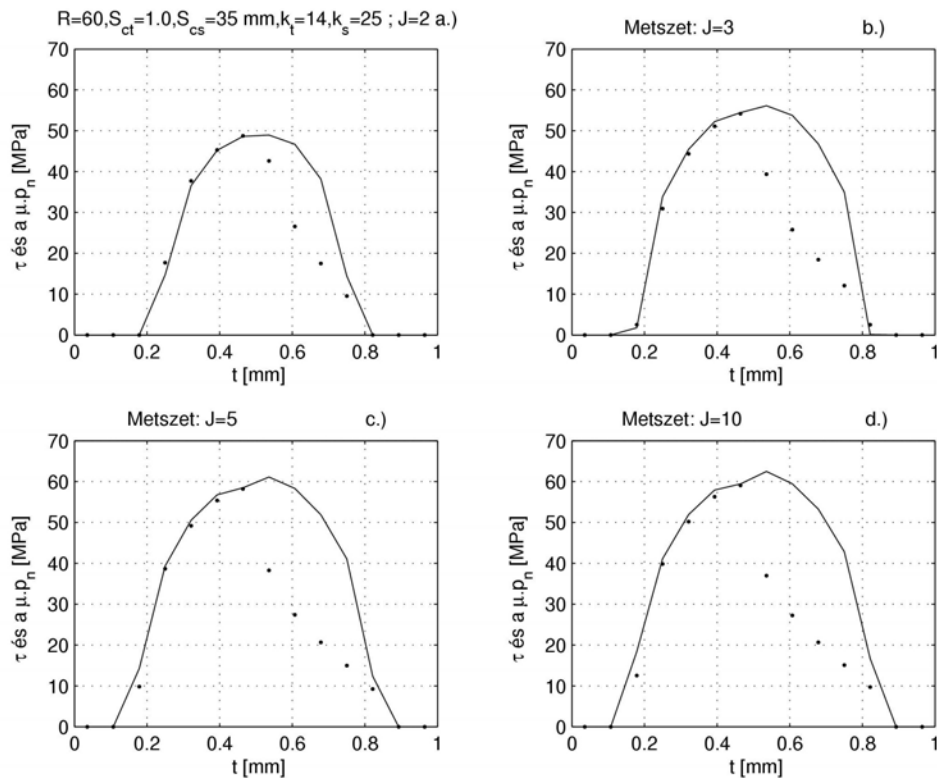
Az 5.15. ábra a középen terhelt, súrlódás mellett elvégzett alakoptimalizálás előtti és utáni p_n érintkezési nyomásmegoszlást szemlélteti. Ezen ábra a.) részlete az optimalizált görgő alakot szemlélteti.



5.15. ábra: Görgő alakoptimalizálása súrlódás mellett

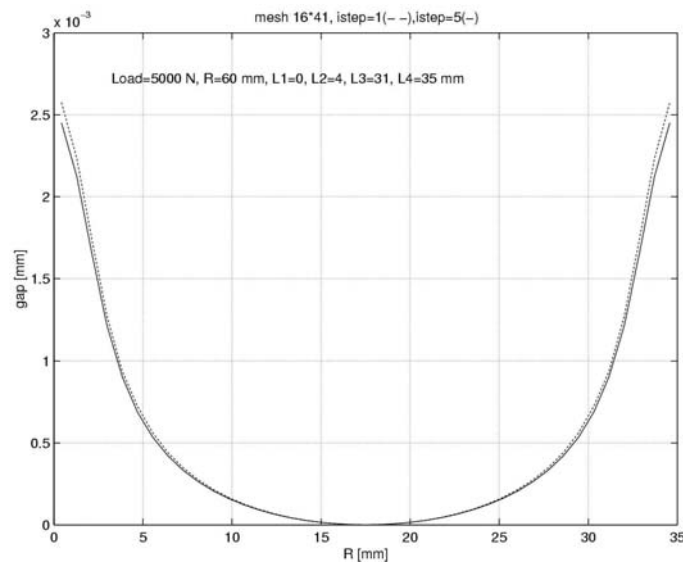


5.16. ábra: Érintkezési nyomás és a csúsztató feszültség



5.17. ábra: Csúszási és tapadási tartományok

Az 5.16. ábra a.) és c.) része az alakoptimalizálás utáni érintkezési nyomásmegoszlást mutatja be különböző nézetekből. A b.) és a d.) alrész pedig a csúsztató feszültséget szemlélteti a felületen definiált s és t koordináták függvényében (lásd az 5.3. ábra jelöléseit).



5.18. ábra: Optimális alak súrlódásos és súrlódás nélküli érintkezéskor

A csúszási és tapadási tartományok azonosítását segíti az 5.17. ábra, melyen különböző t koordinátájú helyeken vett metszeteket ábrázoltunk a csúsztató feszültség és a $\mu \cdot p_n$ függvényekből. Pontok jelzik a csúsztató feszültség számított értékeit, míg folyamatos vonallal ábrázoltuk a $\mu \cdot p_n$ eredményeket. A tapadási tartománynál a pontok a folytonos

függvény alatt vannak. A hengergörgő középpontja a gördülés folyamán t tengely irányú mozgást végez.

Az 5.18. ábra azt mutatja be, hogy a súrlódás nélküli számítás, melyet a pontozott vonal ábrázol, illetve a súrlódás hatását figyelembe vevő, folyamatos vonallal jelzett alakoptimalizálás eredményei mennyire hasonlóak. Megállapíthatjuk, hogy a gyakorlat szempontjából elhanyagolható a súrlódás hatása az ilyen jellegű feladatok vizsgálatakor.

6. fejezet

ÉRINTKEZÉS VIZSGÁLATA HÁROMDIMENZIÓBAN

Ebben a fejezetben az a célunk, hogy térbeli érintkezési feladatokat oldjunk meg numerikus úton, az A. függelékben összefoglalt p -verziós végeelem-módszer segítségével. Ezen technika fontos jellemzője, hogy a számítási eljárás kielégítő pontossága a polinomok p fokszámának változtatásával érhető el. Ekkor a végeelemek száma változatlan, de a p fokszám növelésével jelentősen növekszik az egyes elemekhez rendelt ismeretlen paraméterek száma, ezáltal növekszik a megoldandó feladat mérete és jelentős adminisztrációs feladatokat jelent programozástechnikai szempontból.

A végeelemektől elvárt tulajdonság, hogy az elemhatár tetszőleges görbe vonalra tudjon illeszkedni. Ezt a legegyszerűbb módon az elemhez rendelt él- és lapmenti paramétereken keresztül, az elemen működő hierarchikus alakfüggvények segítségével valósíthatjuk meg. Az elemhatár approximációját a legkisebb hibanégyzetek elve szerint végezzük el.

A kialakuló érintkezési tartomány alakjára nem teszünk megszorítást – csupán azt feltételezzük, hogy az érintkezési felület egyszeresen összefüggő –, így a 4. fejezetben ismertetett zárt paraméteres térgörbe interpolációt használjuk a kialakuló kontakthatár pontos leírására. Ez a leírási módszer azzal az egyértelmű előnnyel jár, hogy a vizsgálat tárgyát képező érintkezési és elválási határ sima, folytonos paraméteres térgörbe lesz, mely könnyen, néhány kontrollpont által módosítható annak érdekében, hogy a végeelemek pontosan az elválási határra illeszkedjenek.

A SZABÓ és BABUŠKA által bevezetett osztályozás [60] szerint három alapvető feladattípus különböztethető meg a végeelem-módszerben aszerint, hogy az $\mathbf{u}_{ex}$ tényleges megoldás hogyan alakul ki a vizsgált tartományon:

- A. A teljes elemen analitikus megoldást kapunk, függetlenül az elemfelosztás módjától.
- B. Véges számú pontot, vonalat, vagy felületet kivéve, az $\mathbf{u}_{ex}$ tényleges megoldás analitikus. Ebben az esetben a végeelemes felosztás oly módon történik, hogy a nem analitikus helyekre elemhatár, csomópont, illetve határoló él kerüljön.
- C. A végeelemes felosztást nem lehet úgy kialakítani, hogy a nem analitikus helyek elemhatárra essenek.

A felsorolt osztályozásból következik, hogy az eredeti nemlineáris érintkezési feladat egyértelműen a C típusba sorolható, mivel az érintkezési és elválási tartományok határa előre nem ismert, vagyis a számítás során a kezdetben létrehozott végeelemes felosztást folyamatosan módosítani kell annak érdekében, hogy B típusú feladatot kapjunk, mely nagyobb pontossággal oldható meg. A B-spline, illetve a NURBS térgörbe leírási módszerek ehhez biztosítanak jól használható eszközt.

A klasszikus rugalmasságtanból jól ismert módon lehetőségünk van arra, hogy két, tetszőleges térbeli görbe felülettel határolt test érintkezését vizsgáljunk bizonyos speciális esetekben [55]. Ekkor a felállított feladat oly módon kerül definiálásra, hogy az alakváltozás előtt egy pontban érintkező testeket olyan erővel terheljük meg, melyek hatásvonala

a testek érintkezési pontjaihoz tartozó közös felületi normális egyenesében hatnak és a testeket összenyomják. Az alakváltozás következtében a testek kezdeti, pontszerű érintkezése átalakul felületi érintkezéssé. A rugalmas alakváltozások elmélete alapján a felületek érintkezési pontjaiban a fő görbületi sugaraknak, az érintkező testek anyagjellemzőinek és a terheléseknek az ismeretében megállapíthatjuk [63]:

- az érintkezési felület alakját és jellemző méreteit az alakváltozás után,
- a kialakuló p_n érintkezési nyomás nagyságát,
- a testek közeledését az alakváltozás után.

Fontos tudni azonban, hogy ezen mennyiségek csak bizonyos feltételek megléte esetén számíthatók ki pontosan, melyek sajnos a gyakorlatban nem minden esetben állnak fenn, sőt még elhanyagolásokkal sem biztosíthatók.

A HERTZ-féle elmélet alapján elvégezhető vizsgálatok összes következtetésének és megállapításának alapját a következő feltételezések alkotják:

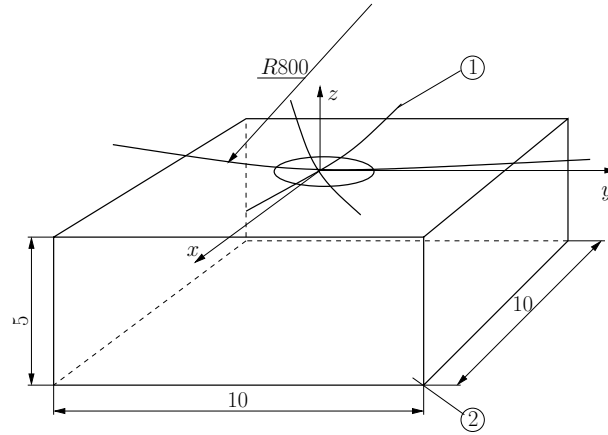
1. az érintkező testek anyaga homogén és izotróp,
2. a testekre ható terhelés az érintkezés következtében csak olyan rugalmas alakváltozásokat hoz létre, amelyek a HOOKE-törvénnyel leírhatók,
3. az érintkezési felület kicsi, a kölcsönhatásban résztvevő testek teljes felületéhez képest,
4. a nyomóerők az érintkezési felületre merőlegesek, és az érintkezési felületen a súrlódásból származó hatásokat elhanyagoljuk.

A gyakorlati életben megtalálható számtalan érintkezési feladat, melyek tüzetes megvizsgálásakor azt tapasztaljuk, hogy a HERTZ által megalapozott elmélet nem alkalmazható egyértelműen pontos számítások elvégzésére. Elegendő csak arra gondolnunk, hogy a gépelemek nem tekinthetők végtelen kiterjedésűeknek, méreteik az esetek túlnyomó részében véges dimenziókkal rendelkeznek, melyhez képest a kialakuló érintkezési tartomány nem feltétlenül elhanyagolható méretű.

Jelen fejezetben először olyan típusú érintkezési feladatokat fogunk megoldani, melyek a HERTZ-elméletből származtatott zárt képletekkel összevethető eredményeket adnak. Ilyen feladat például egy merev gömb és egy rugalmas hatoldalú hasáb érintkezési feladata. Célunk itt az, hogy a rugalmasságtani elmélet alapján várható kör alakú érintkezési tartományt és érintkezési nyomást meghatározzuk, kiszámítva a kialakuló elmozdulás- és feszültségmezőt. A fejezet további számpéldái az eljárás általános voltát kívánják bemutatni, nem gömb alakú merev bolygókon keresztül, illetve megvizsgáljuk még a nemszimmetrikus bolygórendezés hatását az érintkezési tartományra és a kialakuló feszültségmezőre.

6.1. Szimmetrikus terhelésű feladatok

A 6.1. ábrán vázolt módon kezdetben egy pontban érintkezik az 1-es jelű merev gömb és a 2-es jelű rugalmas hasáb, majd a terhelés hatására kialakuló érintkezési felület határa kis alakváltozások mellett jó közelítéssel kör alakú lesz. Ezt úgy valósítjuk meg, hogy a merev gömböt pontosan a rugalmas hasáb közepébe nyomjuk a terhelési esetnek megfelelő w_0 elmozdulással, míg a 2-es test alsó lapját függőleges irányban nem engedjük elmozdulni, azaz $w = 0$. Ez gyakorlatilag azt jelenti, hogy az alsó test oldallapjai feszültségmentesek, továbbá a hasáb alsó lapján teljesül, hogy a $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ csúsztatófeszültségek zérus értékűek.



6.1. ábra: Háromdimenziós érintkezési feladat

Öt terhelési esetet tekintünk, melyeket a 6.1. táblázat foglal össze, a jellemző w_0 előírt, lefelé mutató – azaz $-z$ irányú – elmozdulások felsorolásával.

A merev gömb görbületi sugara $R_1 = 800 \text{ mm}$, a rugalmas hasáb geometriai adatai a 6.1. ábrából leolvashatók. A HERTZ-féle elmélet szerinti számításokhoz szükséges geometriai jellemző, hogy az alsó, 2-es jelű test görbületi sugara az érintkezési hely környezetében $R_2 = \infty$.

6.1. táblázat: Különböző terhelési esetekhez tartozó w_0 előírt elmozdulás

i_{terh}	$w_0 [\text{mm}]$
1	$4.0 \cdot 10^{-3}$
2	$4.5 \cdot 10^{-3}$
3	$5.0 \cdot 10^{-3}$
4	$5.5 \cdot 10^{-3}$
5	$6.0 \cdot 10^{-3}$

A merev gömb anyagjellemzőit úgy tekintjük, hogy a gömbre vonatkozó rugalmassági modulus $E_1 = \infty$ nagyságú, míg a vizsgált 2-es testre vonatkozó rugalmassági modulus $E_2 = 2.1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, a POISSON-számot pedig $\nu_2 = 0.3$ értékre választottuk.

6.1.1. Analitikus megoldások

A kitűzött feladat közelítő megoldását a HERTZ-féle elmélettel előállított zárt képletek – bővebben lásd a B. függelék – segítségével írjuk fel, melyet a 6.2. táblázat foglal össze, ahol Δ jelenti az érintkező testek $-z$ irányú közeledését, F az összeszorító erő, a a kialakuló érintkezési tartomány sugara és p_0 pedig a kontakt nyomás maximuma. Tehát azzal a feltételezéssel élünk, hogy a várt érintkezési tartomány ebben a szimmetrikus esetben kör, azonban meg kell jegyezzük, hogy az itt vizsgált feladatban szereplő alsó test nem tekinthető rugalmas féltérnek a nagyméretű merev gömbhöz képest, illetve a kialakuló érintkezési tartomány nem elhanyagolható méretű az alsó testhez viszonyítva. Tehát a HERTZ által felállított összefüggések csak közelítőleg teljesülnek.

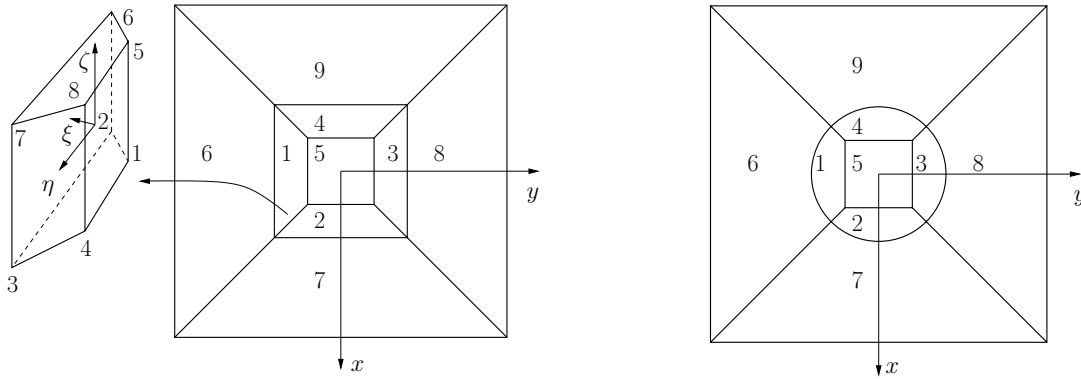
6.1.2. Numerikus megoldások

A numerikus megoldást p -verziós végeelem-módszer által határozzuk meg, így aránylag nagyméretű elemekkel dolgozhatunk, szemben a h -verziónál alkalmazott igen kisméretű

6.2. táblázat: Különböző terhelési esetekhez tartozó HERTZ-féle közelítő megoldások

i_{terh}	$\Delta = w_0$ [mm]	F [N]	a [mm]	p_0 [MPa]
1	0.0040	2201.67	1.789	328.51
2	0.0045	2627.12	1.897	348.43
3	0.0050	3076.92	2.000	367.28
4	0.0055	3549.81	2.097	385.20
5	0.0060	4044.72	2.190	402.34

elemekkel [66]. A választott végeleemes felosztásokat a 6.2. ábra mutatja be, felülnézetből.

**6.2. ábra:** A kijelölt végelelem-felosztások, egyenes és görbe oldalú elemekkel

A 6.1 részben megfogalmazott peremfeltételek biztosítása érdekében a 2-es jelű test alsó lapján lévő csomópontok függőleges, azaz z irányú, elmozdulását zérusra írtuk elő. A merevtestszerű elmozdulás és forgás megakadályozása érdekében pedig az 1-es jelű elem első csomópontjának x és y irányú elmozdulását, továbbá a 4-es jelű csomópont y irányú elmozdulását is megakadályoztuk.

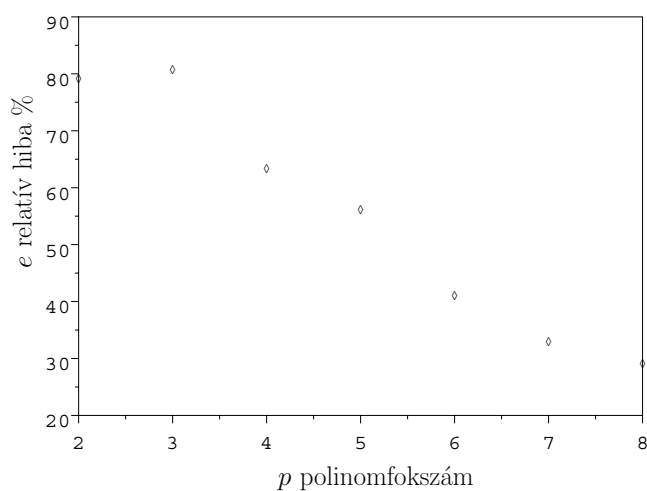
A 6.2. ábra szemlélteti az 1-es elem vonatkozásában az általunk használt jelölési szabályt, mely a p -verziós elemeknél használt élmenti-, oldalmenti és belső alakfüggvények számozását is definiálja, ahogy ezt az A. mellékletben bemutatjuk.

A (2.9) által felírt érintkezési nyomás értelmezése ($\sigma_z = \sigma_n^2$) alapján definiálható egy hibaindikátor, mely a kapott megoldás pontosságát jelzi:

$$e = \frac{\sqrt{\int_{S_c} (\sigma_z + p_n)^2 dS}}{\sqrt{\int_{S_c} p_n^2 dS}} \cdot 100 \% . \quad (6.1)$$

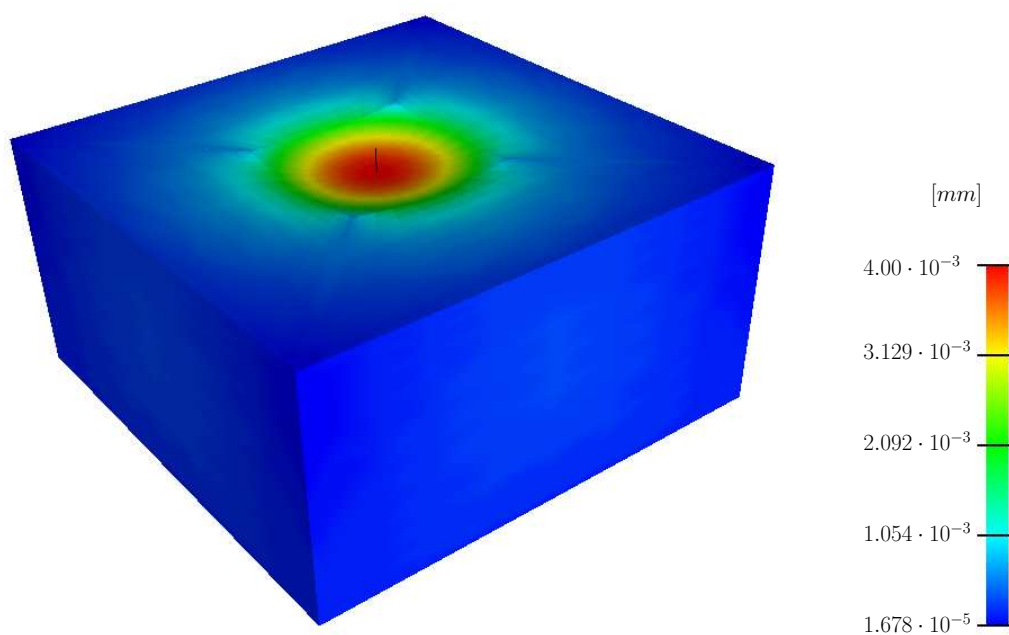
Egyenes oldalú elemek használata

A feladatot először csak az első terhelési esetre, $i_{\text{terh}} = 1$ – azaz $w_0 = 0.004 \text{ mm}$ – egyenes oldalú elemekkel kívánjuk megoldani. A büntetőparaméter értékét $c = 100 \cdot E_2$ -re választottuk. A megoldás pontosítására a p közelítő polinomok fokszámát, $p = 2$ -től $p = 8$ -ig tudjuk változtatni az általunk kifejlesztett programban. Természetesen a $p = 8$ fokszámhoz tartozó számítások jelentik az adott feladathoz tartozó legpontosabb megoldásokat (lásd a 6.3. ábrát), de még ebben az esetben is 29%-os relatív hibát kapunk, ami az egyenes oldalú elemek alkalmazása miatt ilyen jelentős.

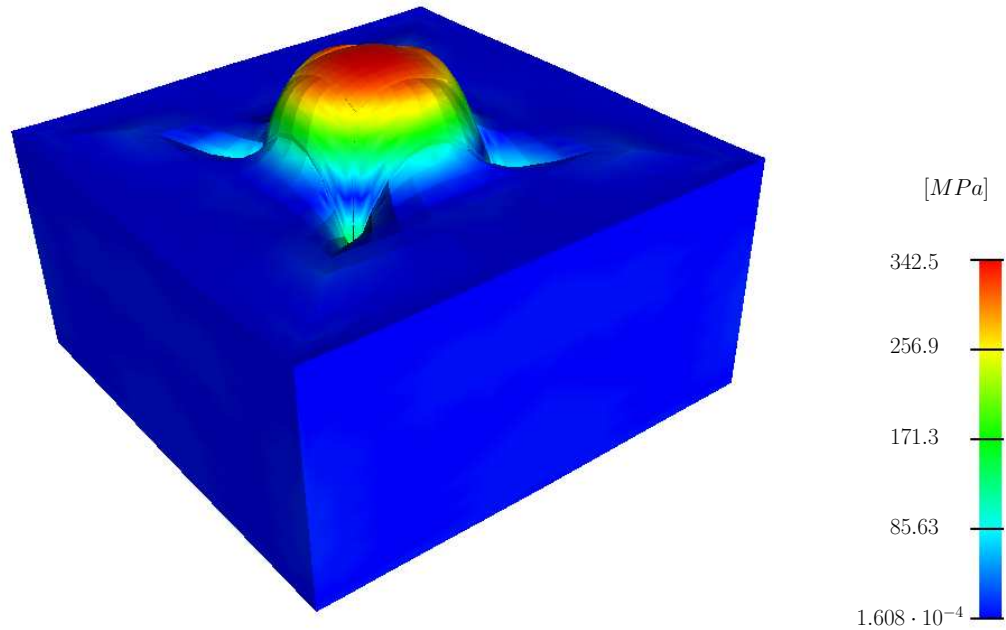


6.3. ábra: Relatív hiba változása, különböző p fokszám alkalmazásakor

Az elmozdulási és feszültségi eredményeket a 6.4. és a 6.5. ábrák szemléltetik. A 6.4. ábrán az elmozdulásmezőt 100-szoros nagyításban jelenítettük meg az alsó test vonatkozásában, míg a 6.5. ábra a $-\sigma_z$ feszültségmezőt szemlélteti. Az ábrákból leolvasható, hogy mind az elmozdulás-, mind a feszültségmező jelentős oszcillációt mutat. Ez elsősorban annak a következménye, hogy a végelemek nincsenek lokalizálva az érintkezési és elválási tartomány határára, így vannak olyan elemek, melyek egyszerre tartoznak az érintkezési- és a résterületekhez. Ezen az egyenes elemhatárok mozgatásával sem tudtunk jelentős mértékben javítani.



6.4. ábra: A z irányú elmozdulásmező ($w_0 = 4.0 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$, $p = 8$)



6.5. ábra: A $-\sigma_z$ feszültségmező ($w_0 = 4.0 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$, $p = 8$)

Görbeoldalú elemek használata

A kitűzött feladatot ezután olyan *görbe oldalú elemekkel* oldjuk meg, ahol az elemek határát egy B-spline görbe definiálja. Az elemhatárok approximációját a legkisebb hibahégyzetek elve segítségével határozzuk meg, az elem megfelelő oldalélein működő alakfüggvényeken keresztül. A kidolgozott program képes arra, hogy a futásidőben meghatározott érintkezési és elválási határgörbéhez „adaptív” módon illessze az elemhatárokat, ezáltal érve el a lehető legpontosabb numerikus megoldást.

A megoldás során a 4. fejezetben ismertetett zárt interpoláló paraméteres térgörbékét használjuk fel arra, hogy az érintkezési tartomány határát közelítsük. Ehhez szükségünk van a tartomány határán olyan interpolációs pontokra, melyekről tudjuk, hogy a hézag értéke azon pontokban zérus.

A B-spline görbék alkalmazásával elegendő véges számú – az általunk fejlesztett programban ez 8 db – ellenőrző pontot felhasználni a tér- vagy síkgörbék definiálására és ezáltal tetszőleges alakú zárt, sima görbét lehet létrehozni.

A határgörbén elhelyezkedő interpolációs pontokat az 1 – 6, a 2 – 7, a 3 – 8 és a 4 – 9 elemek érintkezési vonalán tekintjük, az érintkezés síkjában (lásd a 6.2. ábrát). Ellenőrzési pontokként választjuk az ezen elemek érintkezési síkjában fekvő egybeeső csomópontokat, és az érintkezési síkban fekvő találkozó élek felezőpontjait. Az érintkezési-elválási határpontok kereséséhez egy *iterációs eljárást* fejlesztettünk ki.

A kérdést úgy tudjuk megválaszolni, ha az elemhatárokat folyamatosan változtatva vizsgáljuk a kapott megoldás pontosságát és hibáját. Azt ugyanis tudjuk, hogy a szabad felületeken zérus értékű feszültségeket kell kapnunk, tehát az érintkezési tartomány határa mentén zérus nagyságú érintkezési nyomást várunk, azaz $p_n \simeq 0$ a megoldás közelítő jellegéből adódóan. Ez a gyakorlat szemponjából azt jelenti, hogy a maximális feszültségnek csak a töredéke elfogadható érték.

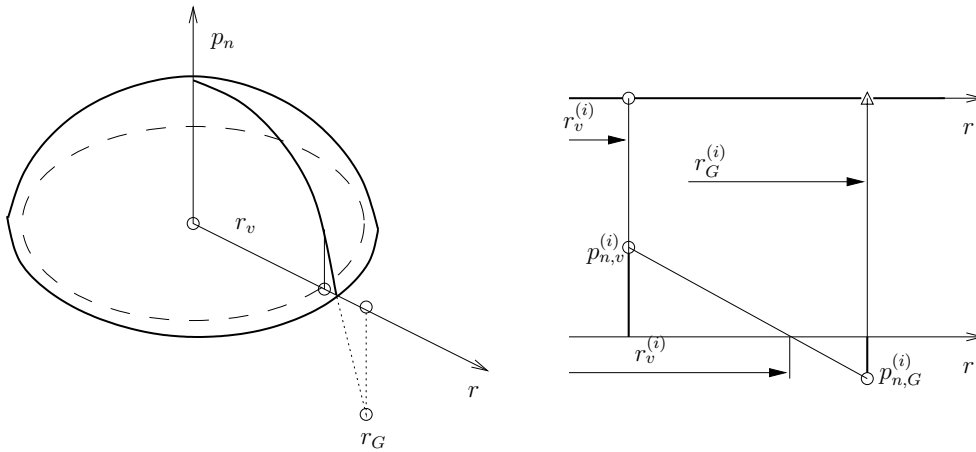
Az alkalmazott iteráció során a kontakt elemek határát első lépésben a GAUSS pontokban számított hézagértékek alapján becsüljük meg. Pontosabban a (2.7)-ben definiált függvény előjelváltási helyét keressük és úgy mozgatjuk az elemek határát, hogy csak a

kontakt elemek ellenőrző pontjaiban kapjunk, a büntetőparaméteres technika miatt, negatív hézagot. Minden más helyen pozitív d értéket érünk el. Ha ezt a célt a program teljesíti, akkor következik egy *finomkereső eljárás*, melynek a célja, hogy a kontaktelem méretét egészen addig változtatjuk, amíg a kontaktelem határán számítható, (2.9) által definiált p_n érintkezési nyomás maximuma egy előre meghatározott korlát alá nem csökken. Erre a következő formulát vezettük be:

$$p_n \leq \frac{p_{n \max}}{400}. \quad (6.2)$$

Ez a korlát gyakorlatilag azt jelenti, hogy azokat, az érintkező testeken, közös normálison – z -vel párhuzamosan – elhelyezkedő pontok alkotta pontpárokat, melyek távolsága nagyobb, mint 10^{-8} mm , már nem tekintjük érintkezőknek. Tehát ezen pontokat a réstartományba soroljuk és ezzel az elemtopológiával tekintjük a feladatot megoldottnak. Ekkor a határon az kapjuk, hogy

$$\max |p_n| = |c d^-| = 100 E \cdot 10^{-8} = 0,21 \text{ MPa}.$$



6.6. ábra: Sugár keresése interpolációval

Az iteráció az alábbi lépések alapján történik, lásd a 6.6. ábrát. Jelölje az i -edik állapotban kialakuló elemhatár általunk választott irányban vett sugarát $r_v^{(i)}$, az itt fellépő nyomást pedig $p_{n,v}^{(i)}$. A pillanatnyi réstartományon a választott irányban elhelyezkedő első ellenőrző pontjának sugarát $r_G^{(i)}$ és az itt számolt „fiktív” nyomást $p_{n,G}^{(i)} = -c d_G$ jelöli, melyben d_G a G pontbeli hézagot jelenti.

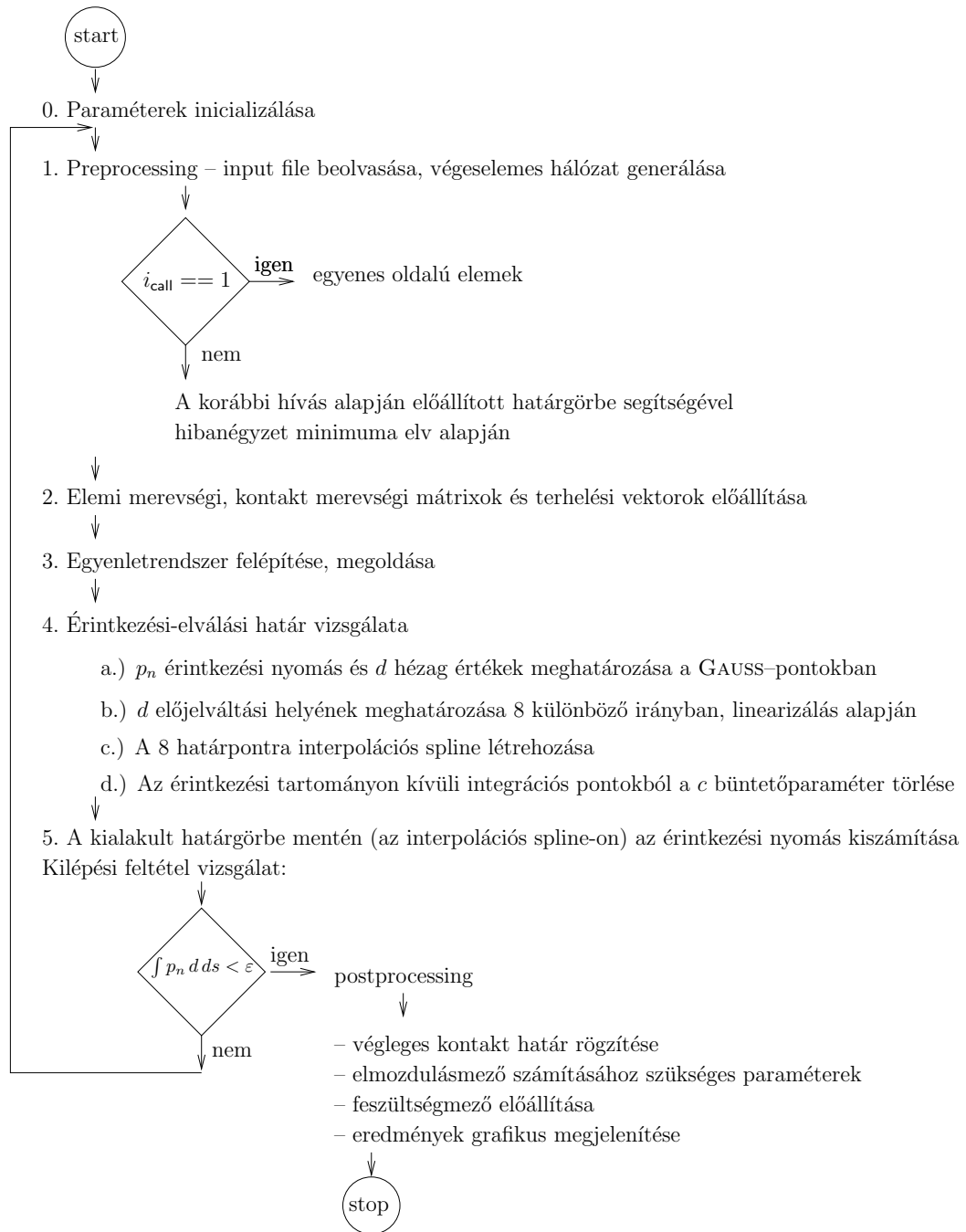
Ekkor a lineáris interpolációval keresett új sugár az

$$r_v^{(i+1)} = r_v^{(i)} + \frac{p_{n,v}^{(i)}}{p_{n,v}^{(i)} - p_{n,G}^{(i)}} \left(r_G^{(i)} - r_v^{(i)} \right) \quad (6.3)$$

összefüggés szerint számítható.

A 6.7. ábra a háromdimenziós végeleemes program működési vázlatát mutatja be, a végrehajtás szempontjából fontos lépések kiemelésével. A bemeneti adatokat a program szövegfile-okból olvassa be és a számítások elvégzése után az eredményeket olvasható szöveges állományokba menti el. Az eredmények grafikus formában való megjelenítését ezen kimeneti file-ok segítségével, további saját fejlesztésű segédprogramok felhasználásával végeztük el.

A számítási eljárást és az azt követő grafikus megjelenítést Fortran 90 nyelven kifejlesztett programok végzik. Az eredmények grafikus ábrázolásához az OpenGL függvénykönyvtár, valamint a Gnuplot segédprogram is felhasználásra került.

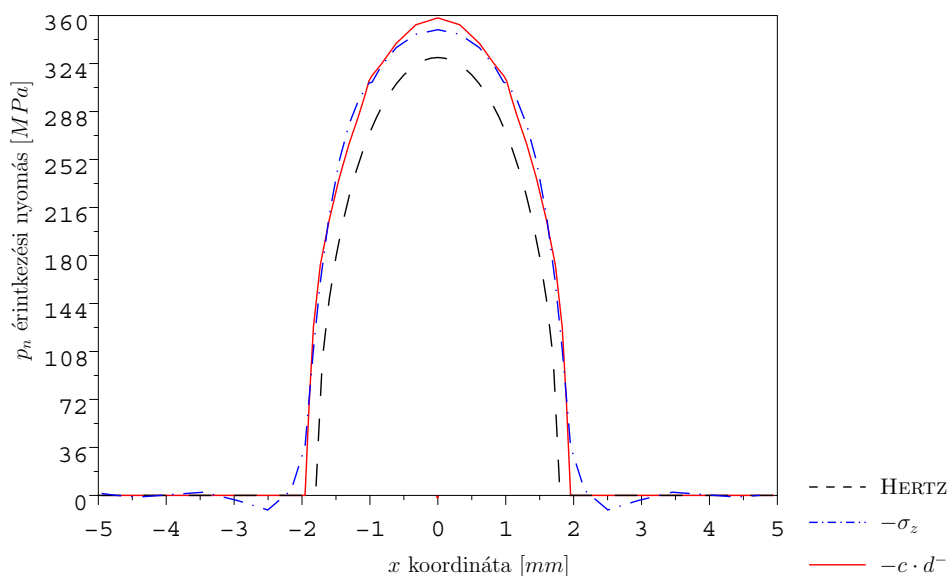


6.7. ábra: A kidolgozott 3D-s program egyszerűsített végrehajtási sémája

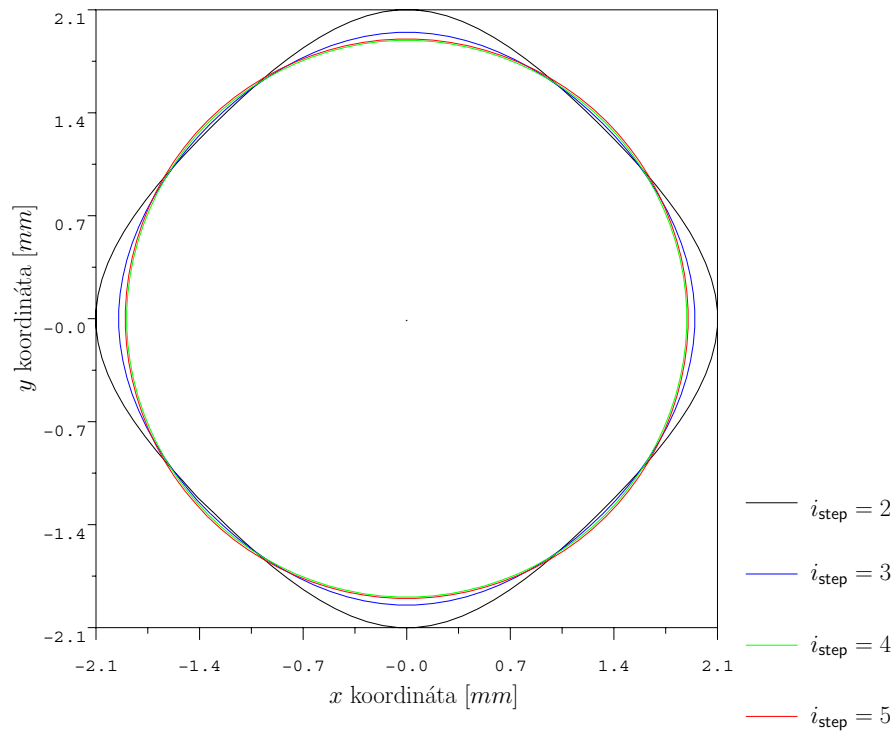
A különböző terhelési esetekhez tartozó iterációs megoldások eredményeit a 6.3. táblázatban foglaltuk össze. Látható, hogy a 6.2. táblázatban felírt analitikus eredményekhez képest mind a kialakuló érintkezési tartomány sugarában, mind a maximális érintkezési nyomás nagyságában eltérést tapasztalunk. Ez a HERTZ-féle elmélet alkalmazásakor tett elhanyagolásokkal magyarázható.

6.3. táblázat: Különböző terhelési esetekhez tartozó numerikus megoldások ($p = 8$)

i_{terh}	$\Delta = w_0 [mm]$	$a [mm]$	$-\sigma_z [MPa]$	$p_n = -c \cdot d^- [MPa]$	i_{step}
1	0.0040	1.912	349.38	358.24	5
2	0.0045	2.045	372.90	383.78	5
3	0.0050	2.168	395.98	408.12	5
4	0.0055	2.281	418.60	431.64	5
5	0.0060	2.395	440.85	454.35	5

**6.8. ábra:** Érintkezési nyomás eloszlása ($i_{\text{terh}} = 1$)

A kiszámított eredmények könnyebb értelmezését és összehasonlíthatóságát szolgálják a 6.8., a 6.9. és a 6.10. ábrák. A 6.8. és a 6.9. ábrák csak az első terhelési esetre vonatkozó érintkezési nyomás x irányú változását (az $y = 0$ mentén), és az iterációs lépések során meghatározott érintkezési tartományt szemléltetik. A további terhelési esetekre vonatkozó eredményképeket a C. függelék: C.5 – C.20. ábrák mutatják be. A 6.8. ábráról leolvashatjuk a HERTZ-féle eredmény és a numerikus számítás közötti eltéréseket. Az érintkezési nyomásra vonatkozó numerikus számítási eredményeket egyrészt az elmozdulásmező deriválásával előállított $-\sigma_z$ érintkezési nyomás, másrészt a büntetőparaméteres technika által szolgáltatott $p_n = c d^-$ hézagfüggvény alapján határoztuk meg.



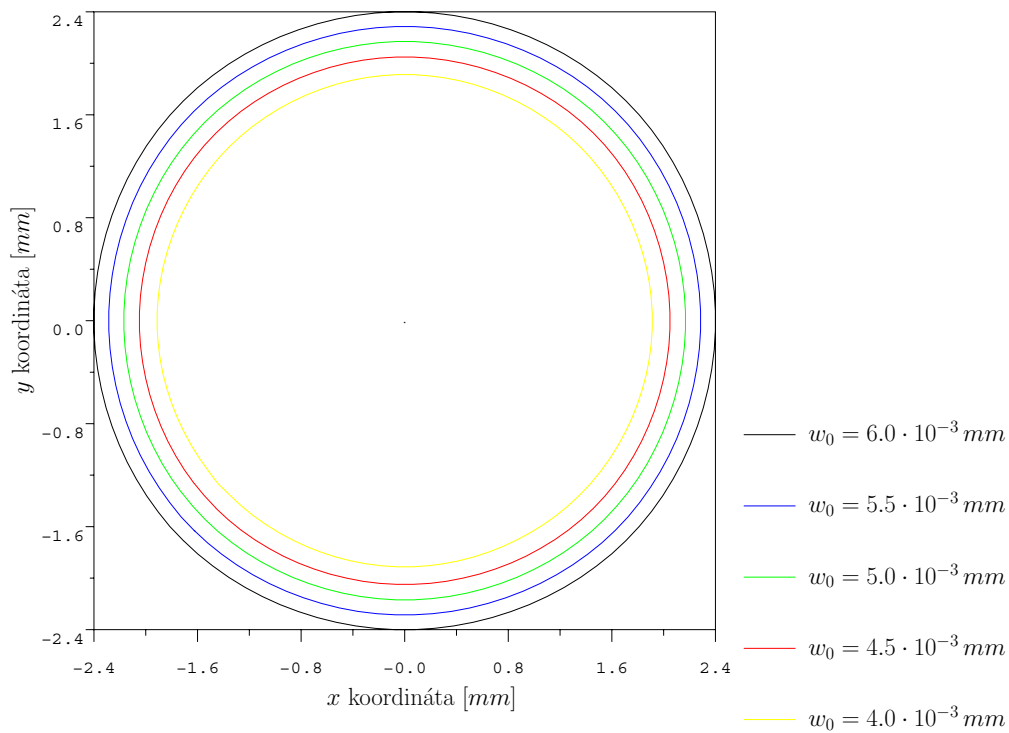
6.9. ábra: Az érintkezési tartomány változása ($i_{\text{terh}} = 1$)

A 6.10. ábra a különböző terhelési esetekre, numerikusan meghatározott, érintkezési tartomány határát jelentő B-spline-okat szemlélteti.

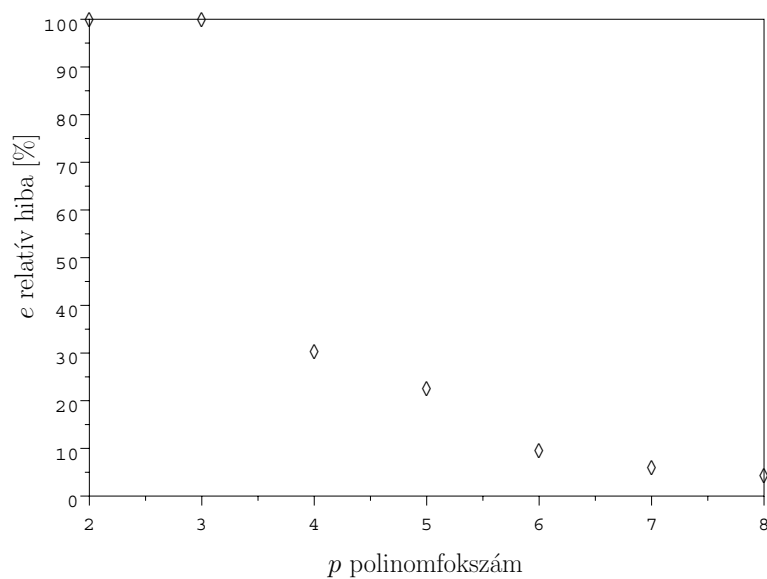
A zárt B-spline-nal leírt, mozgatóval előállított érintkezési határra lokalizált végelemes számítással kapott elmozdulás- és feszültségmezőt a 6.12. és 6.13. ábrák szemléltetik. Itt az első terhelési lépcsőhöz tartozó eredményeket jelenítettük meg, a további terhelési esetekre vonatkozó elmozdulásmező- és feszültségképek a C. függelékben tekinthetők meg. Minden esetben csak a $p = 8$ – általunk beprogramozott – legpontosabb számítási lehetőséghez tartozó numerikus eredményeket közöljük.

Az alacsonyabb polinomfokszámokhoz tartozó eredmények pontosság tekintetében elmaradnak a legjobb $p = 8$ fokszámhoz tartozó számításoktól. Ennek illusztrálásához tekintsük a 6.11. ábrát, melyen a $p = 2$ és $p = 8$ közötti polinomfokszámok használatával előállított numerikus eredmények (6.1) összefüggés által definiált e relatív hibáját szemléltettük. Jól látható a hatása a végelemek érintkezési határra való lokalizálásának, ha tekintjük a 6.3. és a 6.11. ábrákat, a relatív hiba közel 30%-ról 5% alá csökkent.

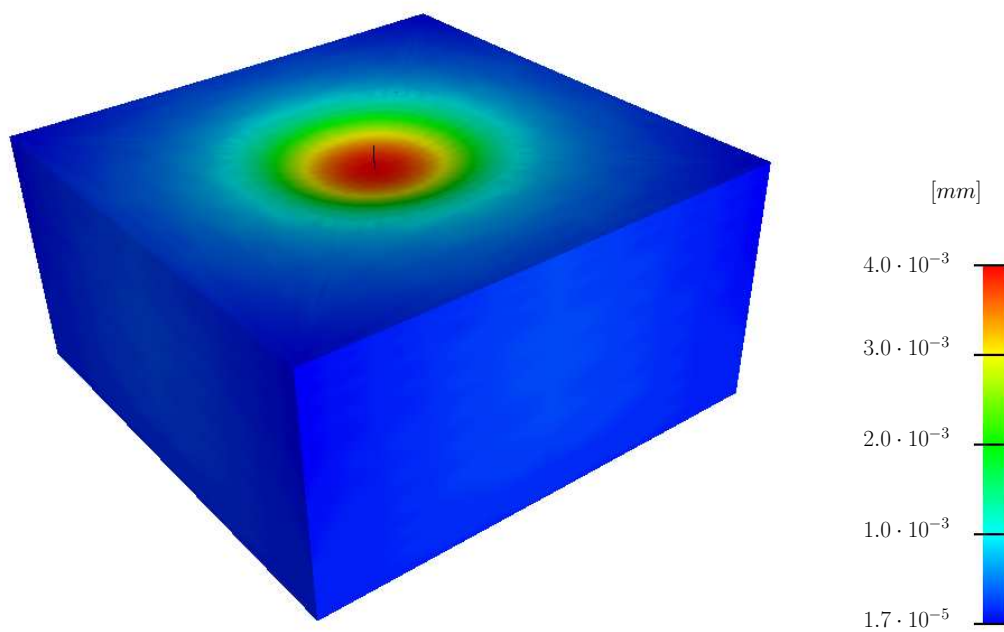
A 6.12. és a 6.13. ábrákból jól látható a megoldás simasága. Itt az elmozdulásmezőben – melyet 100-szoros nagyítással ábrázoltunk – egyáltalán nem találkozunk oszcillációval, míg a feszültségmezőben csak a tartomány határán van kismértékű hullámzás, melyet legjobban a 6.8. ábra szemléltet. Az érintkezési tartomány határára mozgatott végelemekkel ilyen kevés számú elemmel is lehetséges nagy pontosságú megoldás előállítása. Az érintkezési feladatokra vonatkozó kétváltozós tapasztalataink azt mutatják, hogy további pontosítást kisméretű elemek elhelyezésével lehet elérni az érintkezési határon.



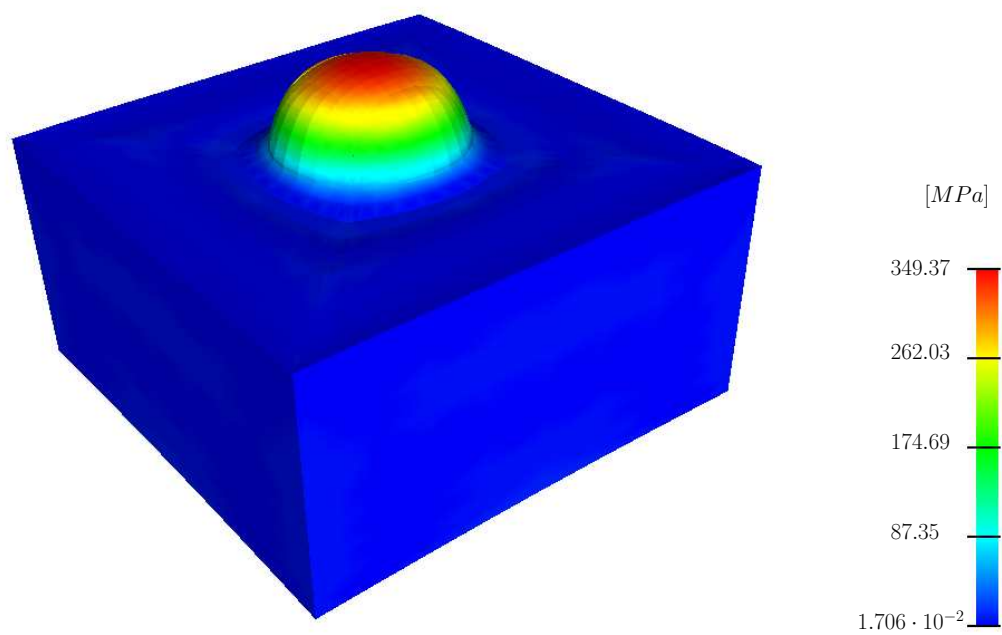
6.10. ábra: Érintkezési tartomány alakja különböző terhelésekre ($i_{\text{terh}} = 1, \dots, 5$)



6.11. ábra: Az e relatív hiba változása ($i_{\text{terh}} = 1$)



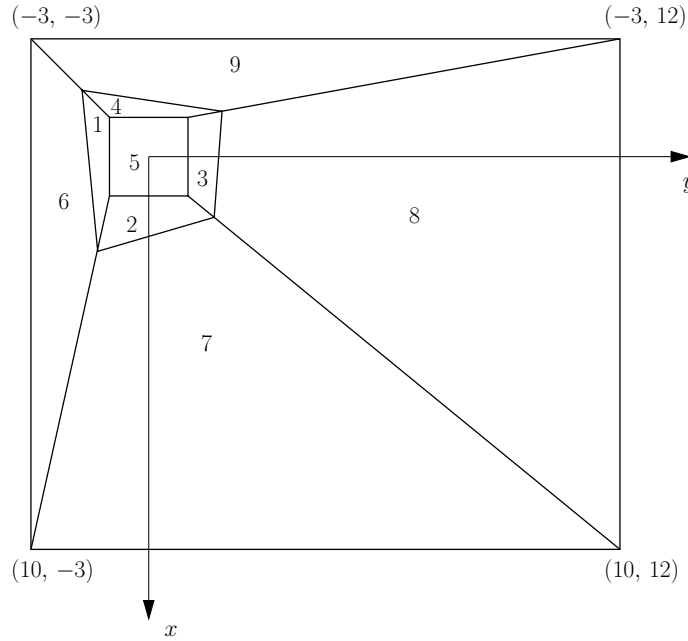
6.12. ábra: A z irányú elmozdulásmező ($i_{\text{terh}} = 1$, $p = 8$)



6.13. ábra: A $-\sigma_z$ feszültségmező ($i_{\text{terh}} = 1$, $p = 8$)

6.2. Nemszimmetrikus elrendezésű feladat

A következőkben olyan térbeli érintkezési feladatot vizsgálunk, melynél továbbra is gömb alakú a merev bélyeg, de nem a vizsgált rugalmas test közepébe nyomódik. A 2-es test alsó felülete változatlanul függőleges irányban rögzített. Továbbra is feltételezzük, hogy kezdetben egy pontban érintkeznek a testek, a terhelés hatására azonban egy kezdetben nem ismert méretű és alakú, de folytonos zárt görbével határolt egyszeresen összefüggő érintkezési felület alakul ki.



6.14. ábra: Geometriai adatok és kezdeti végelemek-háló nemszimmetrikus elrendezésnél

A 6.1. táblázat szerinti $i_{\text{terh}} = 1$ terhelési esetre vizsgáljuk meg a kialakuló érintkezési tartomány méretét és a létrejövő érintkezési nyomás eloszlását. Mivel a HERTZ-féle elmélet feltételezései itt sem teljesülnek, így a kialakuló érintkezési tartományra csak közelítő becslést tudunk adni.

A vizsgált 2-es jelű alsó test geometriai adatait és a kiindulási végeselemes hálózatot a 6.14. ábra mutatja felülnézetből, a test magassága az előző feladatban felvett 5 mm .

Az alsó testre a korábban megadott anyagjellemzőket használjuk, tehát

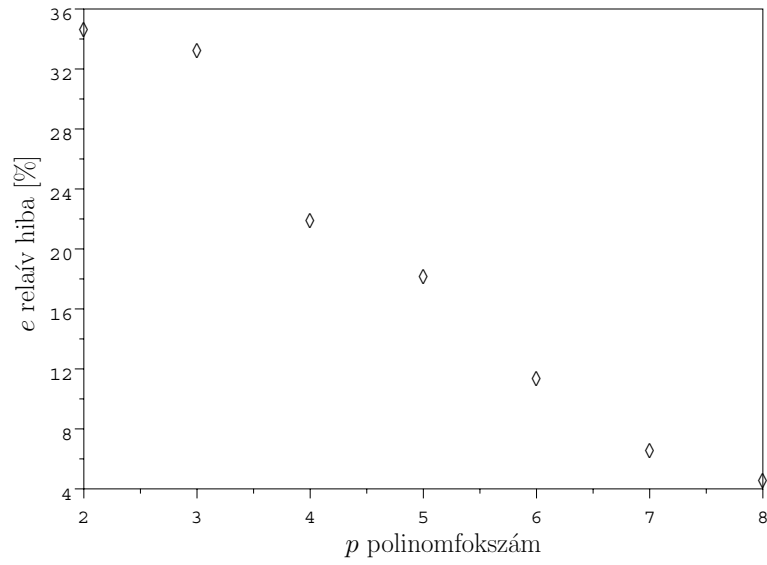
$$E_2 = 2.1 \cdot 10^5 \text{ MPa}, \quad \nu_2 = 0.3.$$

Az érintkezési feladat megoldására az általunk írt programot használjuk fel, melyben a büntetőparaméteres technika alkalmazásánál választott büntetőparamétert $c = 50 \cdot E_2$ -re rögzítjük. A nemlineáris feladat megoldása iterációs algoritmus alapján történik oly módon, hogy az $i_{\text{step}} = 1$ lépésben még csak egyenes oldalú elemeket használunk az érintkezési tartomány határát leíró paraméteres térgörbe interpolációs pontjainak meghatározása érdekében. Ezt követően már görbe oldalú elemhálózatot generál a program „adaptív” módon – a legkisebb hibanégyzetek elve alapján –, zárt interpoláló B-spline görbe segítségével.

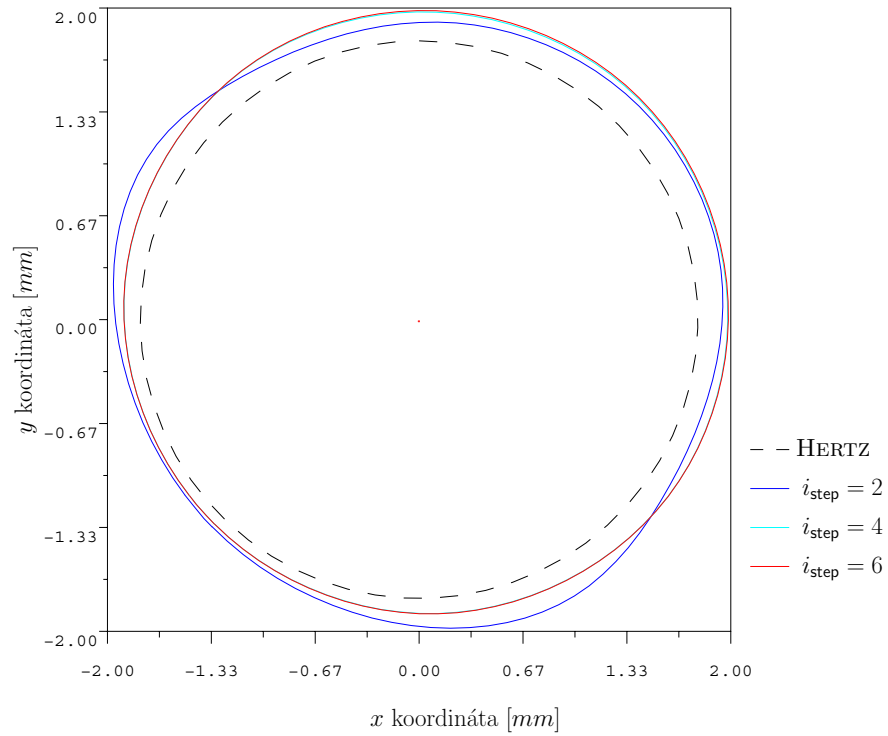
Az iterációs eljárást addig folytatjuk, míg az érintkezési- és réstartomány határán kiszámított p_n érintkezési nyomás maximuma a korábbiakban definiált (6.2) feltételt nem teljesíti.

A felállított feladatot numerikusan többféle p fokszámú közelítő polinom használatával megvizsgáltuk, és a kapott eredmények szerinti legjobb megoldás, az elvárásoknak megfelelően, a $p = 8$ fokszámhoz tartozóan állt elő. A 6.15. ábra a (6.1) által definiált e relatív

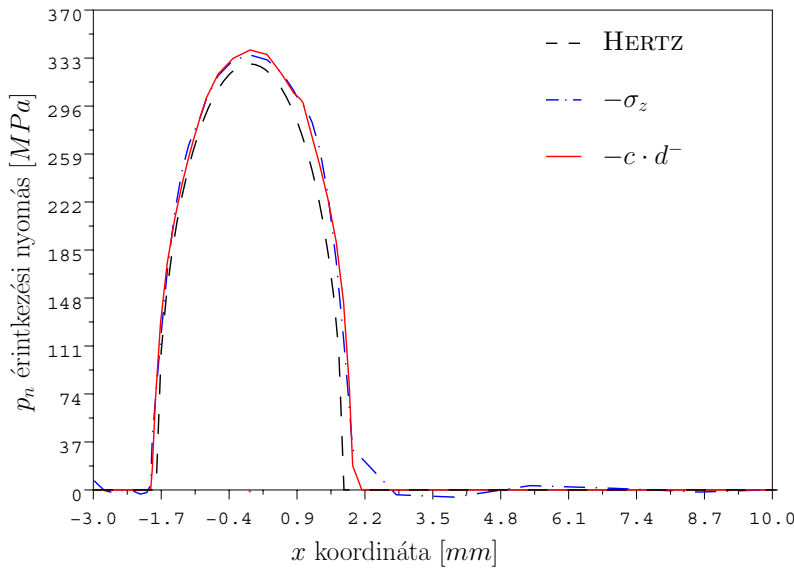
hiba változását mutatja a különböző $p = 2, \dots, 8$ fokszerű közelítő polinomokhoz tartozó megoldások vonatkozásában.



6.15. ábra: Az e relatív hiba változása a p polinomfokszám függvényében ($i_{\text{terh}} = 1$)



6.16. ábra: Az érintkezési tartomány változása nemszimmetrikus esetre ($i_{\text{terh}} = 1$)



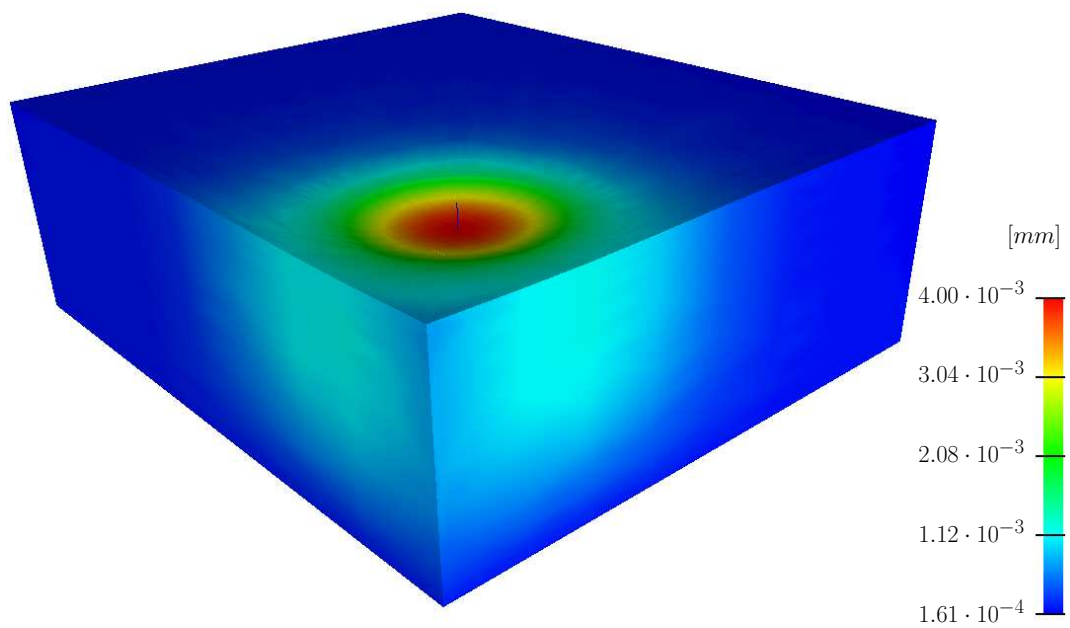
6.17. ábra: Érintkezési nyomás eloszlása nemszimmetrikus esetre ($i_{\text{terh}} = 1$)

Mivel a legkisebb e relatív hibát a $p = 8$ -nál kaptuk, a továbbiakban a fenti érintkezési feladat közelítő megoldásának a $p = 8$ foksám alkalmazásával kapott eredményeket fogjuk tekinteni. A 6.16. ábra megjeleníti a HERTZ-féle összefüggések által számítható érintkezési tartományt – amely kör alakú –, illetve a numerikus úton meghatározott érintkezési tartomány határát leíró zárt B-spline görbét az iterációs folyamat során, az $i_{\text{step}} = 2, 4, 6$ lépésekben. Az ábrából látható, hogy a 4. és a 6. lépés között valójában már nem változik a kialakult érintkezési tartomány. Összességében azonban azt állapíthatjuk meg, hogy a HERTZ-féle elmélet alapján számítható körhöz képest minden irányban jelentős különbségeket tapasztalunk, mely csak azzal magyarázható, hogy a vizsgált tartomány és a kialakult érintkezési tartomány méretei összemérhetők egymással, mivel az alsó test véges méretű.

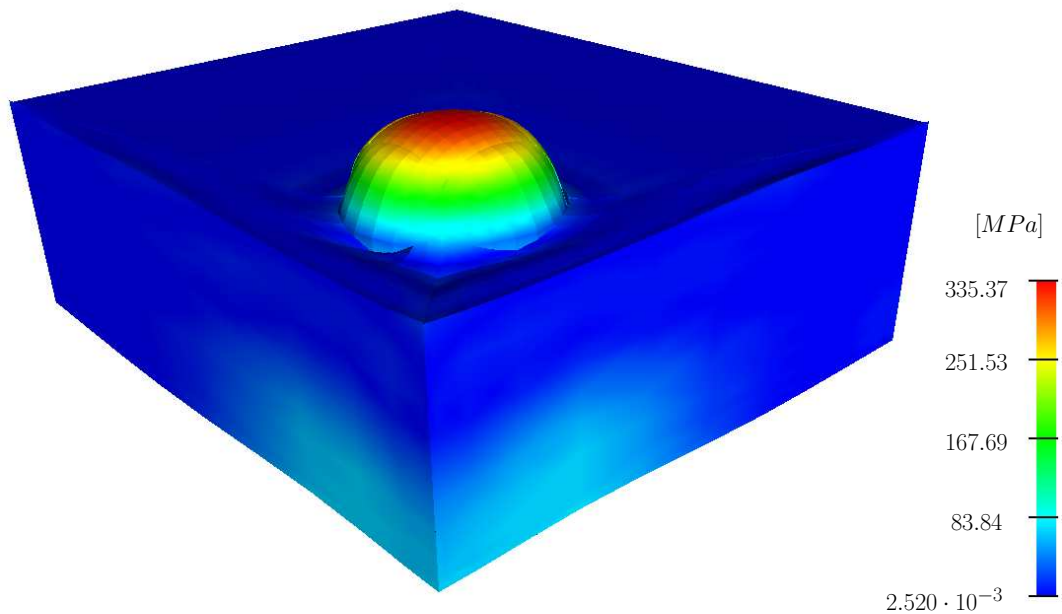
Látható továbbá, hogy a kontaktelemelek határának érintkezési tartományhatárra való pozicionálásával nagy pontosságú numerikus eredményeket kapunk. A 6.17. ábra a különböző módon meghatározott p_n érintkezési nyomás eloszlását szemlélteti az x koordináta függvényében (az $y = 0$ mentén). Az ábrából kiolvasható, hogy az aszimmetrikus benyomódás miatt a HERTZ-től származtatott nyomásképhez viszonyítva eltérést tapasztalunk ennél a feladatnál.

A nemszimmetrikus elrendezésű feladatra vonatkozó elmozdulásmezőt grafikus formában a 6.18. ábra jeleníti meg. Látható, hogy a kialakuló érintkezési tartomány alakját befolyásolja a hasáb oldallapjain tapasztalható deformáció, ezzel magyarázható a kialakult kontakttartomány jellege.

Az elmozdulásmezőhöz hasonló nézetben szemlélteti a 6.19. ábra a származtatott feszültségmezőt. Mint az leolvasható ezen térbeli ábrából, a kialakult feszültség eloszlása kismértékű oszcillációval terhelt az érintkezési tartomány határán. Ennek a hullámszárnak a csökkentésére csak az érintkezési határ menti elemsűrítéssel volna lehetőség.



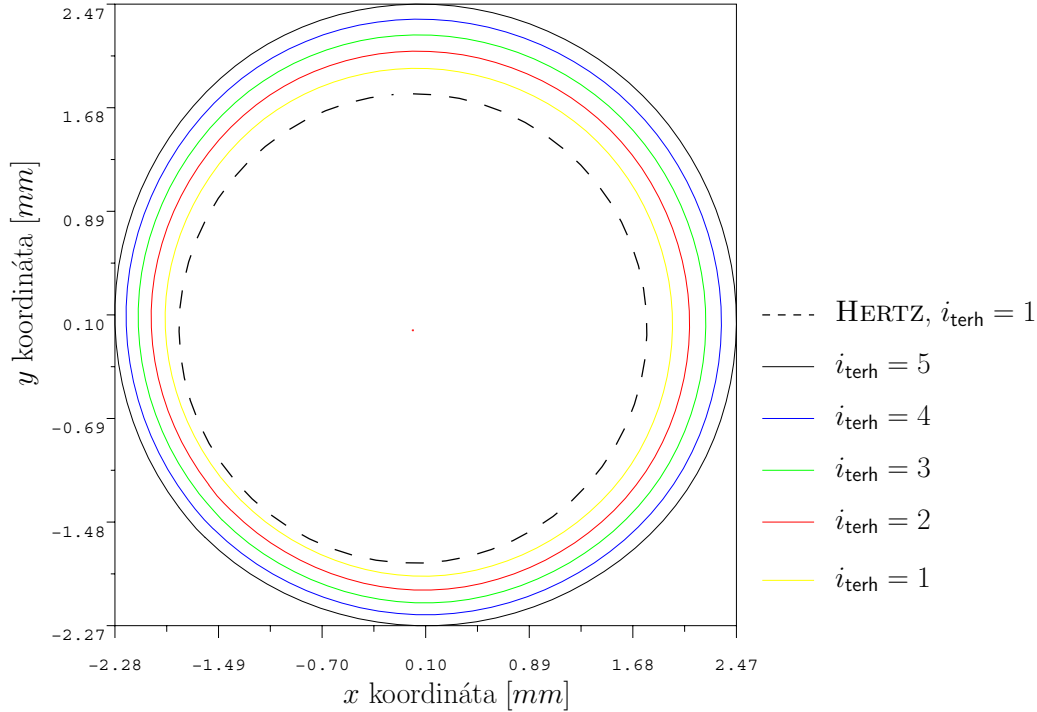
6.18. ábra: A z irányú elmozdulásmező nemszimmetrikus elrendezésénél ($i_{\text{terh}} = 1, p = 8$)



6.19. ábra: A $-\sigma_z$ feszültségmező nemszimmetrikus elrendezésénél ($i_{\text{terh}} = 1, p = 8$)

A különböző terhelési esetekhez tartozóan (lásd a 6.1. táblázatot) – hasonlóan a szimmetrikus terhelési esethez –, előállítottuk az eredményeket, de az ezekhez tartozó eredményképeket a C. függelék: C.21 – C.36. ábrái mutatják. Itt csak egy, a számítások összehasonlítását segítő ábrát közlünk arra vonatkozóan, hogy az érintkezési tartomány mérete hogyan változik a különböző terhelési esetekhez tartozóan. A 6.20. ábra szemlélteti, hogy az $i_{\text{terh}} = 1$ terhelési esethez felrajzolt HERZ-féle elmélet alapján jósolt kör alakú érintkezési tartományhoz képest hogyan alakul a numerikusan meghatározott eredmény.

A 6.20. ábrából kitűnik, hogy a terhelés növelésével az érintkezési tartomány alakja a körhöz viszonyítva, nem lineáris módon, torzul. Az $i_{\text{terh}} = 1$ terhelési esetre sem kör alakú érintkezési tartományt számított ki a program, ahogy ez az ábrából látható.



6.20. ábra: Érintkezési tartomány változása, nemszimmetrius terhelési esetekre

6.3. Általános geometriájú bélyegfeladat

Ebben a részben olyan érintkezési feladatot vizsgálunk meg, amikor a felső merev bélyeg felülete két paraboloid szuperpozíciójával állítható elő. A bélyeg elhelyezése olyan, hogy terhelés előtt az alsó rugalmas hasáb közepével egy pontban érintkezik. A bélyeg felületét a következő összefüggéssel definiáltuk:

$$\begin{cases} z = a_0 x^2 + b_1 (y - y_c)^2 & \text{ha } y \leq y_c, \\ z = a_0 x^2 + b_2 (y - y_c)^2 & \text{ha } y > y_c, \end{cases} \quad (6.4)$$

melyben a_0 , b_1 , b_2 és y_c paramétereket a következő értékre rögzítettük:

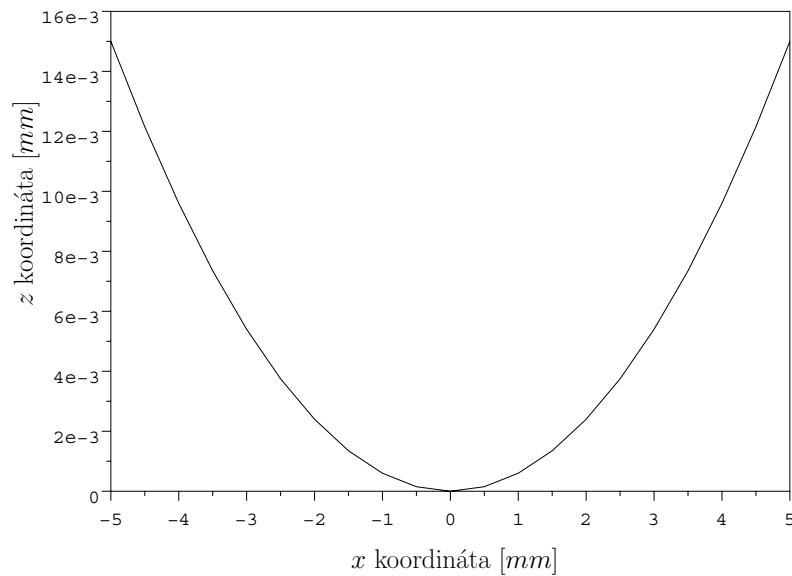
$$\begin{aligned} a_0 &= 6 \cdot 10^{-4}, & y_c &= 0 \text{ mm}, \\ b_1 &= 7 \cdot 10^{-4}, & b_2 &= 3 \cdot 10^{-4}. \end{aligned}$$

A 6.21. és 6.22. ábrákon e függvény x és y tengelyek menti meridián metszeit láthatjuk, míg a 6.23. ábra a merev bélyeg paraboloid felületét térben szemlélteti.

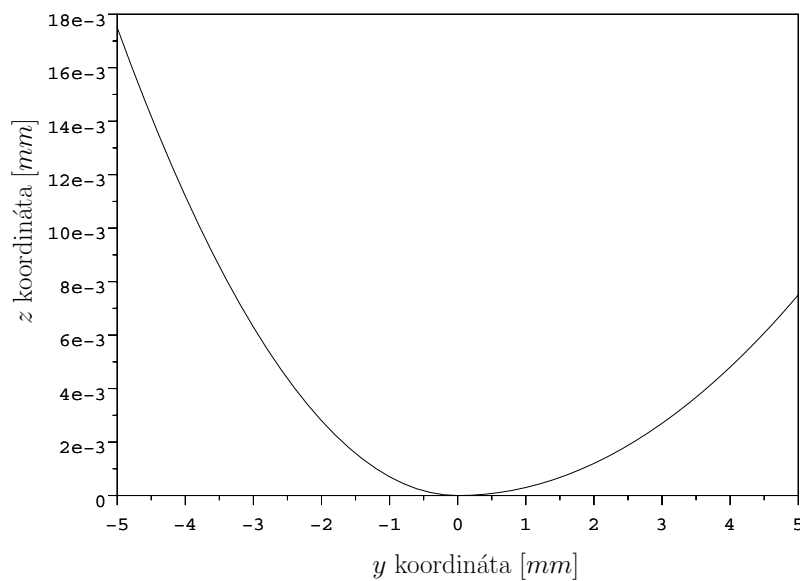
A terhelés a merev bélyegre megadott $w_0 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$ függőleges $-z$ -irányú elmozdulásmező.

A létrejövő alakváltozások kicsik, azonban a kialakuló érintkezési tartomány mérete nem elhanyagolható a rugalmas alsó test méretéhez képest, illetve a kialakuló érintkezési

tartomány alakjára sem tudunk előzetes feltételezéseket tenni, mint a korábbi példáknl. Tehát ezen nem-HERTZ-feladat megoldásához csak numerikus úton fogunk közelíteni.



6.21. ábra: A paraboloid felületű bélyeg x tengely menti meridián metszete

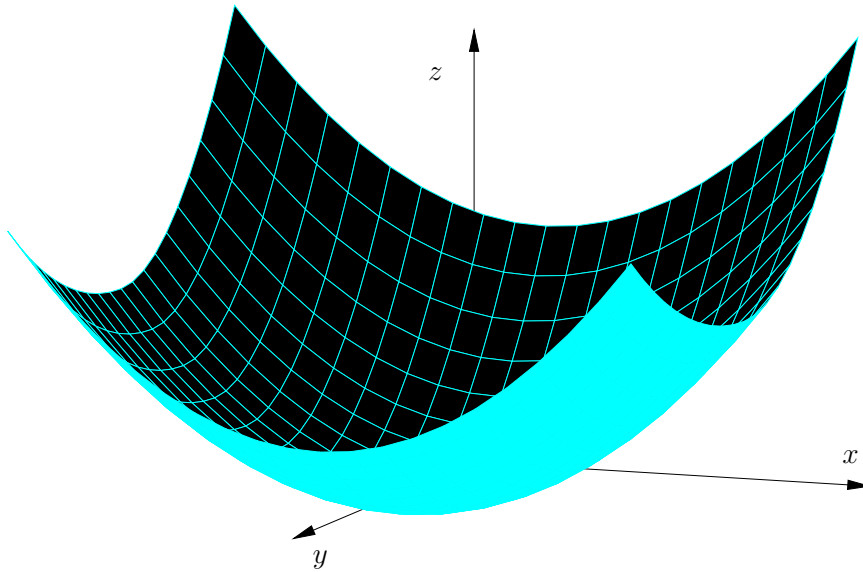


6.22. ábra: A paraboloid felületű bélyeg y tengely menti meridián metszete

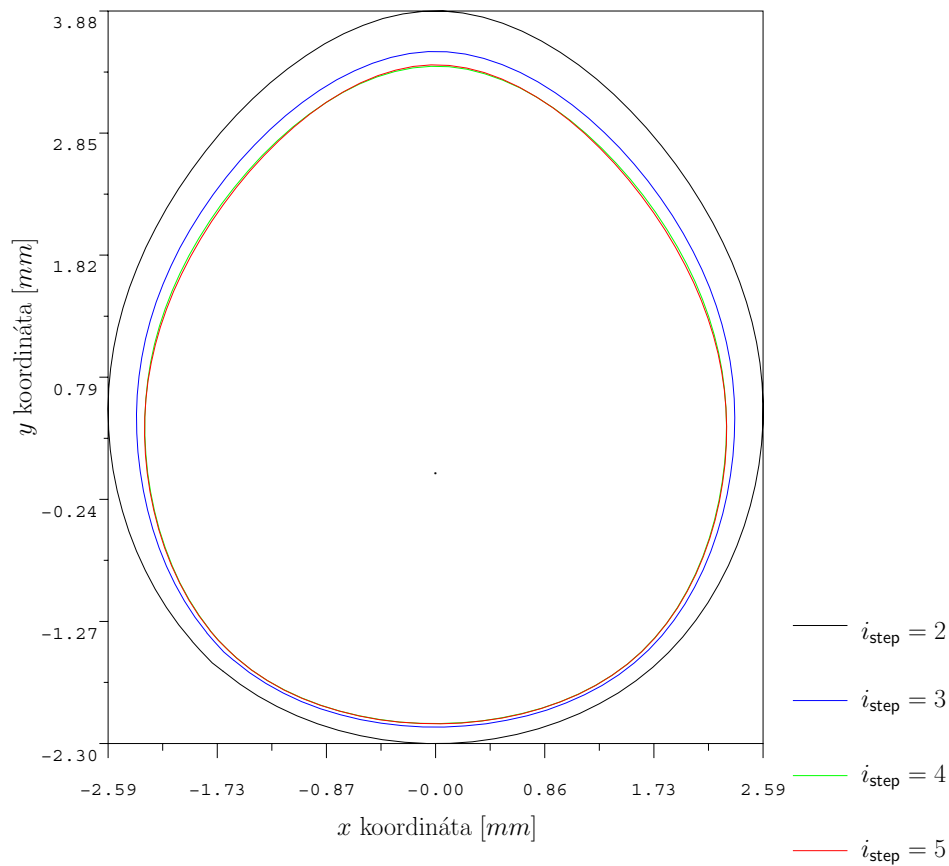
A rugalmas testre vonatkozó anyagjellemzők: $E_2 = 2.1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$ a rugalmassági modulus és $\nu_2 = 0.3$ a POISSON-szám. A rugalmas hasáb geometriai adatok tekintetében megegyezik az előző problémánál megadottakkal (lásd a 6.1. ábrán). A számítás során a $c = 50 \cdot E_2$ büntetőparaméter értékkel dolgozunk. A numerikus számítás pontosítását a közelítő polinomok p fokszámának növelésével érjük el.

A legpontosabb megoldást jelen esetben is a $p = 8$ közelítő polinomfokszámhoz tartozóan kaptuk meg. Az iterációs megoldás során kiszámolt érintkezési tartományok alak- és méretváltozását szemlélteti a 6.24. ábra az $i_{\text{step}} = 2, \dots, 5$ iterációkhoz tartozóan. Az

$i_{\text{step}} = 5$ lépésben teljesült a (6.2) érintkezési nyomásra vonatkozó kilépési feltétel, mely által megkaptuk a feladat megoldását.

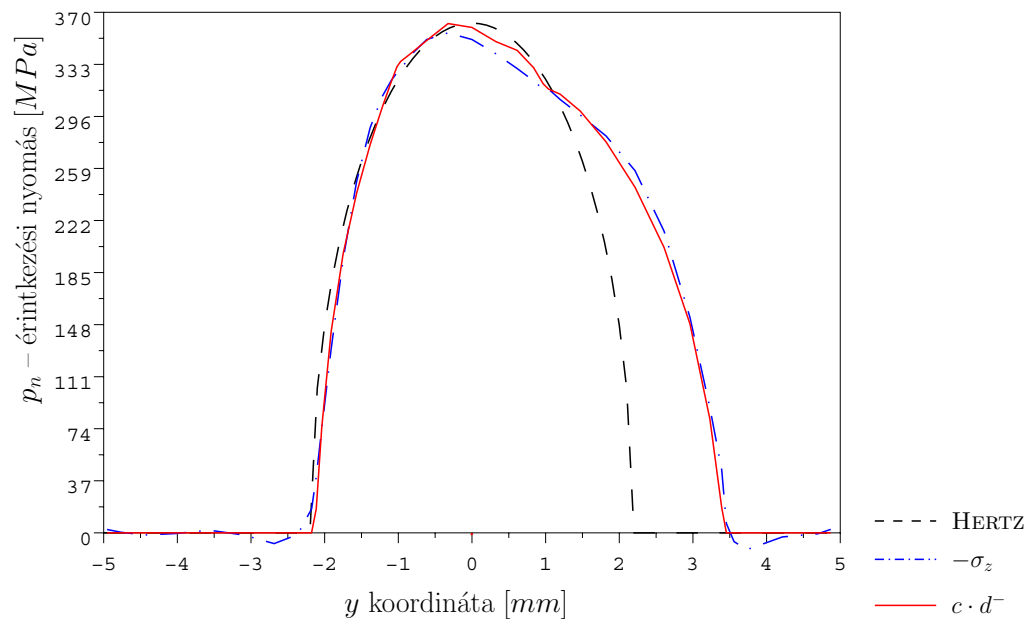


6.23. ábra: A paraboloid felületű merev bélyeg alakja

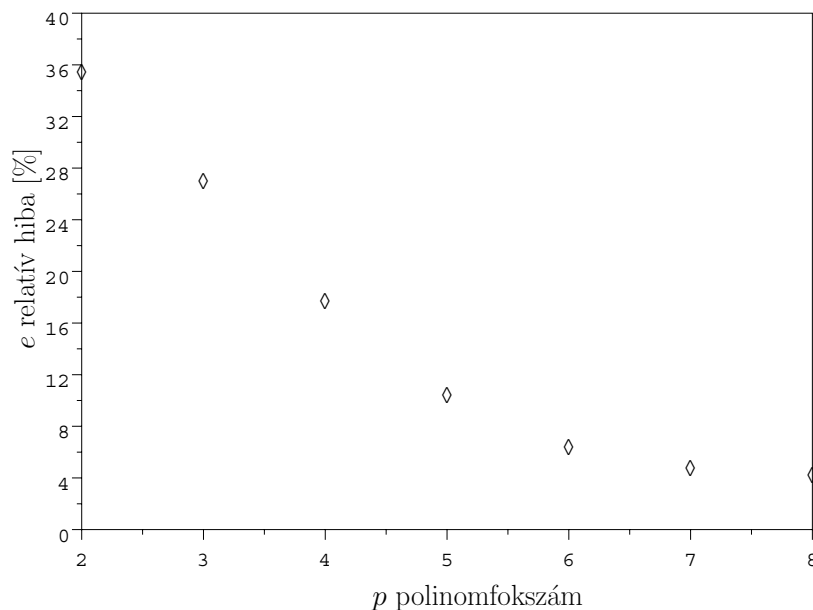


6.24. ábra: Az érintkezési tartomány változása ($w_0 = 5.0 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$)

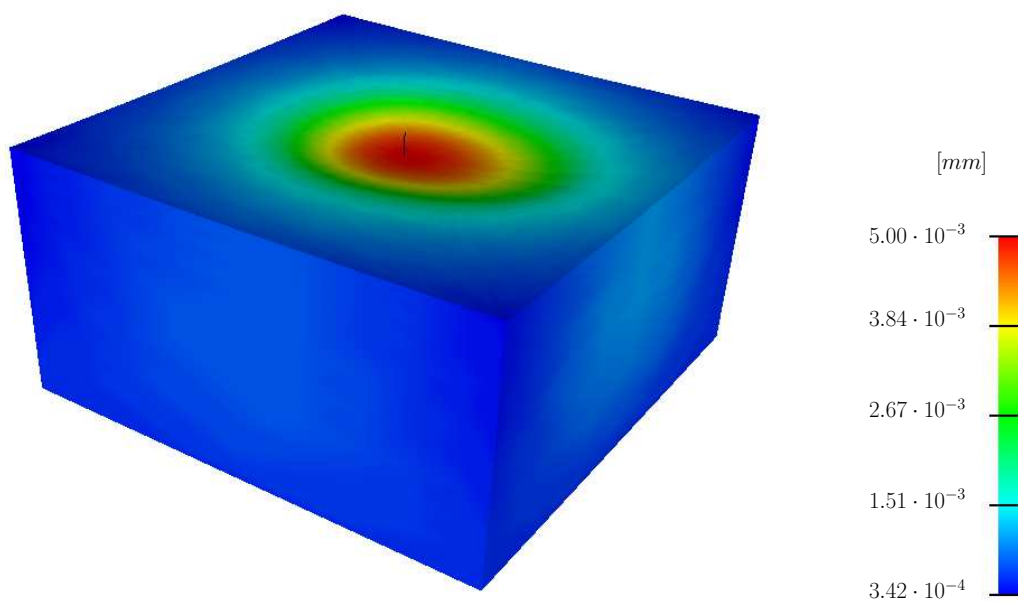
Az ekkor kiszámított megoldáshoz tartozó x tengely mentén változó érintkezési nyomást – az $y = 0$ mentén – a 6.25. ábra mutatja. Az ábra szemlélteti még a HERTZ-féle összefüggések alapján kiszámítható maximális nyomásértékhez tartozó nyomáseloszlást, valamint az általunk írt program segítségével meghatározott $-\sigma_z$ és $-c \cdot d^-$ alapján előállított p_n érintkezési nyomást. A kétféle módon előállított érintkezési nyomás között tapasztalható eltérés a p polinomfokszám változtatásával jelentős mértékben csökkent. A 6.26. ábra a (6.1) összefüggéssel felállított e relatív hiba értékeit mutatja különböző polinomfokszámokhoz tartozóan.



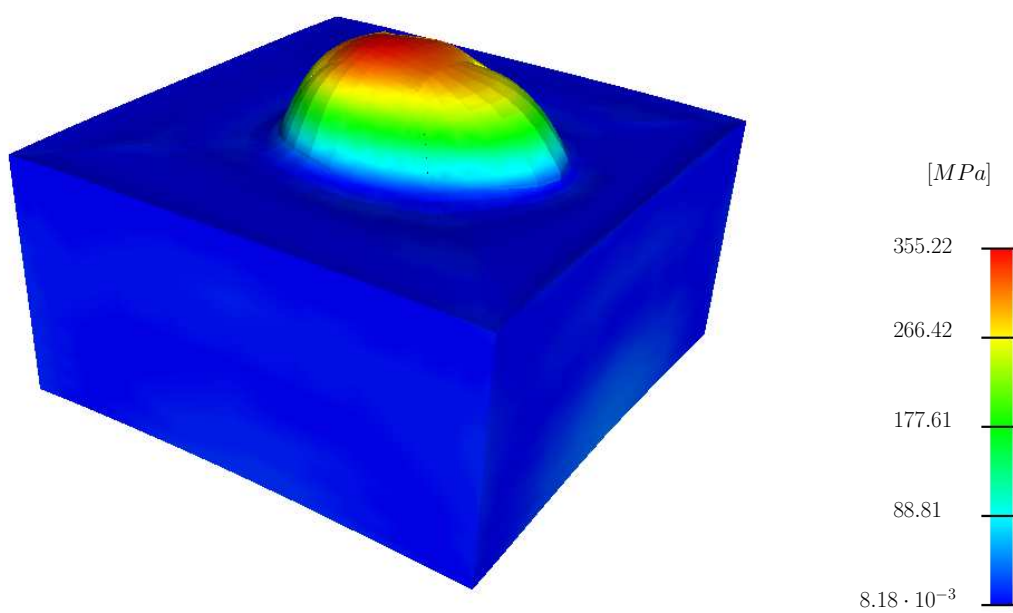
6.25. ábra: Az érintkezési nyomás változása az x tengely mentén ($w_0 = 5.0 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$)



6.26. ábra: Az e relatív hiba változása ($p = 2 \dots 8$)



6.27. ábra: A z irányú elmozdulásmező ($w_0 = 5.0 \cdot 10^{-3} mm$, $p = 8$)



6.28. ábra: A $-\sigma_z$ feszültségmező ($w_0 = 5.0 \cdot 10^{-3} mm$, $p = 8$)

Az előzőekben felállított és megoldott példákhoz hasonlóan, itt is előállítottuk az alsó testre vonatkozó z tengely irányú elmozdulásokat és feszültségeket. A kialakult mezőket grafikus formában a 6.27. és a 6.28. ábrák jelenítik meg. Nagyon jól látható az elmozdulási-, illetve a belőle származtatott feszültségképekből az alakváltozás jellege és a kialakult nyomáseloszlás térbeli lefutása, melynek a mindössze 4 %-os hibával való megoldásához csak az elemhatárok pontos érintkezési-elválási határra való illesztésével és $p = 8$ nagyfokú közelítő polinomok alkalmazásával jutottunk el.

A 6.27. ábrán kirajzolt elmozdulásmező jelen esetben is 100-szoros nagyításban került ábrázolásra a jobb láthatóság miatt, de az ábrán jelzett skála mutatja a valóságos elmozdulások nagyságát.

A kiszámított elmozdulásmezőből deriválással előállított feszültségmező z tengely irányú értékében kismértékű hullámzást tapasztalunk az érintkezési tartomány határán, mely az alkalmazott elemek kis számával magyarázható. A síkbeli példákban tapasztaltak alapján azt mondhatjuk, hogy ez jelentős mértékben csökkenthető azáltal, ha a rés-érintkezési határon további kisméretű elemeket veszünk fel.

7. fejezet

ÖSSZEFOGLALÁS

A lineáris rugalmasságtan keretei között vizsgált érintkezési feladatok nagy pontosságú numerikus megoldására jól használható a p -verziós végelem-módszer. A kontaktfeladat p -verziós elemekkel történő diszkretizálása rendkívül előnyös, mivel az eredmények tekintetében gyors konvergenciát mutat, másrészt a magasfokú leképzés pontos geometriát nyújt az alakoptimalizálás elvégzéséhez.

Azoknál a feladatoknál, ahol a kialakuló érintkezési tartomány jellemző mérete a kölcsönhatásban résztvevő testek méretéhez képest jóval kisebb – ilyen az általunk vizsgált görgő alakú testek érintkezési feladata –, a rugalmas feltételre vonatkozó megoldások jól alkalmazhatók.

A végelem-módszer felhasználásával két fő érintkezési feladattípust vizsgáltunk meg:

1. Bélyegszerű (forgástestek) alakoptimalizálása kapcsán számos új, optimalizálási feladat került felállításra, és megoldásra az anyagra megengedett feszültségi korlát figyelembevételével.
2. A háromdimenziós érintkezési feladatok kapcsán teljesen újszerű határpozicionálási technikát vezettünk be annak érdekében, hogy az elemek teljes egészében a kialakult érintkezési tartományon belül vagy kívül helyezkedjenek el.

Az általunk felállított alakoptimalizálási feladatokat az érintkezésben résztvevő anyagokra vonatkozó feszültségi mellékfeltétellel láttuk el. Ennek a figyelembevételéhez egy meglévő iterációs alakoptimalizálási algoritmust kiegészítettünk, ezáltal egy új, linearizációra épülő iterációs eljárást dolgoztunk ki, ez a *2. típusú* iteráció.

A tengelyszimmetrikus testek érintkezési feladatának megoldása után, az általunk vizsgált mennyiségek optimalizálása érdekében az érintkező testek alakját nyomásvezérlés segítségével oly módon változtatjuk, hogy a kitűzött célfüggvénynek megfelelően a numerikus megoldás.

A görgő alakú testek alakoptimalizálását módosított nyomásvezérlő függvény segítségével hajtjuk végre olyan esetekre, amikor a testek terhelése nem szimmetrikus és emiatt az optimalizálás nélküli görgők terheléshez közeli végeinél a normál feszültségekben nagy szinguláris értékeket tapasztaltunk. Megvizsgáltuk a súrlódás hatását a gördülő elemek optimális alakjának meghatározásakor.

A numerikus számítási tapasztalatok jól mutatják, hogy p -verziójú végelemek használatakor a magasfokú polinomok felerősítik a szingularitások hatását, oszcillációt okoznak a megoldásban. Érintkezési feladatok esetén ez a feszültségmezőben tapasztalható hullámzás jelentősen csökkenthető, ha az S_c érintkezési tartományt teljesen lefedik a végelemek, azaz nincs olyan elem, amelynek egy része az Ω_p tényleges érintkezési tartományon belül van, míg a másik része az Ω_0 réstartományba esik.

Ez más szóval azt jelenti, hogy a kezdeti C típusú feladatot – mely alatt azt értjük, hogy a deriváltbeli szakadás nem esik az elemhatárra, azaz az elemen belül van – át kell

alakítani B típusú feladatra, amikor is az említett szakadás az elemhatárra esik. Ehhez az S_c tartományra kifutó elemek alakját meg kell változtatni.

A térbeli érintkezési tartomány határát egyetlen, paraméteres térgörbével írjuk le. A *spline technika* alkalmazása nagy hatékonyságú, újszerű modellezési módszer az érintkezés problémájának kezelésére. Nagy előnye, hogy tetszőleges alakú sima görbét lehet vele előállítani és mindössze néhány vezérlő paraméterrel rendkívül rugalmas módon változtatható.

Az elemhatár-mozgatási technikát mind a tengelyszimmetrikus kétváltozós alakoptimalizálási példánál, mind a háromváltozós érintkezésre vonatkozó kontakt feladatoknál felhasználjuk. Általános, háromdimenziós érintkezésre vonatkozó feladatmegoldás a spline-ok és az iterációs pontosító pozicionálás együttes alkalmazásával ezidáig az irodalomban nem ismert.

Számítógépes program került kidolgozásra mind a kétváltozós optimalizálás, mind a háromdimenziós érintkezés p -verziós végeelem módszerrel történő vizsgálatára. A bemutatott technikák iterációs eljárásokra épülnek, melyek során az érintkezésben szerepet játszó elemek mozgatását az algoritmus „adaptív” módon finomítja a lehető legjobb megoldás elérése érdekében. A numerikus számítások a két-, illetve a háromváltozós feladatoknál egyaránt igazolták, hogy nagypontosságú megoldás p -verziójú elemek használatával csak akkor érhető el, ha a számításokat az Ω_p tényleges érintkezési altartományra lokalizált – transzformált – elemhatárokkal végezzük el.

7.1. Új tudományos eredmények összefoglalása

Az értekezés új tudományos eredményeit az alábbi tézisek foglalják össze:

1. Nyomásvezérlést felhasználva új érintkezési-optimalizációs feladatok nyertek megfogalmazást a bélyeg típusú érintkezési feladatok esetén, a redukált feszültségre vonatkozó korláttal, melyeket a 7.1. táblázat sorol fel $\langle 1 \rangle$, $\langle 2 \rangle$, $\langle 6 \rangle$, $\langle 7 \rangle$.

7.1. táblázat: Optimalizált mennyiségek

w_0	előírt elmozdulás maximalizálása
F_p	összeszorító erő maximalizálása
M_T	átvihető csavarónyomaték maximalizálása
D	súrlódási veszteség minimalizálása

2. Az 1. tételben megfogalmazott optimalizációs feladatokra iterációs módszer került kifejlesztésre. A kidolgozott technika több egymást követő iterációból áll. Az 1. típusú iteráció végzi az alakoptimalizálást – lerögzített vezérlőparaméterek mellett –, míg a 2. típusú iteráció a bevezetett feszültségi korlát kielégítését szolgálja, mely alapvetően a linearizálás elvén működik. A nemlineáris optimalizálási feladat megoldására javasolt iterációs technika konvergenciáját a kidolgozott végeelemes program numerikus számításai igazolják $\langle 1 \rangle$, $\langle 7 \rangle$, $\langle 12 \rangle$.
3. Görgő alakú testek újszerű alakoptimalizálása a rugalmas féltér hatásmátrixa alapján $\langle 1 \rangle$, $\langle 5 \rangle$:
 - (a) A görgő alakú testek nyomásvezérlő függvénnyel történő alakoptimalizálására új, módosított vezérlő függvény került kidolgozásra az f_2 és f_3 paraméterek bevezetésével, súrlódás nélküli esetben. A nyomásvezérléssel működő optimalizálást a kidolgozott számítógépi program numerikus szimulációval mutatja be.

- (b) A görgő alakú testek alakoptimalizálása a nyomás vezérlése mellett, a súrlódás hatásának figyelembevételével történt. Ehhez számítógépes program készült, a KALKER által kidolgozott FORTRAN nyelvű program felhasználásával.
4. A háromdimenziós érintkezési feladat új numerikus kezelése $\langle 3 \rangle$, $\langle 4 \rangle$, $\langle 9 \rangle$, $\langle 10 \rangle$.
- (a) Az egyszeresen összefüggő tényleges érintkezési tartományok esetén a kialakuló térbeli érintkezési tartomány határgörbéje egyetlen paraméteres – B-spline, vagy NURBS – térgörbével került leírásra. A véges számú érintkezési-eltérési pontokra illeszkedő zárt interpoláló görbe előállítás a kontrollpontokat egyértelműen meghatározó algebrai egyenletrendszer felállításával és annak megoldásával történik, ennek elvégzésére számítógépes program került kifejlesztésre.
- (b) Az Ω_p tényleges érintkezési tartományhatárra való pozicionáláshoz egy új technika került kidolgozásra. Az elemhatárok eltérési- és réshatárra való illesztéséhez egy „adaptív” elven működő, hatékony iterációs algoritmus lett létrehozva, mely a linearizálás elvén alapszik. Ezáltal a p -verziós elemek alkalmazása továbbra is exponenciális konvergenciát eredményez a hibanorma tekintetében.
- (c) A p -verziójú végelemek felhasználó, Fortran 90 nyelven megírt számítógépi programban, olyan – az irodalomból nem ismert – algoritmus került kidolgozásra, amely a büntetőparaméteres technikával megoldott érintkezési feladat eredményeinek birtokában
- linearizálással, lerögzített vonalak mentén megkeresi az interpolációs pontokat,
 - előállítja az interpolációs spline-t,
 - a hibanégyzet minimuma elv révén megkeresi az érintkezési tartományt magába foglaló végelemek leképzési paramétereit,
 - előállítja az új méretű végelemeket, azaz az új elemhálózathoz megfelelően felépíti az elemek merevségi mátrixát, redukált terhelési vektorát,
- majd a korábbi végelemes programokban is szereplő lépések (algoritmus) révén megoldja az érintkezési feladatot.

7.2. Továbbfejlesztési irányok, lehetőségek

Elsősorban a háromváltozós feladatok tekintetében adunk meg továbbfejlesztési lehetőségeket. Az elvégzett numerikus szimulációk során utaltunk rá, hogy a feszültségmezőben tapasztalható hullámzás – kétdimenziós tapasztalataink alapján – annak tudható be, hogy az érintkezés-eltérési tartományhatáron nagyméretű elemeket alkalmaztunk.

Egyik továbbfejlesztési cél, hogy ezen határ közelében „adaptív” elemsűrítést hajtsunk végre a további pontosítás érdekében.

A vizsgált feladatokban a kialakuló érintkezési tartományt úgy tekintettük, hogy az egyszeresen összefüggő. Elviekben lehetséges azonban olyan geometriai kialakítás is a kölcsönhatásban résztvevő testeknél, amikor az érintkezési helyek nem írhatók le egyetlen folytonos zárt görbével. Ekkor szükség lehet több zárt térgörbe bevezetésére az érintkezési tartományok azonosítása miatt.

További lehetőség az is, hogy súrlódásos érintkezési feladatoknál, az egyetlen zárt érintkezési tartományon belül vizsgáljuk a tapadási és a csúszási altartományok elhelyezkedését. Ezek azonosítása szintén csak több zárt, vagy kapcsolódó térgörbével lehetséges.

A rugalmas-képlékeny anyagmodellű feladatok vizsgálata is megköveteli a képlékeny alakváltozási altartományok pontos azonosítását. A határvonalak, felületek precíz leírására szintén alkalmasak a paraméteres térgörbék.

Nyitott kérdés a rugalmas-képlékeny anyagú testekből felépített mechanikai rendszerek érintkezési feladatának pozicionálási technikát alkalmazó – p -verziós elemek melletti – megoldása először kétdimenziós, majd háromdimenziós feladatoknál. Ez utóbbi esetben a képlékenyen alakváltozott testrészt zárt felülettel határolt, melynek leírására az interpoláló NURBS felületek alkalmasak lehetnek.

Természetesen térbeli feladatok kapcsán is felállíthatók érintkezési-optimalizációs feladatok, melyek vizsgálata szintén egy lehetséges továbbfejlesztési iránya a jelen disszertációban elért eredményeknek.

SUMMARY

The p -extension of the finite element method can be well applicable for solving contact problems in linear elasticity with high accuracy. The discretization of the contact domain with these elements is advantageous since it results in fast convergence and the high order mapping assures accurate geometry for shape optimization.

In the case of problems, where the resulting contact domain is much smaller than the bodies in contact, the solution can be achieved by using the formulae based on the elastic half space theory.

In the thesis two different contact tasks are examined with the use of finite element method.

1. In connection with shape optimization of punch (axially symmetric) problems several new contact optimization tasks are presented with an additional condition for taking the ultimate stress of the real material into account.
2. For three dimensional contact problems a new border positioning technique is introduced to ensure that the edges of elements coincide with the border of the contact domain.

The new contact optimizations have a stress based condition. To take the stress condition into account during shape optimization a new iterative procedure – named as 2^{nd} -type iteration – is introduced which is based on a simple linearization.

To carry out axially symmetric optimizations the shape of the contacting particles are modified by a control function which controls the contact pressure distribution.

The shape optimization of non-centrally loaded rollers are also investigated. The peak values in stresses at the ends of the rollers can be minimized by controlling the contact pressure. The effect of friction is also examined in the case of centrally loaded rolling elements. However, the conclusion is that the influence of friction is not significant for the optimal shape.

Numerical experiments show that the use of high order p -extension finite elements results in oscillation near singular points or edges. In the case of contact problems the calculations can be achieved more precisely by using finite elements which are aligned along the border of contact and separation zones. It means that the numerical procedure ensures that an element is either in full contact, or non-contacting at all, i.e. the initial C -type problem is transformed into B -type task.

To describe the contact border in three dimensions a spline curve is used. The application of spline technique ensures high effectiveness and a new modelling method for solving problems in contact mechanics. A general solution for three dimensional contact problems using spline positioning is not known in scientific literature so far.

A computational program is developed for solving shape optimizations in two dimensions and for handling contact problems with p -extension elements in three dimensions. The proposed algorithms are based on iterational techniques in which the elements are positioned automatically i.e. adaptively in order to achieve more precise results.

The numerical experiments, both in two and three dimensions, prove that highly accurate solutions can only be given with p -extension finite elements if the calculations use only the elements which are transformed to the contact border.

The new scientific results of the dissertation are summarized by the following theses

1. By controlling the contact pressure new contact optimization tasks are defined in the case of the contact of axially symmetric bodies which allow for considering the stress constraint of the material. The optimized quantities are listed in Table 1.

Table 1 Quantities to be optimized

w_0	maximization of the prescribed displacement
F_p	maximization of the compression force
M_T	maximization of torque
D	minimization of frictional power lost

2. For the solution of the optimization tasks defined in thesis 1 a new iterative technique is developed. The introduced method consists of two different sequential iterations. The 1st-type iteration performs shape optimization with fixed control parameters; while the 2nd-type iteration fulfills the condition for the stress constraints, which operates mainly in a linear way. The convergence of the proposed iterative technique, which solves a non-linear optimization, is proved by numerical experiments resulting from finite element calculations.
3. The shape optimization of rolling elements is achieved on the basis of the elastic half space theory.
 - (a) When friction is not taken into account, by controlling the contact pressure distribution the shape of a rolling element is optimized by a modified control function. The optimization process is illustrated by numerical experiments.
 - (b) The shape of a rolling element is optimized by pressure control in which the effect of friction is also taken into account. Numerical calculations demonstrate the results of the proposed algorithm.
4. Handling three dimensional contact problems in a new numerical way.
 - (a) The border of the resulting single connected contact domain is limited by a parametric curve which can be a closed B-spline or NURBS curve. To ensure the interpolation through the contact separation points, a linear algebraic equation system is set and must be solved. A computational program is developed to illustrate interpolation numerically.
 - (b) To position the contact elements along the resulting contact border, a new iterative technique is introduced. The edges of the elements are aligned to the contact separation zone in an adaptive way which ensures accurate convergence in the solution. Henceforward the application of the p -extension finite elements in three dimensions with elements' positioning produces exponential convergence.
 - (c) Using three dimensional p -extension finite elements a new – previously unknown in scientific literature – algorithm is developed which is coded in Fortran 90. On the basis of the solution of the contact problem, which is resolved by a penalty method, the program operates in the following way:
 - the interpolation points are searched along a prescribed direction with linear approximation,

- an interpolation spline is generated,
- the parameters for the approximation of the finite elements are produced on the basis of least square method,
- the newly formed finite elements and the mesh are generated together with the element stiffness and load matrices,

then the contact problem is solved on the basis of the steps (algorithm) used in previous finite elements programs.

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Mindenekelőtt szeretném köszönetemet ezúton is kifejezni témavezetőmnek, Páczelt István professzornak, aki bevezetett engem a tudományos életbe, és útmutatást nyújtott szűkebb kutatási területem kiválasztásához.

A disszertációm elkészítéséhez szükséges szakmai alapokat a Miskolci Egyetem Mechanikai Tanszéke jelentette, így köszönet illeti a Tanszék szinte valamennyi munkatársát. Külön kiemelném azonban első mechanika tanáromat Nándori Frigyeszt, aki két éven át oktatott szakirányos hallgatóként, és a Mechanikai Tanszéken marasztalt.

Öröm volt számomra, hogy a Tanszék vezetőjétől Szeidl György professzortól az értekezés megírása során folyamatos támogatást kaptam. Köszönöm Kozák Imre és Ecsedi István professzorok építő kritikai megjegyzéseit, melyeket a disszertációm alapos átolvasása után kaptam.

A numerikus kísérletek sikeres elvégzéséhez nyújtott legnagyobb támogatást Szabó Tamás tudományos főmunkatársnak köszönhetem, aki idejét nem kímélve segített nekem a programhibák felderítésében.

Köszönettel tartozom továbbá az Országos Tudományos Kutatási Alap által az OTKA T037759 pályázaton nyújtott támogatásért, valamint a Magyar Tudományos Akadémia fiatal kutatói ösztöndíjjal nyert munka lehetőségért.

S végül, de nem utolsó sorban köszönöm feleségemnek Erikának, hogy amellet, hogy a disszertációm alapos nyelvi „lektorálását” elsőként elvégezte, folyamatos biztos támaszt jelent számomra.

Táblázatok jegyzéke

4.1. Paraméterértékek $m = 8$ interpolációs ponthoz	44
4.2. Ciklikus csomóérték vektor ($p = 4, m = 8$)	45
4.3. Interpolációs pontok koordinátái	46
4.4. Numerikusan előállított kontrollpontok	47
5.1. Különböző terhelések esetén számított megoldások a P7 feladatra	65
5.2. Különböző terhelések esetén számított megoldások a P9 feladatra	67
6.1. Különböző terhelési esetekhez tartozó w_0 előírt elmozdulás	76
6.2. Különböző terhelési esetekhez tartozó HERTZ-féle közelítő megoldások	77
6.3. Különböző terhelési esetekhez tartozó numerikus megoldások ($p = 8$)	82
7.1. Optimalizált mennyiségek	97
A.1. Egydimenziós LAGRANGE-féle alakfüggvények $p = 1, 2, 3$	113
A.2. Egydimenziós LEGENDRE-féle alakfüggvények $p = 1, \dots, 6$	114
A.3. Az f_1 él vonatkozásában használt indexértékek	120
A.5. Az elem belső alakfüggvényeinél használt indexértékek	120

Ábrajegyzék

1.1. Hasáb alakú test mozgatása	2
1.2. Kötömb mozgatása az ókori Egyiptomban	3
2.1. Két test érintkezési feladata	9
2.2. Két test lehetséges érintkezése: <i>a.</i>) normál; <i>b.</i>) érintő irányú mennyiségek .	11
2.3. Tapadás és csúszás az érintkezési tartományon	12
3.1. Térbeli globális (x, y, z) és térbeli lokális (t_x, t_y, n_c) koordinátarendszerek .	20
3.2. p_n nyomásértékek közelítései	24
3.3. Feltételezett érintkezési tartomány jellemző méretei	29
3.4. Figyelembe vehető szimmetria esetek	29
3.5. Fiktív hengerek hozzáadása	30
3.6. Fiktív hengerek különböző szimmetriák esetén	30
4.1. Három 0-ad fokú B-spline alapfüggvény	33
4.2. $(p - 1)$ -ed fokú B-spline alapfüggvények előállítási sémája	34
4.3. Két 1. fokú B-spline alapfüggvény	34
4.4. Egy 2. fokú B-spline alapfüggvény	35
4.5. Nyitott 3-ad fokú B-spline görbe	36
4.6. Rögzített végű 3-ad fokú B-spline görbe	36
4.7. Zárt 3-ad fokú B-spline görbe	37
4.8. 3-ad fokú B-spline görbe kontrollpontjainak mozgatása	38
4.9. Az (x, y, w) homogén koordináták értelmezése	39
4.10. Interpoláló görbe és a t_i paraméterek kapcsolata	41
4.11. Numerikusan előállított zárt interpoláló térgörbe	47
5.1. A $V(\mathbf{x})$ nyomásmegoszlást vezérlő függvény	49
5.2. Érintkező hengerek geometriai és terhelési jellemzői	54
5.3. <i>a.</i>) Hengerszerű test és rugalmas féltér érintkezése geometria és terhelés, <i>b.</i>) Feltételezett érintkezési tartomány jellemzői	59
5.4. A testek végeselemes felosztása és különböző számított jellemzők a P4 -es optimalizációra	61
5.5. A testek közötti kezdeti távolság a P4 -es optimalizációra	61
5.6. A felső testre meghatározott feszültségeloszlások a P4 -es optimalizációra .	62
5.7. Végeselemes felosztás és különböző számított jellemzők a P7 -es optimalizá- cióra	63
5.8. A testek közötti kezdeti távolság változása a P7 -es optimalizációra	64
5.9. A felső testre meghatározott feszültségeloszlások a P7 -es optimalizációra .	65
5.10. Végeselemes felosztás és különböző számított jellemzők a P9 -es optimalizá- cióra	66
5.11. A testek közötti kezdeti távolság változása a P9 -es optimalizációra	67
5.12. Feszültségmező változása a P9 -es optimalizációra	68
5.13. Görgő alakoptimalizálása állandó p_n nyomás mellett	69

5.14. Görgő alakoptimalizálása változó p_n nyomás mellett	70
5.15. Görgő alakoptimalizálása súrlódás mellett	71
5.16. Érintkezési nyomás és a csúsztató feszültség	71
5.17. Csúszási és tapadási tartományok	72
5.18. Optimális alak súrlódásos és súrlódás nélküli érintkezéskor	72
6.1. Háromdimenziós érintkezési feladat	76
6.2. A kijelölt végeelem-felosztások, egyenes és görbe oldalú elemekkel	77
6.3. Relatív hiba változása, különböző p fokszám alkalmazásakor	78
6.4. A z irányú elmozdulásmező ($w_0 = 4.0 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$, $p = 8$)	78
6.5. A $-\sigma_z$ feszültségmező ($w_0 = 4.0 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$, $p = 8$)	79
6.6. Sugár keresése interpolációval	80
6.7. A kidolgozott 3D-s program egyszerűsített végrehajtási sémája	81
6.8. Érintkezési nyomás eloszlása ($i_{\text{terh}} = 1$)	82
6.9. Az érintkezési tartomány változása ($i_{\text{terh}} = 1$)	83
6.10. Érintkezési tartomány alakja különböző terhelésekre ($i_{\text{terh}} = 1, \dots, 5$)	84
6.11. Az e relatív hiba változása ($i_{\text{terh}} = 1$)	84
6.12. A z irányú elmozdulásmező ($i_{\text{terh}} = 1$, $p = 8$)	85
6.13. A $-\sigma_z$ feszültségmező ($i_{\text{terh}} = 1$, $p = 8$)	85
6.14. Geometriai adatok és kezdeti végeelem-háló nemszimmetrikus elrendezésnél	86
6.15. Az e relatív hiba változása a p polinomfokszám függvényében ($i_{\text{terh}} = 1$)	87
6.16. Az érintkezési tartomány változása nemszimmetrikus esetre ($i_{\text{terh}} = 1$)	87
6.17. Érintkezési nyomás eloszlása nemszimmetrikus esetre ($i_{\text{terh}} = 1$)	88
6.18. A z irányú elmozdulásmező nemszimmetrikus elrendezésnél ($i_{\text{terh}} = 1$, $p = 8$)	89
6.19. A $-\sigma_z$ feszültségmező nemszimmetrikus elrendezésnél ($i_{\text{terh}} = 1$, $p = 8$)	89
6.20. Érintkezési tartomány változása, nemszimmetrikus terhelési esetekre	90
6.21. A paraboloid felületű bélyeg x tengely menti meridián metszete	91
6.22. A paraboloid felületű bélyeg y tengely menti meridián metszete	91
6.23. A paraboloid felületű merev bélyeg alakja	92
6.24. Az érintkezési tartomány változása ($w_0 = 5.0 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$)	92
6.25. Az érintkezési nyomás változása az x tengely mentén ($w_0 = 5.0 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$)	93
6.26. Az e relatív hiba változása ($p = 2 \dots 8$)	93
6.27. A z irányú elmozdulásmező ($w_0 = 5.0 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$, $p = 8$)	94
6.28. A $-\sigma_z$ feszültségmező ($w_0 = 5.0 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$, $p = 8$)	94
A.1. A h -, p - és hp -verziós VEM konvergenciája szingularitásokat tartalmazó, kétdimenziós lineáris rugalmasságtani feladatokra	109
A.2. Kétdimenziós négyszög elem: csomópontok és élek sorszámozása	115
A.3. PASCAL-háromszög, $p_\xi = p_\eta = 3$ esetén az $\mathcal{S}_{ts}^{p_\xi, p_\eta}$ csonkolt és az $\mathcal{S}_{ps}^{p_\xi, p_\eta}$ teljes tér polinomiális függvényeinek halmaza	116
A.4. A $(-1, -1)$ csomópontokhoz tartozó alakfüggvény $N_{1,1}^1(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)$	117
A.5. Az $\eta = -1$ élhez tartozó $N_{2,1}^{\epsilon_1}$ alakfüggvény $i = 2$ esetén	117
A.6. Az $i = j = 2$ -höz tartozó belső alakfüggvény	118
A.7. a.) Szabadságfokok számának változása egy kétdimenziós négycsomópontú p -verziós elem esetén b.) Belső alakfüggvények aránya százalékosan	118
A.8. Egy hagyományos hatoldalú térbeli elem	119
A.9. a.) Szabadságfokok számának változása egy háromdimenziós 8 csomópontú p -verziós elem esetén b.) A belső alakfüggvények aránya százalékosan	120
B.1. A terhelés megoszlását félgömb ordináták jellemzik	122
B.2. Nemszinguláris pontban érintkező testek	123
B.3. Rugalmas gömbök érintkezése	125

C.1. A testek közötti távolság változása a P10 -es optimalizációra	127
C.2. A felső testre meghatározott feszültségeloszlások a P10 -es optimalizációra	128
C.3. A testek közötti távolság változása a P11 -es optimalizációra	128
C.4. A felső testre meghatározott feszültségeloszlások a P11 -es optimalizációra	129
C.5. Érintkezési nyomás eloszlása, szimmetrikus esetben ($i_{\text{terh}} = 2$)	130
C.6. Az érintkezési tartomány változása, szimmetrikus esetben ($i_{\text{terh}} = 2$)	130
C.7. A z irányú elmozdulásmező, szimmetrikus esetben ($i_{\text{terh}} = 2$)	131
C.8. A $-\sigma_z$ feszültségmező, szimmetrikus esetben ($i_{\text{terh}} = 2$)	131
C.9. Érintkezési nyomás eloszlása, szimmetrikus esetben ($i_{\text{terh}} = 3$)	132
C.10. Az érintkezési tartomány változása, szimmetrikus esetben ($i_{\text{terh}} = 3$)	132
C.11. A z irányú elmozdulásmező, szimmetrikus esetben ($i_{\text{terh}} = 3$)	133
C.12. A $-\sigma_z$ feszültségmező, szimmetrikus esetben ($i_{\text{terh}} = 3$)	133
C.13. Érintkezési nyomás eloszlása, szimmetrikus esetben ($i_{\text{terh}} = 4$)	134
C.14. Az érintkezési tartomány változása, szimmetrikus esetben ($i_{\text{terh}} = 4$)	134
C.15. A z irányú elmozdulásmező, szimmetrikus esetben ($i_{\text{terh}} = 4$)	135
C.16. A $-\sigma_z$ feszültségmező, szimmetrikus esetben ($i_{\text{terh}} = 4$)	135
C.17. Érintkezési nyomás eloszlása, szimmetrikus esetben ($i_{\text{terh}} = 5$)	136
C.18. Az érintkezési tartomány változása, szimmetrikus esetben ($i_{\text{terh}} = 5$)	136
C.19. A z irányú elmozdulásmező, szimmetrikus esetben ($i_{\text{terh}} = 5$)	137
C.20. A $-\sigma_z$ feszültségmező, szimmetrikus esetben ($i_{\text{terh}} = 5$)	137
C.21. Érintkezési nyomás eloszlása, nemszimmetrikus esetben ($i_{\text{terh}} = 2$)	138
C.22. Az érintkezési tartomány változása, nemszimmetrikus esetben ($i_{\text{terh}} = 2$)	138
C.23. A z irányú elmozdulásmező, nemszimmetrikus esetben ($i_{\text{terh}} = 2$)	139
C.24. A $-\sigma_z$ feszültségmező, nemszimmetrikus esetben ($i_{\text{terh}} = 2$)	139
C.25. Érintkezési nyomás eloszlása, nemszimmetrikus esetben ($i_{\text{terh}} = 3$)	140
C.26. Az érintkezési tartomány változása, nemszimmetrikus esetben ($i_{\text{terh}} = 3$)	140
C.27. A z irányú elmozdulásmező, nemszimmetrikus esetben ($i_{\text{terh}} = 3$)	141
C.28. A $-\sigma_z$ feszültségmező, nemszimmetrikus esetben ($i_{\text{terh}} = 3$)	141
C.29. Érintkezési nyomás eloszlása, nemszimmetrikus esetben ($i_{\text{terh}} = 4$)	142
C.30. Az érintkezési tartomány változása, nemszimmetrikus esetben ($i_{\text{terh}} = 4$)	142
C.31. A z irányú elmozdulásmező, nemszimmetrikus esetben ($i_{\text{terh}} = 4$)	143
C.32. A $-\sigma_z$ feszültségmező, nemszimmetrikus esetben ($i_{\text{terh}} = 4$)	143
C.33. Érintkezési nyomás eloszlása, nemszimmetrikus esetben ($i_{\text{terh}} = 5$)	144
C.34. Az érintkezési tartomány változása, nemszimmetrikus esetben ($i_{\text{terh}} = 5$)	144
C.35. A z irányú elmozdulásmező, nemszimmetrikus esetben ($i_{\text{terh}} = 5$)	145
C.36. A $-\sigma_z$ feszültségmező, nemszimmetrikus esetben ($i_{\text{terh}} = 5$)	145

A. függelék

HIERARCHIKUS ALAKFÜGGVÉNYEK TERE

Az utóbbi években megnőtt az érdeklődés a magasfokú approximációt alkalmazó végelemek iránt. Ez elsősorban a módszer nagy konvergencia sebességével magyarázható, másrészt a magasfokú végelemek megbízható – *locking* mentes, azaz a megoldási folyamatot nem gátló – eredményt szolgáltatnak. Ebben a részben a végelem-módszer különböző diszkretizálási eljárásait ismertetjük röviden, különös tekintettel a magasfokú végelemekre. Szemléltetjük egy-, két- és háromdimenzióban a legelterjedtebben használt alakfüggvényekre épülő végelemek előállításának módszerét.

A.1. A h -, p - és a hp -verzió alapvető jellemzői

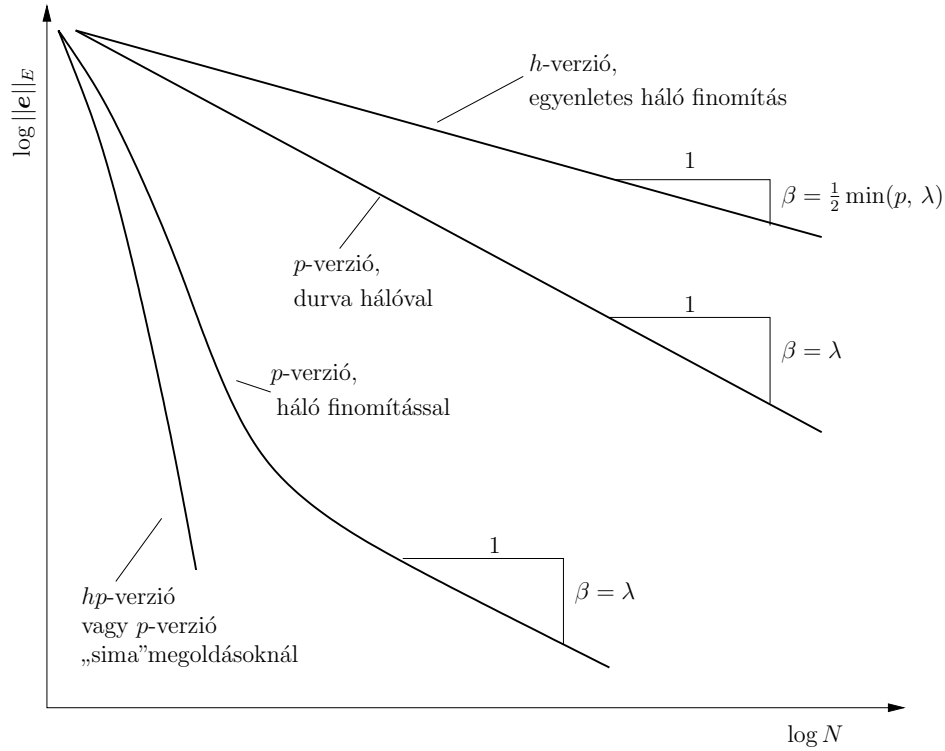
A végelem-módszernek három különböző típusáról szokás beszélni, annak alapján, hogy milyen módon történik a megoldás pontosítása. Ezek szerint megkülönböztetjük a h -verziót, a p -verziót és a kettő kombinációját jelentő hp -verziót. Ha a megoldás javítását úgy érjük el, hogy a végelemek számát növeljük – azaz csökkentjük az elemek méretét – akkor h -verziós végelem-módszerről van szó. A p -verzió esetén a háló változatlanul marad, de az elemeken működő alakfüggvények p fokszámát növeljük, ami szintén a feladatban szereplő ismeretlenek számának emelését jelenti, amivel úgyszintén pontosabb megoldáshoz jutunk. Több publikáció bizonyítja, hogy a p -verziós technika hatékony approximációt nyújt, és gyakran jobb megoldást szolgáltat, mint a h -verziós elemek használata [6, 44, 60, 62]. A p -verziós végelemek még a szingularitásokat tartalmazó feladatok esetén is exponenciális konvergenciát mutatnak az energianorma tekintetében [61]. Gyakorlati szempontból kielégítő pontosság úgy érhető el, ha a szinguláris pontok, vonalak elemhatárra kerülnek, valamint ha a szingularitásokat tartalmazó helyek, vonalak környezetében megfelelő finomítást hajtunk végre a végelem hálózaton [44].

A végelem-módszer alapvető feladata, hogy közelítő $\mathbf{u}_{VEM}$ megoldást találjon például egy érintkezési feladat kapcsán felállítható rugalmasságtani feladatra. Természetesen ez a megoldás a kinematikailag lehetséges elmozdulásmezők közül kerül ki, amiket a végelem-módszer nyújtotta lehetőségek segítségével közelítünk és ezekből választjuk ki a legmegfelelőbbet. A feladat tényleges $\mathbf{u}_{ex}$ megoldását nem ismerjük, de tudjuk azt, hogy e két mennyiség között eltérés van, amit a számítás hibájának nevezünk:

$$\mathbf{e} = \mathbf{u}_{ex} - \mathbf{u}_{VEM} \quad \forall \mathbf{r} \in V. \quad (\text{A.1})$$

Az $\mathbf{u}_{VEM}$ megoldás hibájának becslésére többféle lehetőség van, de mivel a végelem-módszer az alakváltozási energia hibájának minimalizálásán alapul, ezért ez a leggyakoribb mennyiség, amivel jellemzik a közelítés pontosságát. Az nagyon hasznos információ, ha a végelemites számítás elvégzése előtt tisztában vagyunk azzal, hogy a hiba milyen módon fog csökkenni h -, p -, vagy hp -verzió választása esetén. Több publikációt találhatunk a hiba előzetes meghatározására vonatkozóan, mind a három típusú végelem-módszer kapcsán

[4, 5, 19, 20], illetve tekinthetjük az ezekben található hivatkozásokat is. Az itt bemutatott konvergencia jelleg SZABÓ és BABUŠKA könyve [60] alapján kerül bemutatásra.



A.1. ábra: A h -, p - és hp -verziós VEM konvergenciája szingularitásokat tartalmazó, kétdimenziós lineáris rugalmasságtani feladatokra

Az A.1. ábrán logaritmikus skálán látható a szingularitásokat is tartalmazó kétdimenziós rugalmasságtani feladatokra vonatkozó energianormában vett hiba alakulása a feladatban szereplő ismeretlenség függvényében. Algebrai megfogalmazásban az egyenletes hálóra épülő h -verziós és a durva hálóval végzett p -verziós számításoknál a következő feltételt tudjuk a hiba normájára:

$$\|e\|_E \leq \frac{k}{N^\beta}, \quad (\text{A.2})$$

ahol k és β pozitív állandók, míg N a feladatban szereplő ismeretlenek száma. Logaritmikus formába átírva az (A.2) egyenlőtlenséget, azt kapjuk, hogy

$$\log \|e\|_E \approx \log k - \beta \log N, \quad (\text{A.3})$$

melyből kiolvashatjuk, hogy logaritmikus skálán β a konvergencia egyenes vonalának negatív a meredeksége. Ezért β a konvergencia asszimptotikus mértéke, mely a közelítő polinomok fokszámától és a megoldás simaságától függ. Ha a h -verziós számításokat tekintjük, mégpedig egyenletes, vagy közel egyenletes végelem-hálóval, akkor a konvergencia mértékére azt kapjuk, hogy $\beta = \frac{1}{2} \min(p, \lambda)$, ahol p a közelítő polinomok fokszáma, λ a megoldás simaságának mérőszáma. A p -verziós elemek konvergencia mértéke $\beta = \lambda$ éppen duplája a h -verziós elemekének abban az esetben, ha a szingularitást okozó pontok csomópontokba esnek. Ellenkező esetben a két módszer hasonló konvergenciát mutat.

A lineáris rugalmasságtani feladatok esetében legtöbbször éles sarkok, élek hordozzák a szingularitást, azonban ezekre a helyekre rendszerint csomópontok kerülnek. Így azt várjuk, hogy az egyenletes elemfelosztással rendelkező p -verziós számítások kétszer olyan gyorsan konvergálnak a megoldáshoz, mint a hasonlóan egyenletes felosztású h -verziós

elemek. Léteznek azonban olyan h -verziós eljárások – az „adaptív” h -verziós módszerek –, amikor elemekre vonatkozó utólagos hibaanalízis segítségével úgy történik, illetve addig történik az elemhálózat módosítása, amíg minden elemre közel azonos hiba nem adódik. Ekkor a konvergencia mértéke csak a közelítő polinomok fokszámától függ, azaz $\beta = \frac{1}{2}p$.

Megfigyelhetjük, hogy a hp -verziós módszer energianormában vett hibája gyorsabb konvergenciát mutat, mint a tisztán h - vagy p -verziós számítások; bővebben lásd az [60] könyvet. Látható, hogy a görbe negatív meredeksége a szabadsági fokok számának emelkedésével növekszik. Az optimális elemméret és fokszám kiválasztásához nincs általános érvényű elv. Azonban megállapítható, hogy a szinguláris helyek környezetében kis elemméret választása kívánatos, továbbá a közelítő polinomok fokszáma is az elemmérettel arányosan változzon, úgy hogy a legnagyobb elemeken a nagyobb fokszámú függvényeket, míg a legkisebb elemeken a kis fokszámú közelítést alkalmazzuk. Az A.1. ábrán látható exponenciális hibacsökkenés a következő függvénnyel jellemezhető:

$$\|e\|_E \leq \frac{k}{\exp(\gamma N^\theta)}, \quad (\text{A.4})$$

ahol k , γ és θ ismert pozitív állandók. Az A.1. ábrán található negyedik görbe azt mutatja, hogy a tisztán p -verziós elemek alkalmazása, melyeket egy több lépcsőben finomított végeelem-hálózatra működtetünk, még megfelelően gyors konvergenciát nyújt. A megoldás hibája kezdetben – a jól megválasztott végeelem-hálózatnak köszönhetően – exponenciális változást mutat, azonban az ismeretlenek számának növekedésével a konvergencia lelassul az (A.2)-ben felírt algebrai mértékre. Itt a szabadsági fokok számának emelkedése attól következik be, hogy egységesen minden elemen növeljük a p fokszámot, azaz nem elemmérettől függően. Tehát a p -verziós számításokkal a megfelelő pontosság könnyen elérhető, ha előzetesen rendelkezünk információval a megvalósuló egzakt megoldásról, és így a végeelem-hálózat ennek megfelelően készíthető el.

A p -verziós végeelem-módszernél, a magas konvergencia sebesség mellett, további előnyként szokás említeni a számítás megbízhatóságát a „locking” – vagy leállás – jelenségével szemben. Ugyanis számtalan, a gyakorlat szempontjából lényeges feladatnál kimutatták, hogy a polinom fokszámának egy bizonyos mérték fölé emelésével a p -verziós technika „locking” mentes [9, 60]. Például a vékony lemezek REISSNER-MIDLIN elméletében ismeretes ellentmondás – idegen szóval „shear locking” – nem áll fenn tovább, ha az alakfüggvényekben szereplő polinomok fokszámát $p \geq 4$ -re választjuk [59]. A p -verziós elemek előállításakor elengedhetetlen az alakfüggvényeket szolgáltató terek megvizsgálása, melyről a következő szakaszokban lesz szó.

A.2. Egydimenziós feladatok

A.2.1. LEGENDRE-polinomok

A p -verziós számításoknál alapvető szerepet játszanak az ortogonális polinomok. A hierarchikus alakfüggvények alapját az ortogonális LEGENDRE polinomok egy halmaza jelenti. Mielőtt a LEGENDRE polinomokat megvizsgálánk, tekintsük át röviden az ortogonális polinomok főbb, számunkra lényeges tulajdonságait [15].

A $P_n(x)$ és $P_m(x)$ polinomok ortogonálisak a $w(x)$ súlyfüggvény szerint az $I = (a, b)$ véges vagy végtelen intervallumon, ha a következő egyenlet teljesül $\forall m, n$ -re

$$\int_a^b w(x) P_n(x) P_m(x) dx \begin{cases} \neq 0 & \text{ha } n = m, \\ = 0 & \text{egyébként.} \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

Egy további megszorítást jelent, ha a következő kifejezés is teljesül

$$\int_a^b w(x) P_n(x) P_m(x) dx = \delta_{nm} . \quad (\text{A.6})$$

Ekkor az mondjuk, hogy a $P_n(x)$ és a $P_m(x)$ polinomok ortonormáltak egymásra. A δ_{nm} KRONECKER szimbólum definíciója

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1 & \text{ha } n = m, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

A $\{h_n(x)\}$ ortonormált bázisfüggvények könnyen előállíthatóak egy $\{f_n(x)\}$ tetszőleges lineárisan független függvényhalmazból SCHMIDT algoritmusa alapján.

1. Az első lépés egy $\{g_n(x)\}$ ortogonális bázisrendszer létrehozása az $\{f_n(x)\}$ függvények egy lineáris kombinációjával, melynek módja a következő:

$$\begin{aligned} g_1(x) &= f_1(x) \\ g_2(x) &= f_2(x) - \frac{(f_2(x), g_1(x))}{(g_1(x), g_1(x))} g_1(x) && \perp g_1(x) \\ g_3(x) &= f_3(x) - \frac{(f_3(x), g_1(x))}{(g_1(x), g_1(x))} g_1(x) - \frac{(f_3(x), g_2(x))}{(g_2(x), g_2(x))} g_2(x) && \perp g_1(x), \perp g_2(x) \\ &\vdots \\ g_n(x) &= f_n(x) - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(f_n(x), g_i(x))}{(g_i(x), g_i(x))} g_i(x) && \perp g_1(x), \dots, \perp g_{n-1}(x) \end{aligned}$$

ahol $(\cdot, \cdot)$ szimbólum két függvény belső vagy skaláris szorzatát jelenti, azaz

$$(f(x), g(x)) = \int_{-1}^1 f(x) g(x) dx, \quad (\text{A.8})$$

továbbá $g_1(x) \perp g_2(x)$ azt jelenti, hogy

$$(g_1(x), g_2(x)) = 0. \quad (\text{A.9})$$

2. A második lépésben a $\{g_n(x)\}$ bázis normalizálása történik, azaz

$$h_n(x) = \frac{1}{\sqrt{(g_n(x), g_n(x))}} g_n(x). \quad (\text{A.10})$$

Ebben az eljárásban feltételeztük, hogy a súlyfüggvény értéke $w(x) = 1$ állandó.

Ezen eljárással előállított $\{g_n(x)\}$ bázisrendszer ortogonális tulajdonsága könnyen ellenőrizhető egyszerű visszahelyettesítéssel a $(g_i(x), g_j(x))$ skalárszorzatba $j = 1, \dots, i-1$ és $i = 2, \dots, n$ -re.

Az $L_n(x)$ LEGENDRE polinomok kielégítik a LEGENDRE differenciálegyenletet

$$\left[(1-x^2) y' \right]' + n(n+1) y = 0, \quad x \in (-1, 1), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{A.11})$$

Az (A.11) egyenlet megoldásait megkaphatjuk egyrészt a RODRIGUEZ formula alapján

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad x \in (-1, 1), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (\text{A.12})$$

másrészt a BONNET-féle rekurzív formula segítségével:

$$L_n(x) = \frac{1}{n} [(2n-1)x L_{n-1}(x) - (n-1)L_{n-2}(x)], \quad x \in (-1, 1), \quad n = 2, 3, 4, \dots \quad (\text{A.13})$$

A LEGENDRE polinomok ortogonálisak egymásra – az (A.5) alapján – az $I = (-1, 1)$ intervallumon, $w(x) = 1$ súllyal:

$$\int_{-1}^1 L_n(x) L_m(x) dx = \begin{cases} \frac{2}{2n+1} & \text{ha } n = m, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

Az első kilenc LEGENDRE polinom a következő formában adódik:

$$\begin{aligned} L_0(x) &= 1, \\ L_1(x) &= x, \\ L_2(x) &= \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}, \\ L_3(x) &= \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x, \\ L_4(x) &= \frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2 + \frac{3}{8}, \\ L_5(x) &= \frac{63}{8}x^5 - \frac{35}{4}x^3 + \frac{15}{8}x, \\ L_6(x) &= \frac{231}{16}x^6 - \frac{315}{16}x^4 + \frac{105}{16}x^2 - \frac{5}{16}, \\ L_7(x) &= \frac{429}{16}x^7 - \frac{693}{16}x^5 + \frac{315}{16}x^3 - \frac{35}{16}x, \\ L_8(x) &= \frac{6435}{128}x^8 - \frac{3003}{32}x^6 + \frac{3465}{64}x^4 - \frac{315}{32}x^2 + \frac{35}{128}. \end{aligned}$$

A.2.2. Hierarchikus alakfüggvények egydimenzióban

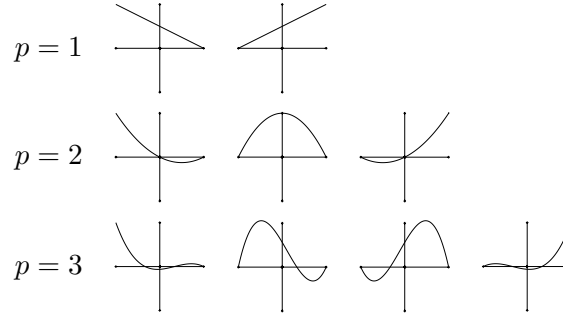
A SZABÓ és BABUŠKA által írt könyvet követve [60], ebben a szakaszban bemutatjuk a hierarchikus függvények implementálását, mely bármely polinomfokszámra érvényes. Nyilvánvaló, hogy többféle bázisfüggvény-rendszer létezik, melyek alkalmasak a végeselemen belüli approximációra. Most először tekintsük a hagyományosnak mondható, egyszerűen felépíthető LAGRANGE polinomok halmazát:

$$N_i^p(\xi) = \prod_{j=1, j \neq i}^{p+1} \frac{\xi - \xi_j}{\xi_i - \xi_j}. \quad (\text{A.15})$$

Azon ξ_j pontokat, ahol teljesül, hogy

$$N_i^p(\xi_j) = \delta_{ij}, \quad (\text{A.16})$$

A.1. táblázat: Egydimenziós LAGRANGE-féle alakfüggvények $p = 1, 2, 3$



csomópontoknak nevezzük. Általában a csomópontokat úgy választjuk meg, hogy közöttük egyenlő távolság legyen, azaz

$$\xi_j = -1 + 2\frac{j-1}{p}, \quad j = 1, \dots, p+1. \quad (\text{A.17})$$

Az (A.15) által definiált függvények minden p foksámra más-más függvényhalmazt adnak. Például

- $p = 1$ esetén

$$N_1^1(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi),$$

$$N_2^1(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi),$$

- $p = 2$ esetén

$$N_1^2(\xi) = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1),$$

$$N_2^2(\xi) = (1 + \xi)(1 - \xi),$$

$$N_3^2(\xi) = \frac{1}{2}(\xi + 1)\xi,$$

- $p = 3$ esetén

$$N_1^3(\xi) = -\frac{1}{16}(3\xi + 1)(3\xi - 1)(\xi - 1),$$

$$N_2^3(\xi) = \frac{9}{16}(\xi + 1)(3\xi - 1)(\xi - 1),$$

$$N_3^3(\xi) = -\frac{9}{16}(\xi + 1)(3\xi + 1)(\xi - 1),$$

$$N_4^3(\xi) = \frac{1}{16}(\xi + 1)(3\xi + 1)(3\xi - 1).$$

Bármely kiválasztott p polinomfoksámra teljesül, hogy az adott polinomfoksámhoz tartozó alakfüggvények összege egy, azaz

$$\sum_{i=1}^{p+1} N_i^p(\xi) = 1. \quad (\text{A.18})$$

Nyilvánvaló, hogy minden függvény – mely megadható a hagyományos bázisfüggvények által – ugyanúgy közelíthető hierarchikus bázisfüggvények segítségével is. Az alapvető különbség a két bázis között az, hogy hierarchikus esetben az összes alacsonyabb fokú függvény szerepel a magasabb fokú bázisfüggvények halmazában, ahogy ezt az A.2. táblázat is illusztrálja. Az egydimenziós hierarchikus alakfüggvények halmazát SZABÓ és BABUŠKA [60] könyve alapján a következő formában adjuk meg:

$$N_1(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi), \quad (\text{A.19})$$

$$N_2(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi), \quad (\text{A.20})$$

$$N_i(\xi) = \phi_{i-1}(\xi), \quad i = 3, 4, \dots, p+1, \quad (\text{A.21})$$

ahol

$$\phi_i(\xi) = \frac{\sqrt{2i-1}}{2} \int_{-1}^{\xi} L_{i-1}(x) dx = \frac{1}{\sqrt{4i-2}} [L_i(\xi) - L_{i-2}(\xi)], \quad i = 2, 3, \dots, \quad (\text{A.22})$$

melyben $L_i(\xi)$ az előzőekben bemutatott LEGENDRE polinomok (A.12) halmaza.

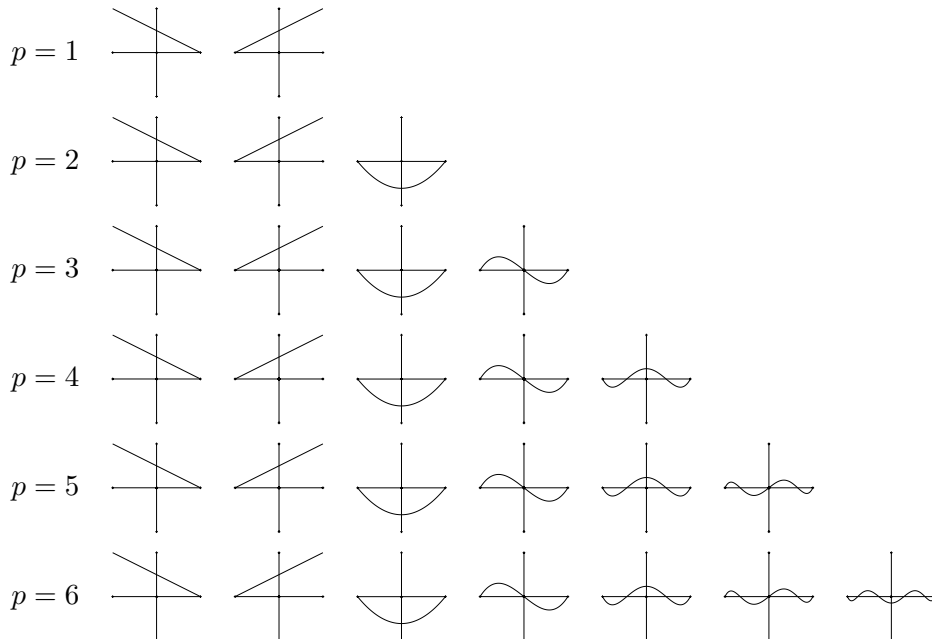
$N_1(\xi)$, $N_2(\xi)$ lineáris alakfüggvényeket *csomóponti alakfüggvényeknek* – idegen szóval *nodal modes*-nak – nevezzük, mivel a többi függvénynek a csomópontbeli értéke zérus, azaz

$$N_i(-1) = N_i(1) = 0, \quad i = 3, 4, \dots. \quad (\text{A.23})$$

Ezeket az $N_i(\xi)$, $i = 3, 4, \dots$ függvényeket *belső* vagy *buborék alakfüggvényeknek* – idegen szóval *internal-, bubble modes*-nak – nevezzük. A LEGENDRE polinomok ortogonalitási tulajdonsága abban áll, hogy teljesül a következő egyenlet

$$\int_{-1}^1 \frac{dN_i}{d\xi} \frac{dN_j}{d\xi} d\xi = \delta_{ij}, \quad i, j \geq 3. \quad (\text{A.24})$$

A.2. táblázat: Egydimenziós LEGENDRE-féle alakfüggvények $p = 1, \dots, 6$



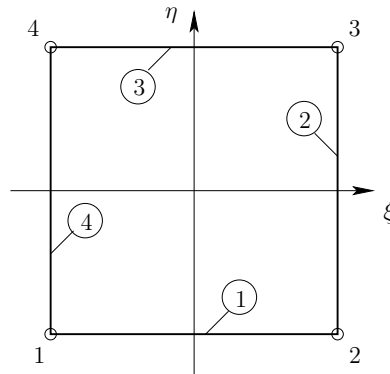
A hierarchikus alakfüggvények $p = 1, 2, 3, \dots, 8$ fokszámra a következő alakúak:

$$\begin{aligned}
 N_1(\xi) &= \frac{1}{2}(1 - \xi), \\
 N_2(\xi) &= \frac{1}{2}(1 + \xi), \\
 N_3(\xi) &= \frac{\sqrt{6}}{4}(\xi^2 - 1), \\
 N_4(\xi) &= \frac{\sqrt{10}}{4}\xi(\xi^2 - 1), \\
 N_5(\xi) &= \frac{\sqrt{14}}{16}(5\xi^4 - 6\xi^2 + 1), \\
 N_6(\xi) &= \frac{3\sqrt{2}}{16}\xi(7\xi^4 - 10\xi^2 + 3), \\
 N_7(\xi) &= \frac{\sqrt{22}}{32}(21\xi^6 - 35\xi^4 + 15\xi^2 - 1), \\
 N_8(\xi) &= \frac{\sqrt{26}}{32}\xi(33\xi^6 - 63\xi^4 + 35\xi^2 - 5), \\
 N_9(\xi) &= \frac{\sqrt{30}}{256}(429\xi^8 - 924\xi^6 + 630\xi^4 - 140\xi^2 + 5).
 \end{aligned}$$

Ezek után már könnyű a két-, illetve háromdimenziós feladatok alakfüggvényeit előállítani, egyszerűen csak az egydimenziós hierarchikus alakfüggvények szorzatait kell képezni. A következőkben a két-, illetve a háromdimenziós alakfüggvényeket állítjuk elő a 2D-s négyszög, illetve a 3D-s hatoldalú elemekre.

A.3. Kétdimenziós feladatoknál használt alakfüggvények

A kétdimenziós p -verziós elemekre vonatkozó alakfüggvényeket a SZABÓ és BABUŠKA [60] könyvében bemutatott approximációs függvények alapján írjuk fel. Az A.2. ábrán egy hagyományos négyszögelemet ábrázoltunk a $\xi - \eta$ tartományon, ahol $\xi = [-1, 1]$ és $\eta = [-1, 1]$.



A.2. ábra: Kétdimenziós négyszög elem: csomópontok és élek sorszámozása

Két különböző típusú approximációs tér alakfüggvényeit fogjuk vizsgálni:

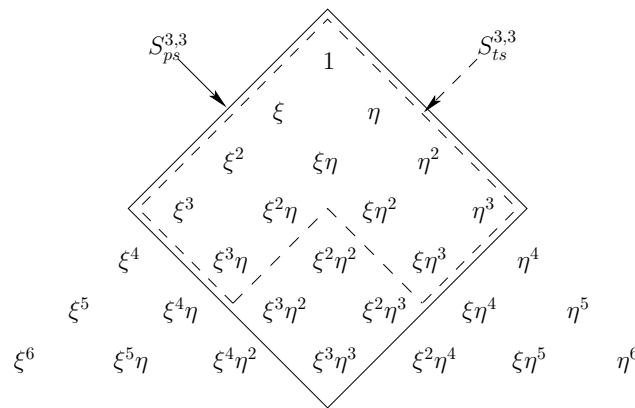
- az $\mathcal{S}_{ts}^{p_\xi, p_\eta}$ csunkolt tér, vagy idegen szóval *truncated space*,
- az $\mathcal{S}_{ps}^{p_\xi, p_\eta}$ teljes tér, vagy az angolszász elnevezés szerint *tensor product space*.

Az $\mathcal{S}_{ps}^{p_\xi, p_\eta}$ teljes tér az összes $\xi - \eta$ ($\xi = [-1, 1]$ és $\eta = [-1, 1]$) tartományon felírható polinomot tartalmazza, mely a

$$\xi^i \eta^j, \quad \text{ahol } i = 0, 1, \dots, p_\xi \quad \text{ill.} \quad j = 0, 1, \dots, p_\eta$$

hatványfüggvényekből felírható. A p_ξ és p_η a polinomok fokszáma ξ , illetve η vonatkozásában. Míg az $\mathcal{S}_{ts}^{p_\xi, p_\eta}$ csnokolt tér csak azokat a polinomfüggvényeket tartalmazza, amelyek a következő feltételek szerint képezhetők:

$$\begin{aligned} \xi^i \eta^j & \quad \text{ahol } i = 0, 1, \dots, p_\xi \quad \text{és } j = 0, 1, \dots, p_\eta \quad \text{de } i + j = 0, \dots, \max\{p_\xi, p_\eta\}, \\ \xi \eta & \quad \text{ha } p_\xi = p_\eta = 1, \\ \xi^{p_\xi} \eta & \quad \text{ha } p_\xi \geq 2, \\ \xi \eta^{p_\eta} & \quad \text{ha } p_\eta \geq 2. \end{aligned}$$



A.3. ábra: PASCAL-háromszög, $p_\xi = p_\eta = 3$ esetén az $\mathcal{S}_{ts}^{p_\xi, p_\eta}$ csnokolt és az $\mathcal{S}_{ps}^{p_\xi, p_\eta}$ teljes tér polinomiális függvényeinek halmaza

A két tér közötti különbség könnyen értelmezhető, ha tekintünk egy PASCAL-háromszöget. Az A.3. ábrán a szaggatott vonallal keretezett területen láthatóak az $\mathcal{S}_{ts}^{3,3}$ függvényei, míg a folytonos vonallal jelzett részen – $p_\xi = p_\eta = 3$ esetén vett – $\mathcal{S}_{ps}^{p_\xi, p_\eta}$ halmazba tartozó polinomfüggvények kerültek ábrázolásra.

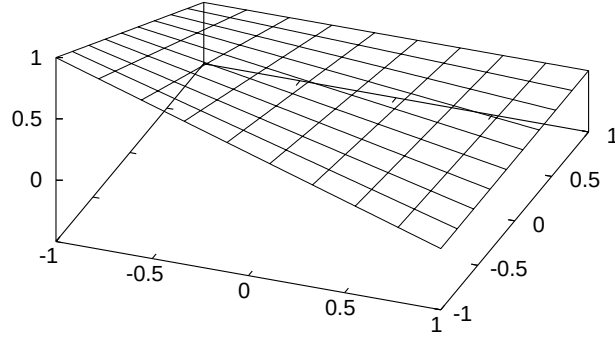
A kétdimenzióban használt alakfüggvényeknek három csoportját különböztetjük meg aszerint, hogy az elem mely részére fejti ki hatását. Ezek szerint beszélünk: *csomóponti*, *élmenti* és *belső alakfüggvényekről*. Most tekintsük ezeket részletesebben egy-egy példával bemutatva:

1. Csomóponti alakfüggvények – angolszász elnevezéssel *nodal modes*, számuk síkbeli négycsomópontú esetben négy darab. Definíciójuk a következő általános formulával írható fel:

$$N_{1,1}^i(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta), \quad i = 1, \dots, 4 \quad (\text{A.25})$$

ahol i a csomópont jele. Ezeket a függvényeket szokás alkalmazni a négycsomópontú izoparametrikus négyszögelemeknél is, h -verziós számítás esetén. A (ξ_i, η_i) jelenti az i . csomópont lokális koordinátáját. Az A.4. ábrán az 1. csomópontozhoz tartozó alakfüggvényt ábrázoltuk.

2. Élmenti alakfüggvények – angolszász elnevezés szerint *edge modes*. $p \geq 2$ esetén léteznek, számuk a p polinomfokszámtól és a felhasznált tér függvényeitől függ. Ezek az alakfüggvények egy kiválasztott éltől eltekintve minden élre zérus értéket adnak.



A.4. ábra: A $(-1, -1)$ csomópontához tartozó alakfüggvény $N_{1,1}^1(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$

Azaz hatásuk csak egy élre, és abból kiindulva az elem belső felületére korlátozódik. Az élmenti alakfüggvények definiálása tehát éltől függően változik:

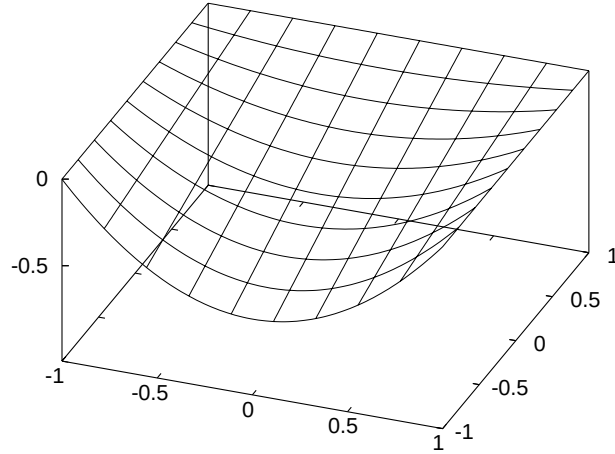
$$N_{i,1}^{e_1}(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1-\eta)\phi_i(\xi), \quad (\text{A.26})$$

$$N_{i,1}^{e_2}(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1+\xi)\phi_i(\eta), \quad (\text{A.27})$$

$$N_{i,1}^{e_3}(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1+\eta)\phi_i(\xi), \quad (\text{A.28})$$

$$N_{i,1}^{e_4}(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1-\xi)\phi_i(\eta), \quad (\text{A.29})$$

ahol e_k az él sorszáma, i a választott p polinom fokszámtól függ. A ϕ_i függvény (A.22) alapján határozható meg. Az A.5. ábrán az $i = 2$ esetre vett e_1 élhez tartozó alakfüggvény látható.

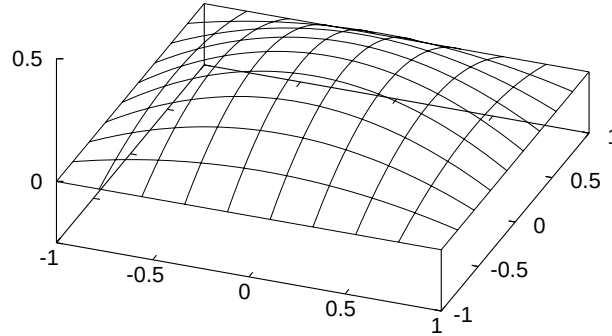


A.5. ábra: Az $\eta = -1$ élhez tartozó $N_{2,1}^{e_1}$ alakfüggvény $i = 2$ esetén

3. Belső alakfüggvények – angolszász elnevezés szerint *internal*, vagy *bubble modes*. Ezek a függvények csak az elem belsejében fejtik ki hatásukat, és zérus értéket adnak az élekre és a csomópontokra. Definíciójuk:

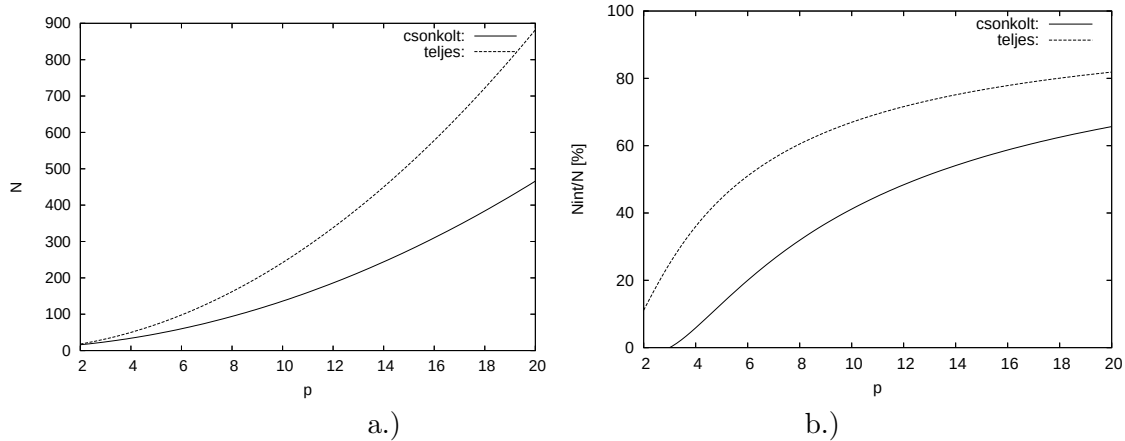
$$N_{ij}^b = \phi_i(\xi)\phi_j(\eta), \quad (\text{A.30})$$

ahol i, j a választott p polinomfokszámtól függ. A ϕ_i függvény (A.22) szerint határozható meg. Az A.6. ábrán az $i = j = 2$ -höz tartozó alakfüggvényt ábrázoltuk.



A.6. ábra: Az $i = j = 2$ -höz tartozó belső alakfüggvény

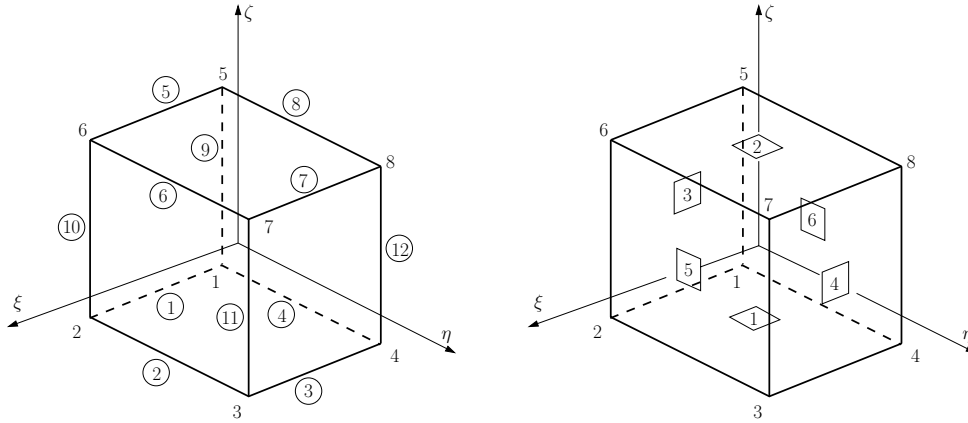
Az A.7. a.) ábrán az $\mathcal{S}_{ts}^{p,p}$ és az $\mathcal{S}_{ps}^{p,p}$ approximációs tér választása esetén látható a feladat egyetlen eleméhez tartozó szabadságfokok számának változása a ξ és η vonatkozásában egységesnek választott $p = p_\xi = p_\eta$ polinomfokszám függvényében. Míg az A.7. b.) ábra azt mutatja, hogy ebből az ismeretlenszámból mennyi a belső alakfüggvényekhez tartozó. Nyilvánvaló, hogy a belső alakfüggvények számának különbözősége okozza a szabadságfokokban mérhető különbséget a csonkolt és a teljes alakfüggvénytér alkalmazása esetén. Azonban a belső alakfüggvényektől származó ismeretlenek csak lokálisak, azaz mindig csak egy adott elemre vonatkoznak. Ezért ennek a tulajdonságnak szerepe van az elemhez kötött jellemző párhuzamos számítása során.



A.7. ábra: a.) Szabadságfokok számának változása egy kétdimenziós négycsomópontú p -verziós elem esetén b.) Belső alakfüggvények aránya százalékosan

A.4. Hierarchikus alakfüggvények hexaéder elemeknél

A leggyakrabban alkalmazott két elemtípus háromdimenzióban a hatoldalú – hexaéder –, vagy a négyoldalú – tetraéder – térbeli elem. Most a hatoldalú nyolc-csomópontú térbeli elemekhez tartozó alakfüggvényeket vizsgáljuk meg az [60] könyv alapján. Egy ilyen elemet mutat be az A.8. ábra, melyen karikázva vannak az élek, illetve keretezve a lapok sorszámai. A nyolc-csomópontú elemek alkalmazása két fontos előnyt jelent a végelem-módszer szempontjából:



A.8. ábra: Egy hagyományos hatoldalú térbeli elem

- a használt formalizmus nagyfokú pontosságot nyújt,
- az elemeken történő integráláshoz alkalmazható – GAUSS integrációs pontok felhasználásával történő – numerikus integrálás könnyen programozható.

A kétdimenziós hierarchikus alakfüggvényekből kiindulva a háromdimenzióban használt alakfüggvények egyszerűen csoportosíthatók. Az alakfüggvények számozására többféle lehetőség kínálkozik, melyek között azonban alapvetően csak programozástechnikai különbségek vannak. Itt négy fő típust különböztethetünk meg az alapján, hogy a függvények csomóponton, élen, lapon, illetve az elem belsejében fejtenek ki hatást. Mind a ξ , mind az η , mind a ζ koordináták a $[-1, 1]$ intervallumban változhatnak.

1. Csomóponti alakfüggvények – idegen szóval *nodal modes*. Nyolc darab csomóponti alakfüggvény van, ugyanazok a függvények, mint amelyeket a h -verziós végelelem-módszernél használnak. Képzésük a következő módon történik:

$$N_{1,1,1}^i(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) (1 + \zeta_i \zeta), \quad i = 1, \dots, 8, \quad (\text{A.31})$$

ahol i jelenti a csomóponti sorszámot, illetve (ξ_i, η_i, ζ_i) pedig az i . csomópont koordinátáit.

2. Élmenti alakfüggvények – idegen szóval *edge modes*. Ezek az alakfüggvények egy kiválasztott éltől eltekintve minden élre zérus értéket adnak, így külön definíciójuk van éltől függően. Például ha tekintjük az 1. és 2. csomópont között húzott e_1 élt, akkor az erre felírható alakfüggvény a következő

$$N_{1,1,1}^{e_1}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{4} (1 - \eta) (1 - \zeta) \phi_i(\xi). \quad (\text{A.32})$$

Itt i értéke a kiválasztott polinomfokszámtól függ, ϕ_i pedig (A.22) alapján számítható. A többi 11 élhez tartozó alakfüggvény analóg módon képezhető. Az élekhez felírható függvények száma $12(p-1)$ függetlenül a választott approximációs tértől, mivel $p \geq 2$ esetén mindig léteznek.

3. Oldalmenti alakfüggvények – idegen szóval *face modes*. Definíciójukat az oldallap szabja meg. Ezek az alakfüggvények csak egy kiválasztott lapra adnak zérustól különböző értéket, ennek megfelelően például az 1, 2, 3, 4 csomópontok által meghatározott f_1 lapra felírhatóak a következő típusú függvények:

$$N_{i,j,1}^{f_1}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2} (1 - \zeta) \phi_i(\xi) \phi_j(\eta), \quad (\text{A.33})$$

ahol i és j lehetséges értékét egyrészt a polinomfokszám, másrészt a választott approximációs tér definiálja. A függvények száma tehát más lesz az $\mathcal{S}_{ts}^{p_\xi, p_\eta, p_\zeta}$ csunkolt és az $\mathcal{S}_{ps}^{p_\xi, p_\eta, p_\zeta}$ teljes tér esetén. Az A.3. táblázatban láthatjuk az (A.33) által felírható alakfüggvényekre vonatkozó i és j lehetséges értékeit, melyek valójában a ξ , illetve az η irányban vett polinomfokszámot jelentik az f_1 lapra.

A.3. táblázat: Az f_1 él vonatkozásában használt indexértékek

csonkolt tér	teljes tér
$i = 2, \dots, p_\xi - 2$	$i = 2, \dots, p_\xi$
$j = 2, \dots, p_\eta - 2$	$j = 2, \dots, p_\eta$
$i + j = 4, \dots, \max\{p_\xi, p_\eta\}$	

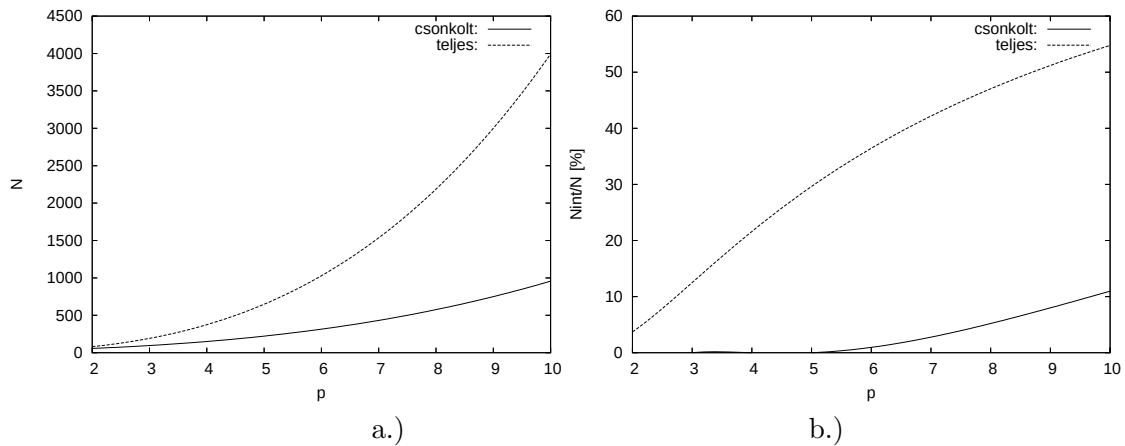
4. Belső alakfüggvények – idegen szóval *internal, bubble modes*. Ezek a függvények csak az elem belsejében fejtenek ki hatást. Definíciójuk a következő

$$N_{i,j,k}^b(\xi, \eta, \zeta) = \phi_i(\xi) \phi_j(\eta) \phi_k(\zeta). \quad (\text{A.34})$$

Az i, j, k indexértékeket – hasonlóan az oldalmenti alakfüggvényeknél írtakkal –, a p_ξ , a p_η és a p_ζ polinomfokszámok, továbbá a választott approximációs tér határozza meg. Ebből adódóan magas fokszámoknál a térbeli belső alakfüggvények, illetve az ebből adódó ismeretlenek száma igen nagy. Az A.5. táblázatban a lehetséges indexértékeket adtuk meg.

A.5. táblázat: Az elem belső alakfüggvényeinél használt indexértékek

csonkolt tér	teljes tér
$i = 2, \dots, p_\xi - 4$	$i = 2, \dots, p_\xi$
$j = 2, \dots, p_\eta - 4$	$j = 2, \dots, p_\eta$
$k = 2, \dots, p_\zeta - 4$	$k = 2, \dots, p_\zeta$
$i + j + k = 6, \dots, \max\{p_\xi, p_\eta, p_\zeta\}$	



A.9. ábra: a.) Szabadságfokok számának változása egy háromdimenziós 8 csomópontú p -verziós elem esetén b.) A belső alakfüggvények aránya százalékosan

Az A.9. ábrán egy háromdimenziós elem esetén mutatjuk be a fokszám változásának hatását az ismeretlenek számára. Az elemre minden irányban egységesen p a polinomok

fokszáma. Így az egy elemre vonatkozó szabadságfok a következő módon számítható ki a csonkolt tér esetén:

$$N_{ts}^{p,p} = 3 \left[8 + 12(p-1) + 3(p-2)(p-3) + \frac{1}{6}(p-3)(p-4)(p-5) \right],$$

illetve a teljes térre:

$$N_{ps}^{p,p} = 3 \left[8 + 12(p-1) + 6(p-1)(p-1) + (p-1)(p-1)(p-1) \right].$$

Az A.9. b.) ábrán a belső alakfüggvények által generált ismeretlenek száma látható, százalékosan kirajzolva a teljes ismeretlenség arányában.

Mivel az approximációs tér függvényei nem irányfüggetlenek ezért a végeselem-hálózat készítésekor figyelembe kell venni az adott élek, felületek irányítását, hogy az elemek illesztésekor ne kövessünk el elemi hibát. Az is megfontolandó, hogy a p -verziós számítás magában hordozza a lehetőséget arra, hogy akár mind a három ξ , η és ζ irányban más-más polinomfokszámmal rendelkező függvényeket alkalmazzunk. Ezen utóbbi lehetőség módot nyit arra, hogy egy-egy feladatnál finomabban tudjuk befolyásolni a feladat méretét a megoldás megfelelő pontosságú eléréséhez.

B. függelék

HERTZ-FÉLE ÖSSZEFÜGGÉSEK ÉRINTKEZŐ TESTEKRE

Ebben a függelékben az érintkező testek HERTZ-féle elmélettel való kezelését írjuk le röviden, melynek gondolatmenete a PONORMAJOV által készített összefoglalót követi [55].

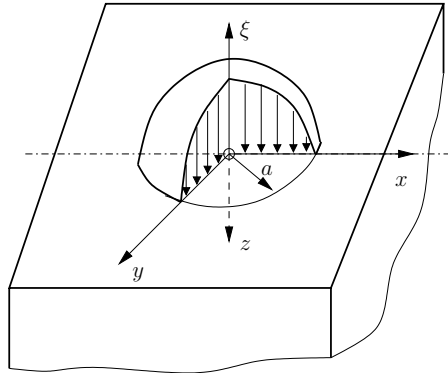
Tekintsük a pontszerű érintkezés megfogalmazását, mely szerint két sima görgült felülettel határolt homogén és izotróp test az alakváltozásig egy pontban érintkezik. A testeket olyan erők nyomják össze, melyek hatásvonala a felületek érintkezési pontjaihoz tartozó közös felületi normális egyenesében hatnak. Eközben a testek alakváltozást szenvednek, és a kezdeti pontszerű érintkezés átalakul felületen való érintkezéssé. A testekre ható nyomóerők nagyságáról feltételezzük, hogy a testek érintkezésének környezetében csak lineárisan rugalmas alakváltozásokat okoznak. Ha azt állítjuk, hogy a kialakuló érintkezési tartomány mérete nagyon kicsi az érintkező testek bármelyikéhez képest, akkor általános esetben az érintkezési és elválási határgörbe egy ellipszis, mely határesetben kör vagy két párhuzamos egyenessel határolt sáv.

Az érintkező testek felületét teljesen simának feltételezve, az egyik testről a másikra átadódó és az érintkezési tartományon megoszló nyomóerők erre a felületre merőlegesek. A testek érintkezési helyén a rugalmas elmozdulások és a feszültségállapot vizsgálatához előzetesen az érintkezési felületen megoszló p_n érintkezési nyomás eloszlását és az általa okozott elmozdulásokat kell tekinteni.

Először a körfelületen megoszló és a gömbfelület ordinátáival arányos nyomáseloszlást írjuk fel, lásd a B.1. ábrát. Ehhez vegyünk olyan terhelésmegoszlást az a sugarú körfelületen, melyet ezen felületre emelt félgömb ordinátái jellemeznek, azaz

$$p_n = p_0 \frac{\xi}{a} = p_0 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{a}\right)^2}, \quad (\text{B.1})$$

ahol p_0 a felületi nyomás nagysága az S_c érintkezési tartomány középpontjában.



B.1. ábra: A terhelés megoszlását félgömb ordináták jellemzik

A maximális p_0 nyomást könnyen ki lehet fejezni az F terhelés segítségével:

$$F = \int_{S_c} p dA = \frac{p_0}{a} \int_{S_c} \xi dA \quad (\text{B.2})$$

ahol $\int \xi dA = \frac{2}{3}\pi a^3$ az a sugarú félgömb által határolt térfogat. Következésképpen:

$$p_0 = \frac{3}{2} \frac{F}{\pi a^2}. \quad (\text{B.3})$$

Tehát a terhelés gömbi eloszlásakor a p_0 maximális nyomás 1.5-szer nagyobb a közepes értéknél.

Egy feltér sík határfelületén lévő pontok z irányú w elmozdulását a határfelületen működő z irányú F erő hatására a

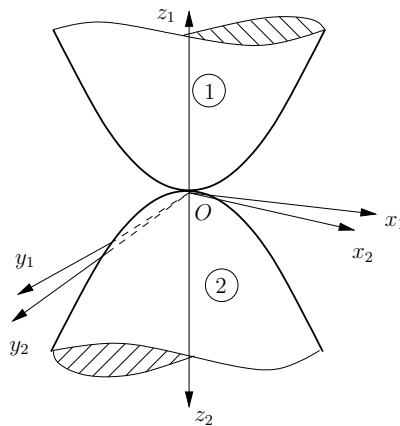
$$w = \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \frac{F}{r}, \quad (\text{B.4})$$

összefüggés adja meg, ahol r az F koncentrált erő támadáspontjának a távolsága attól a ponttól, ahol az elmozdulás w . A felületen megoszló p_n felületi nyomás hatását úgy vehetjük, mint azon elemi elmozdulások összegét, melyek a dA felületelemekre működő p_n nyomás hatására keletkeznek, azaz

$$w = \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \int_{S_c} \frac{p_n}{r} dS, \quad (\text{B.5})$$

ahol r a w elmozdulású pont távolsága a $p dS$ elemi erőttől.

A következőkben vizsgáljuk meg két rugalmas test érintkezését. Ehhez tekintsük a B.2. ábrát, amely az érintkezés pontjának környezetében szemlélteti az érintkező testeket. Az ábra azzal a feltételezéssel összhangban mutatja a viszonyokat, hogy sima a két test határfelülete az érintkezési pontban (folytonosan változik a normális az O pont környezetében). Válasszuk az O érintkezési pontot a koordinátarendszerek kezdőpontjának.



B.2. ábra: Nemsinguláris pontban érintkező testek

A vizsgált testek határfelületeinek egyenletei

$$z_1 = S_1(x, y) \quad \text{és} \quad z_2 = S_2(x, y). \quad (\text{B.6})$$

alakúak az érintkezési pont közelében.

Az S_1 és S_2 függvényeket sorbafejtjük az x_1y_1 és x_2y_2 független változók növekvő hatványai szerint. Nyilvánvaló, hogy azonos a sorbafejtés képzése S_1 és S_2 vonatkozásában. Így tehát írhatjuk, hogy

$$S(x, y) = S_0 + x \frac{\partial S}{\partial x} \Big|_0 + y \frac{\partial S}{\partial y} \Big|_0 + \frac{1}{2!} \left[x^2 \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \Big|_0 + 2xy \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} \Big|_0 + y^2 \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} \Big|_0 \right] + \dots \quad (\text{B.7})$$

A $_0$ index a koordinátarendszer kezdőpontjában vett helyettesítési értékeket jelöli. Mivel a felületek a koordinátarendszer kezdőpontján átmennek, az $S_0 = 0$ és az xy sík a felületek közös érintősíkja a koordinátarendszer kezdőpontjában, ezért érvényes, hogy

$$\frac{\partial S}{\partial x} \Big|_0 = \frac{\partial S}{\partial y} \Big|_0 = 0. \quad (\text{B.8})$$

Ennek következtében a sorbafejtésnek nincs sem állandó, sem pedig elsőfokú tagja. Figyelembe véve, hogy bennünket csak az érintkezési tartomány érdekel, mely az egész felületnek csak kicsiny része, ezért x és y kis értékeire az x és y harmadik és magasabb hatványú tagjait a másodfokú tagokhoz képest el lehet hanyagolni. Tehát az érintkező testek felületeinek egyenletei az érintkezési pont közelében:

$$\begin{aligned} 2z_1 &= x_1^2 \frac{\partial^2 S_1}{\partial x_1^2} \Big|_0 + 2x_1y_1 \frac{\partial^2 S_1}{\partial x_1 \partial y_1} \Big|_0 + y_1^2 \frac{\partial^2 S_1}{\partial y_1^2} \Big|_0 \\ 2z_2 &= x_2^2 \frac{\partial^2 S_2}{\partial x_2^2} \Big|_0 + 2x_2y_2 \frac{\partial^2 S_2}{\partial x_2 \partial y_2} \Big|_0 + y_2^2 \frac{\partial^2 S_2}{\partial y_2^2} \Big|_0. \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

További egyszerűsítés érhető el, ha az x_1, y_1 és x_2, y_2 tengelyeket alkalmasan választjuk meg. Például ha az x_1, y_1 tengelyeket az érintősík és a felső test normál metszetei síkjainak metszéspontjába helyezzük, akkor az S_1 -re vonatkozó vegyes parciális derivált eltűnik. Hasonlóan eljárva alsó testnél felírhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 S_1}{\partial x_1^2} \Big|_0 &= k_{11}; & \frac{\partial^2 S_1}{\partial y_1^2} \Big|_0 &= k_{12}; \\ \frac{\partial^2 S_2}{\partial x_2^2} \Big|_0 &= k_{21}; & \frac{\partial^2 S_2}{\partial y_2^2} \Big|_0 &= k_{22}, \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

melyben k_{11} és a k_{12} a felső test, míg a k_{21} és a k_{22} az alsó test fő normál metszeteinek görbületei a koordinátarendszer kezdőpontjában. Ezekkel a jelölésekkel

$$\begin{aligned} 2z_1 &= k_{11}x_1^2 + k_{12}y_1^2, \\ 2z_2 &= k_{21}x_2^2 + k_{22}y_2^2. \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

a vizsgált testek egyenletei az O érintkezési pont környezetében.

Speciális eset az R_1 és egy R_2 sugarú gömb érintkezése. Ekkor

$$k_{11} = k_{12} = \frac{1}{R_1} \quad k_{21} = k_{22} = \frac{1}{R_2}. \quad (\text{B.12})$$

Az R_1 sugarú gömbnek síkkal való érintkezése esetén R_2 végtelenné válik, így $k_{21} = k_{22} = 0$.

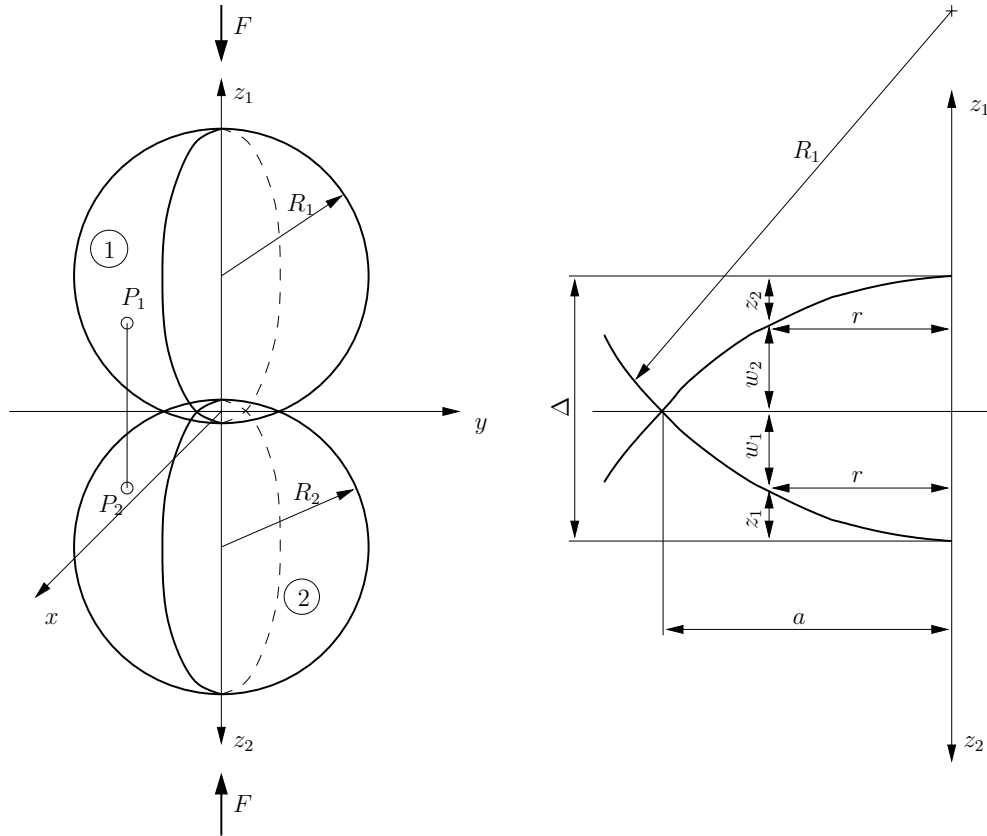
Az egyszerűség kedvéért a továbbiakban két rugalmas gömb érintkezési feladatát tekintjük (lásd a B.3. ábrát). Célunk, hogy meghatározzuk a Δ közeledési távolságot, az a

érintkezési tartomány határgörbéjének sugarát, valamint a p_0 maximális érintkezési nyomást. Jelöljük w_1 , illetve w_2 -vel a P_1 , illetve P_2 pontok z_1 , illetve z_2 irányú elmozdulását. Ekkor a P_1 és P_2 pontok közeledése a következő összefüggéssel írható fel:

$$\Delta = (z_1 + w_1) + (z_2 + w_2). \quad (\text{B.13})$$

Ezáltal érintkezni azon pontok fognak, melyekre teljesül, hogy

$$z_1 + z_2 = \Delta - (w_1 + w_2). \quad (\text{B.14})$$



B.3. ábra: Rugalmas gömbök érintkezése

A B.3. ábra alapján írhatjuk, hogy

$$R_1^2 - r^2 = (R_1 - z_1)^2 = R_1^2 - 2R_1z_1 + z_1^2. \quad (\text{B.15})$$

Itt z_1^2 másodrendűen kicsiny érték, amit elhanyagolhatunk. Így jutunk a

$$z_1 = \frac{r^2}{2R_1}, \quad z_2 = \frac{r^2}{2R_2}, \quad (\text{B.16})$$

összefüggésekhez. A (B.14) egyenletben szereplő w_1 és w_2 rugalmas elmozdulások kiszámításához a (B.5) kifejezést lehet felhasználni a

$$w_1 = k_1 \int_{S_c} \frac{p_n}{r} dS \quad \text{és} \quad w_2 = k_2 \int_{S_c} \frac{p_n}{r} dS \quad (\text{B.17})$$

alakban, ahol

$$k_1 = \frac{1 - \nu_1^2}{\pi E_1} \quad \text{és} \quad k_2 = \frac{1 - \nu_2^2}{\pi E_2} \quad (\text{B.18})$$

míg S_c az érintkezési felület. Ezt kör határolja.

Felhasználva a (B.1) összefüggést írhatjuk, hogy

$$w_1 + w_2 = (k_1 + k_2) \int_{S_c} \frac{p_0}{a} \xi \frac{1}{r} dS. \quad (\text{B.19})$$

Elvégezve a kijelölt műveleteket, és azonos átalakításokat végrehajtva kapjuk a P_1 és P_2 pontok z_1 , illetve z_2 irányú elmozdulásaira, hogy

$$w_1 + w_2 = \left(\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right) \frac{3F [2a^2 - r^2]}{8a^3}. \quad (\text{B.20})$$

Ezt visszaírjuk a (B.14) összefüggésbe és bevezetjük a

$$k = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \quad (\text{B.21})$$

anyagjellemzőktől függő állandót. Tekintetbe véve a (B.3) és a (B.16) összefüggéseket, kifejezhetők az érintkezési felület a sugarára, a p_0 legnagyobb nyomásra és a Δ közeledésre a következő összefüggések

$$\begin{aligned} a &= \sqrt[3]{\frac{3}{4} F k \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}, \\ p_0 &= \frac{\sqrt[3]{6}}{\pi} \sqrt[3]{\frac{F}{k^2} \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \right)^2}, \\ \Delta &= \sqrt[3]{\frac{9}{16} (F k)^2 \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}}. \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

A (B.22) képletek gömb és sík érintkezésekor is fennállnak. Ha például a 2-es jelű alsó test sík, azaz $R_2 = \infty$, akkor

$$\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} = \frac{1}{R_1} \quad \text{és} \quad \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = R_1. \quad (\text{B.23})$$

Az egymással érintkező testek egyikének merev voltát a (B.21)-ben felírt, anyagfüggő paraméter segítségével vehetjük figyelembe. Például, ha a felső test merev, akkor a (B.21)-ben szereplő

$$\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} = 0 \quad (\text{B.24})$$

tag eltűnik, így csak a

$$k = \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \quad (\text{B.25})$$

képlettel kell számolnunk.

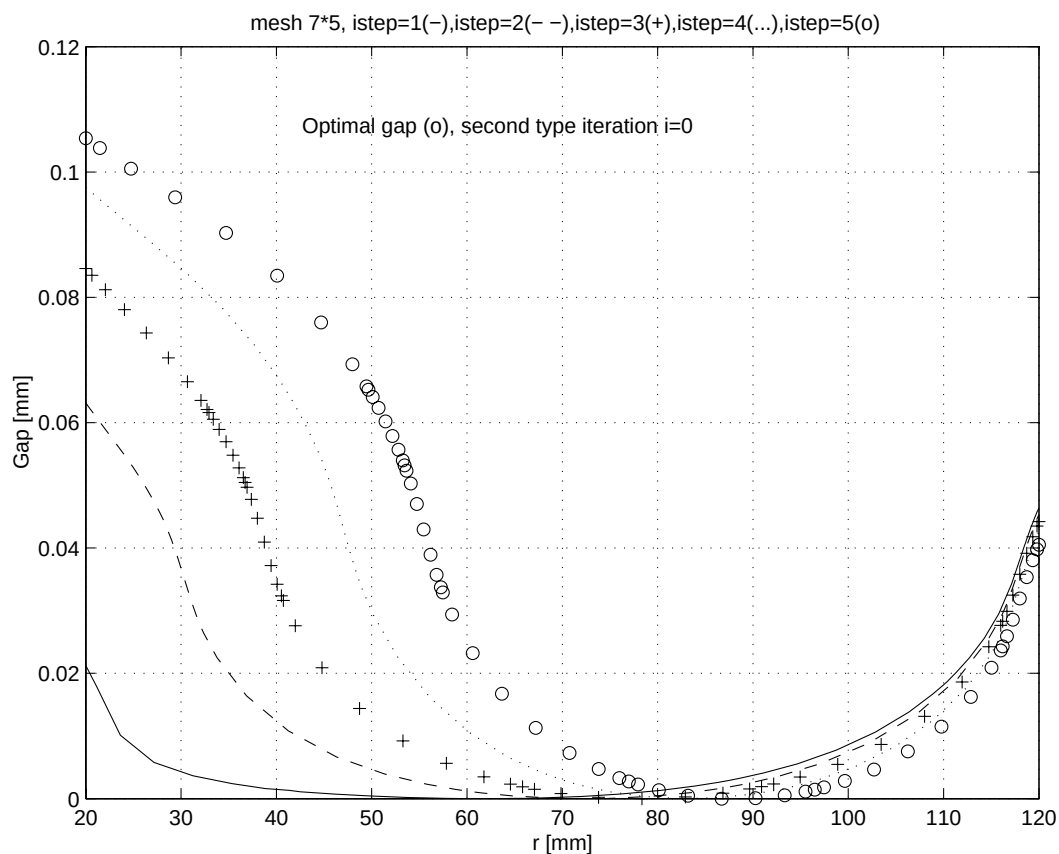
C. függelék

NUMERIKUS SZÁMÍTÁSOK EREDMÉNYEI

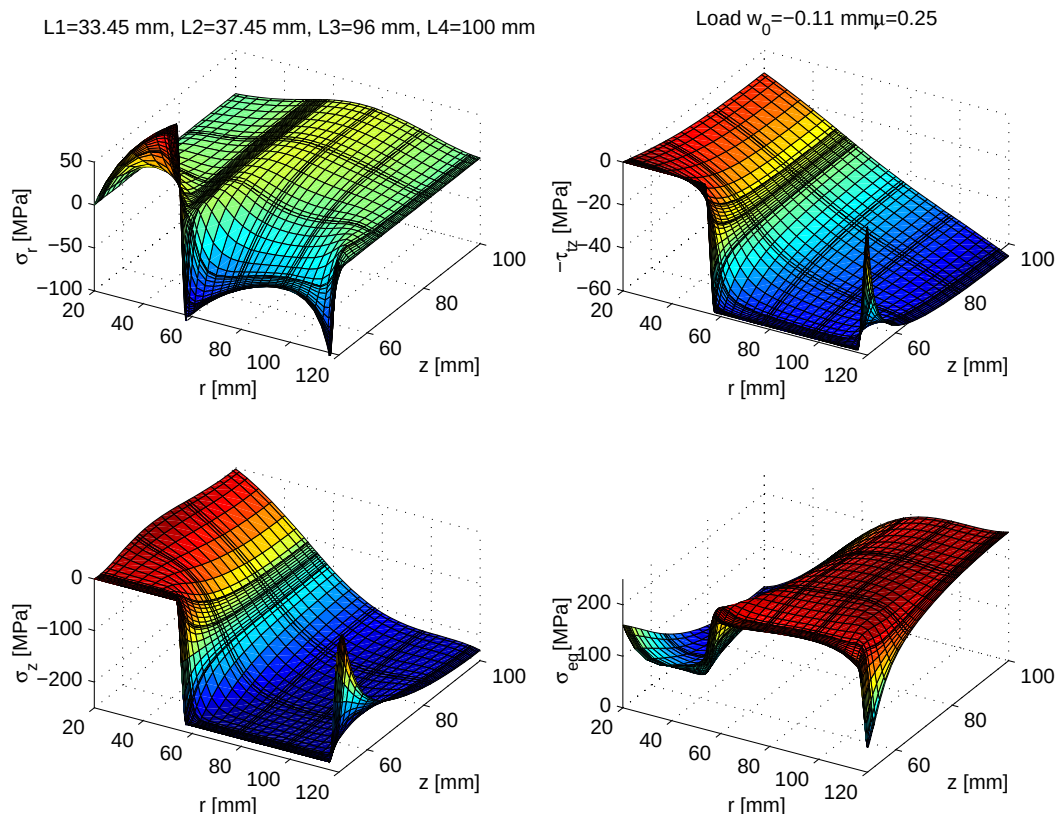
C.1. Kétváltozós optimalizációk

P10-es feladat

Az 5. fejezetben definiált **P10**-es feladathoz tartozó numerikus számítási eredményeket mutatjuk be, $w_0 = -0.11 \text{ mm}$ -es kinematikai terhelés esetén.



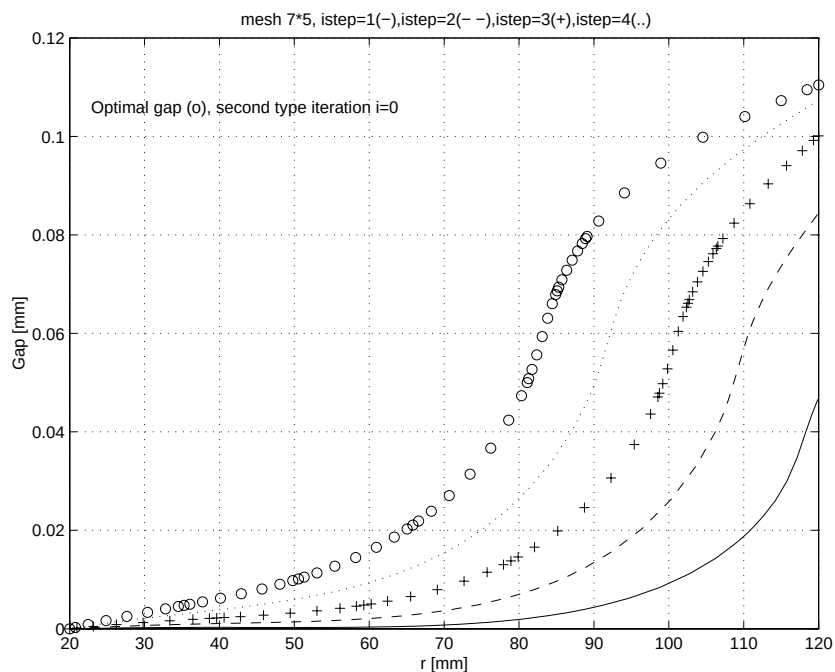
C.1. ábra: A testek közötti távolság változása a **P10**-es optimalizációra



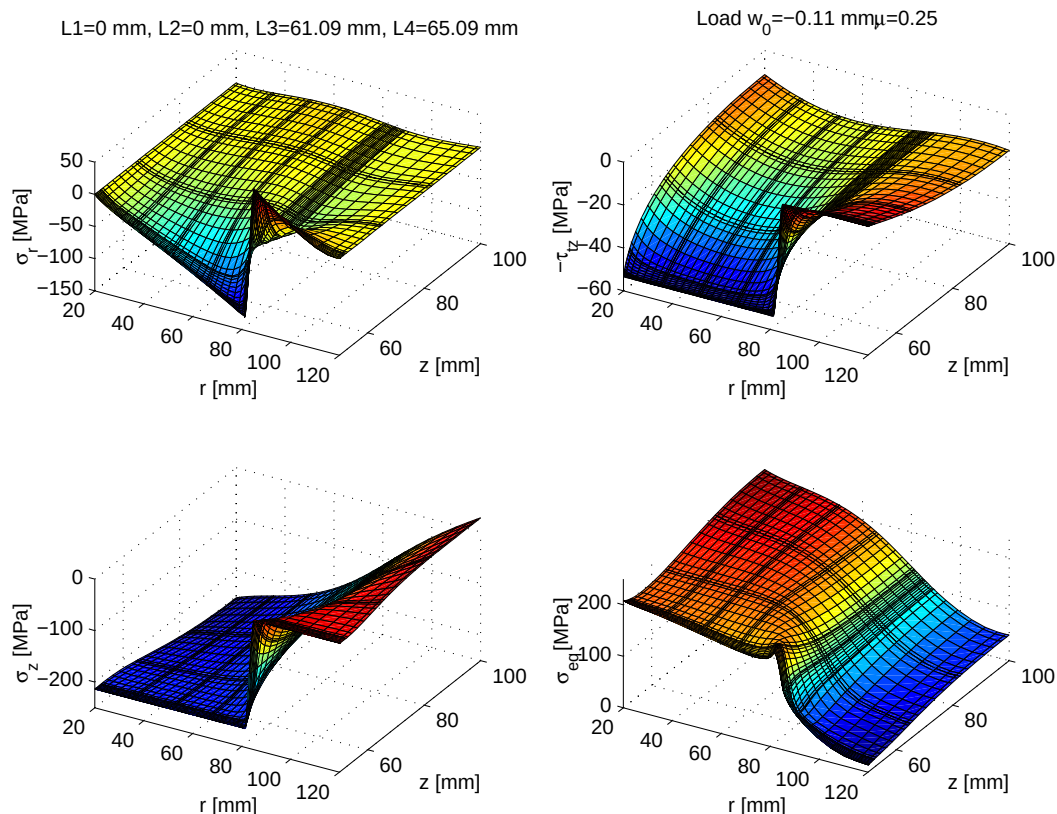
C.2. ábra: A felső testre meghatározott feszültségeloszlások a **P10**-es optimalizációra

P11-es feladat

Ebben a részben az 5. fejezetben definiált **P11**-es feladathoz tartozó numerikus eredményeket közöljük, $w_0 = -0.11 \text{ mm}$ -es kinematikai terhelés esetén.



C.3. ábra: A testek közötti távolság változása a **P11**-es optimalizációra



C.4. ábra: A felső testre meghatározott feszültségeloszlások a **P11**-es optimalizációra

C.2. Szimmetrikus terhelésű 3D-s feladatok

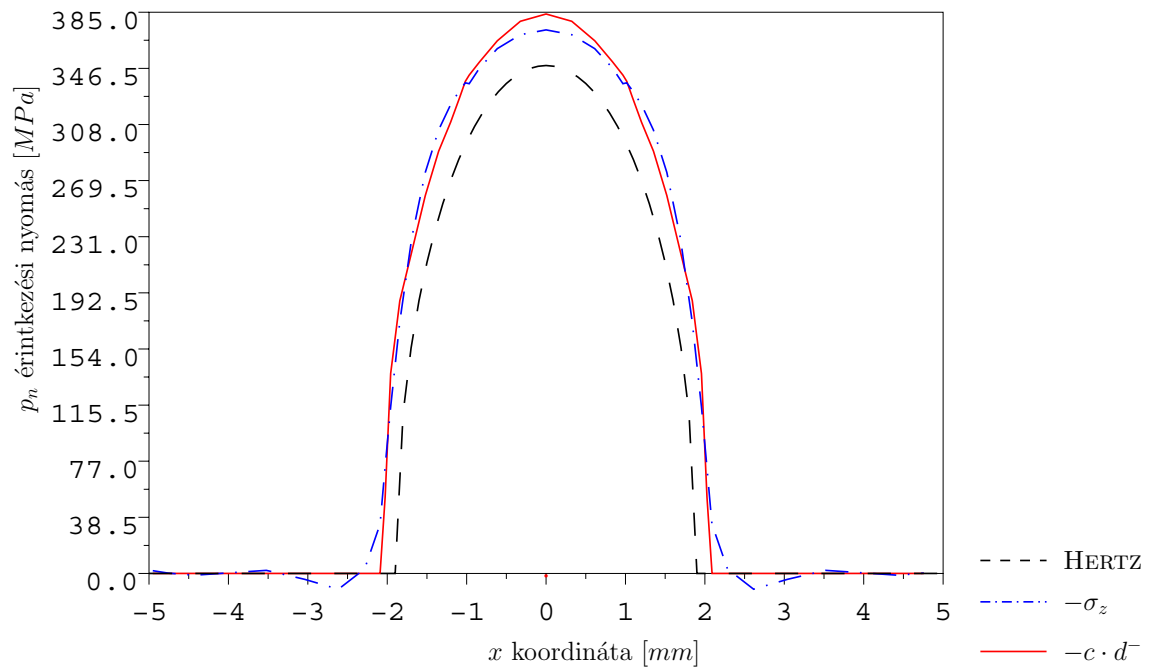
Ebben az alfejezetben a különböző szimmetrikus elrendezésű terhelésekhez tartozó eredményeket jelenítjük meg a teljesség kedvéért grafikus formában. Az itt bemutatott ábrák egymás után ábrázolják az érintkezési nyomás különböző elvek szerint származtatott eloszlását; majd ezt követik az adott terhelési esetre vonatkozó érintkezési tartomány határát leíró B-spline görbék különböző iterációs lépésekhez tartozó képei; ezután láthatjuk a z tengely irányú elmozdulások és végül a z tengely irányú feszültségek diagrammait.

A térbeli z tengely irányú elmozdulásmezőt a jobb elemezhetőség miatt 100-szoros nagyítással ábrázoltuk, azonban az ábrák melletti elmozdulás értékek a ténylegesen kiszámolt eredmények alapján kerültek felírásra.

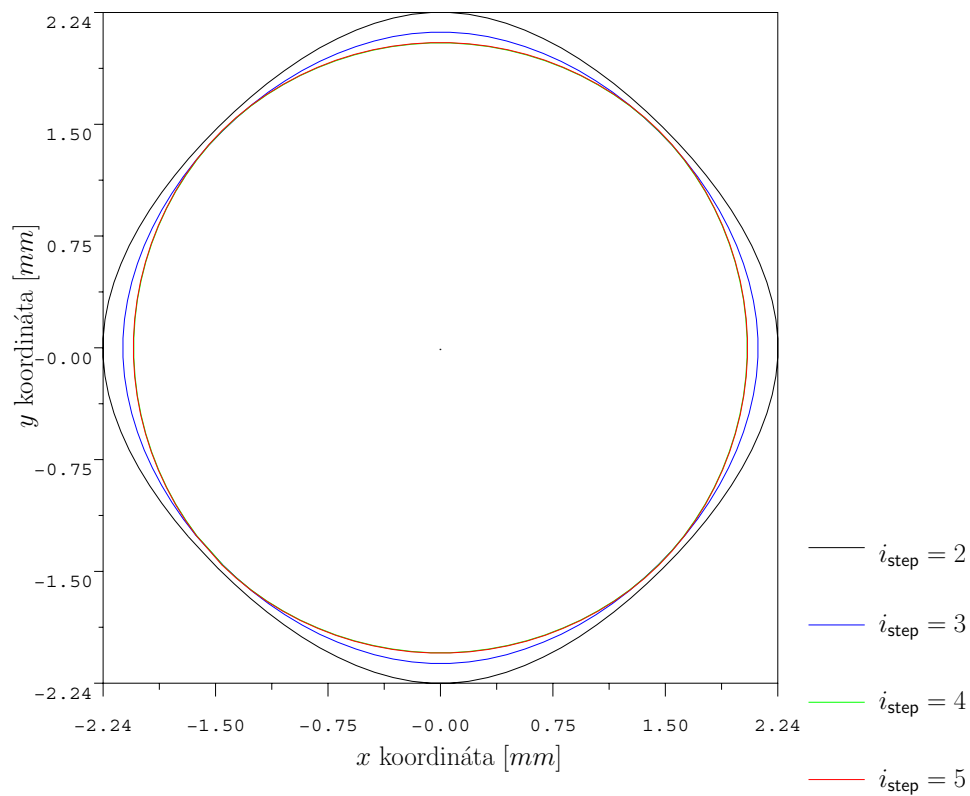
Itt az $i_{\text{terh}} = 2, 3, 4, 5$ terhelési lépésekhez tartozó eredményképek kerülnek bemutatásra, melyek alapvetően abban különböznek, hogy mekkora nagyságú elmozdulási előírás adott a merev bélyeg vonatkozásában. A különböző terhelési esetekre vonatkozó előírásokat a 6. fejezetben található 6.1. táblázat tartalmazza.

Az itt közölt eredményképek minden terhelési esetben az elérhető legpontosabb számításhoz tartoznak, azaz minden esetben a közelítő polinomok fokszáma $p = 8$.

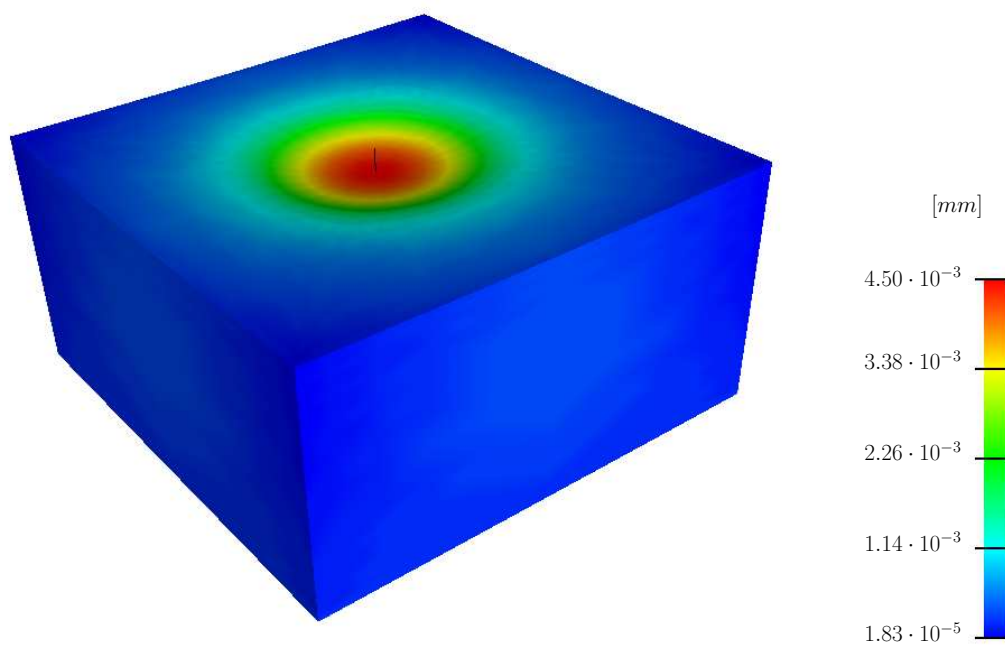
A következő C.3. alfejezetben a nem szimmetrikus elrendezésű terhelés esetén mutatjuk be a különböző terhelési esetekhez tartozó eredményeket. Az ott megjelenített ábrák hasonló sorrendben követik egymást, illetve a rájuk vonatkozó megjegyzések is hasonlóak. Azzal a különbséggel, hogy csak a nem szimmetrikus terhelési eseteknél rajzoltuk meg a HERTZ-féle számítások szerinti kör alakú érintkezési tartományt, az ehhez képesti eltérés érzékeltetése érdekében.



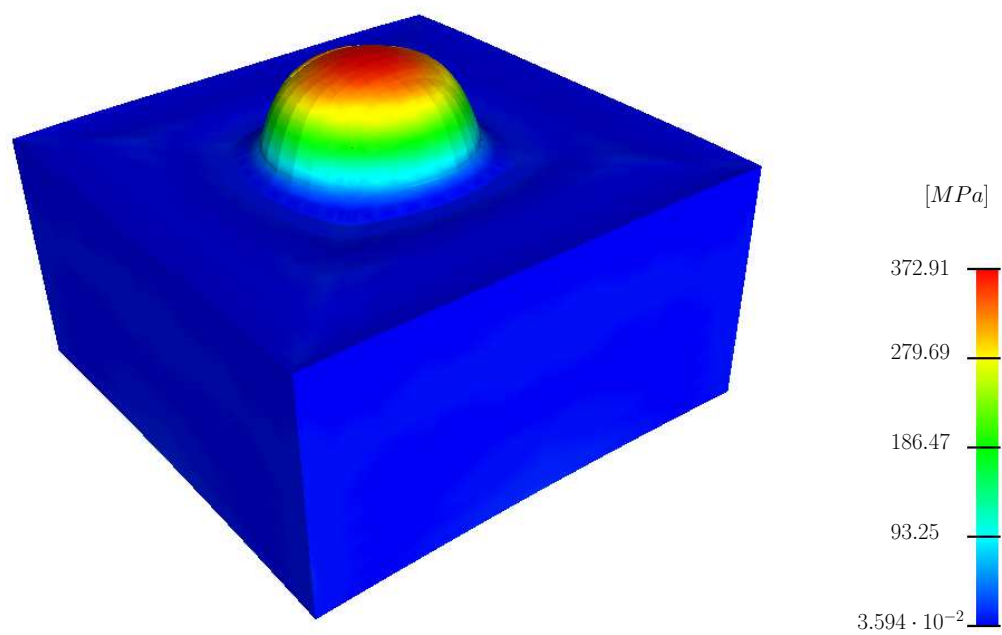
C.5. ábra: Érintkezési nyomás eloszlása, szimmetrikus esetben ($i_{\text{terh}} = 2$)



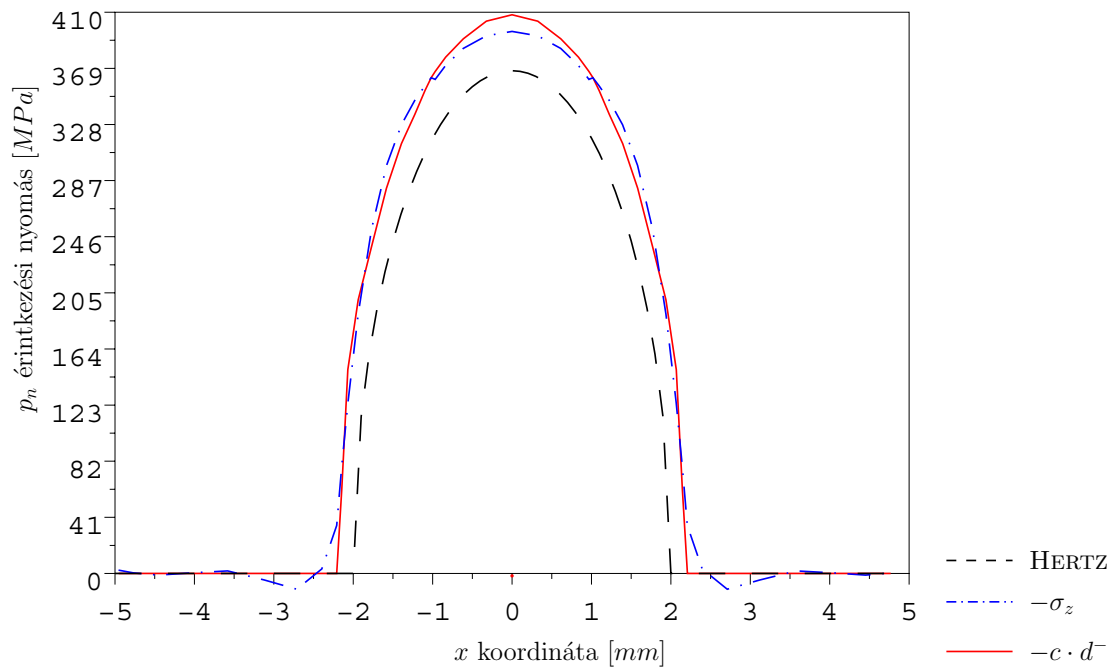
C.6. ábra: Az érintkezési tartomány változása, szimmetrikus esetben ($i_{\text{terh}} = 2$)



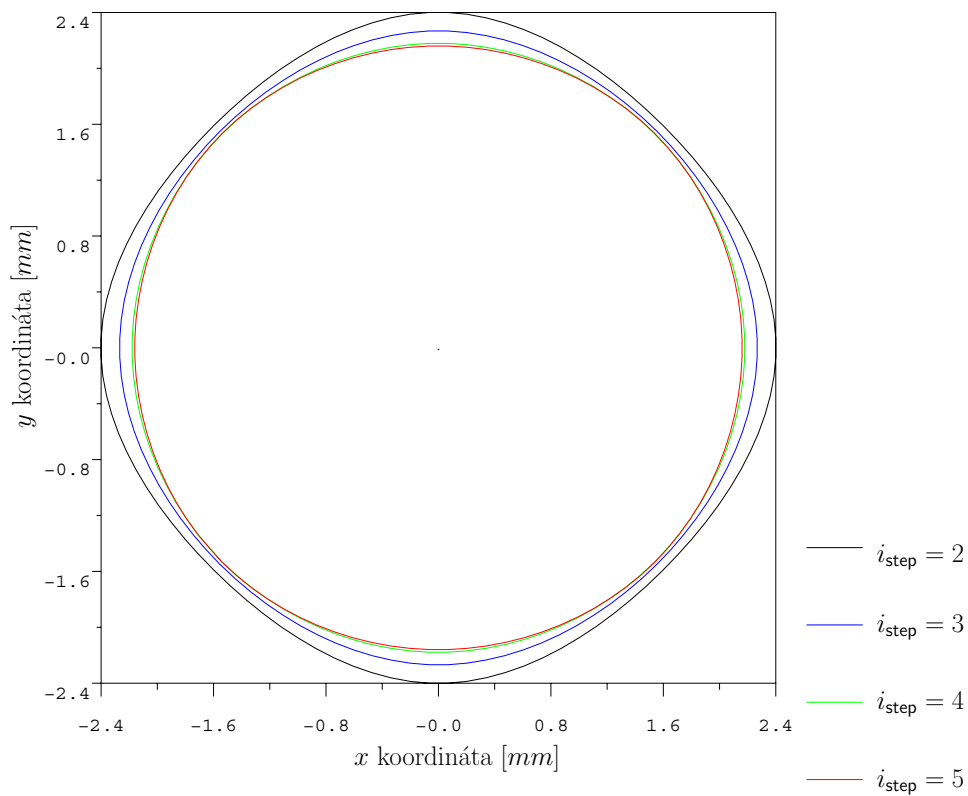
C.7. ábra: A z irányú elmozdulásmező, szimmetrikus esetben ($i_{\text{terh}} = 2$)



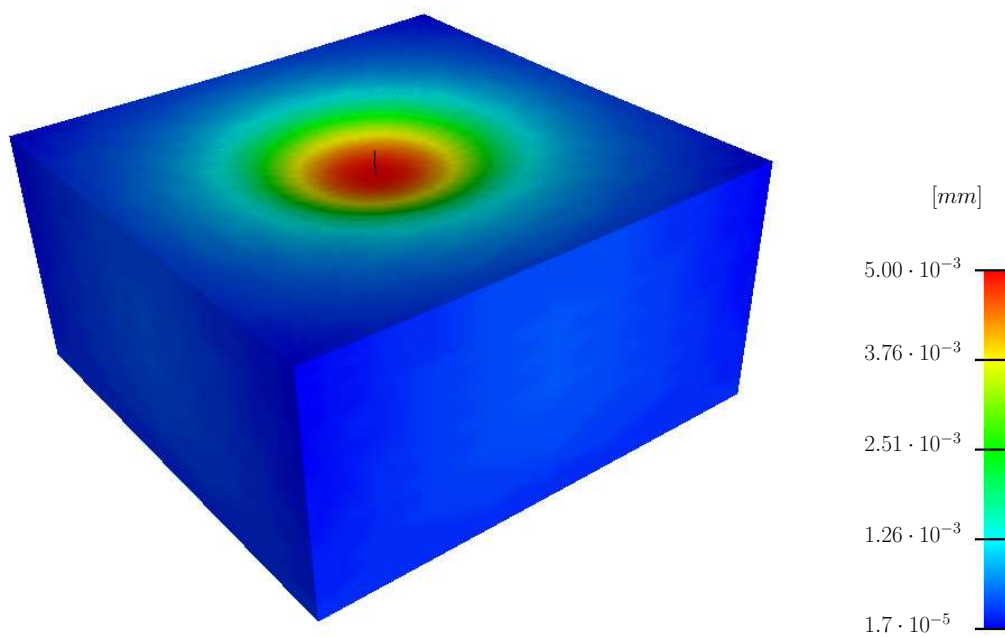
C.8. ábra: A $-\sigma_z$ feszültségmező, szimmetrikus esetben ($i_{\text{terh}} = 2$)



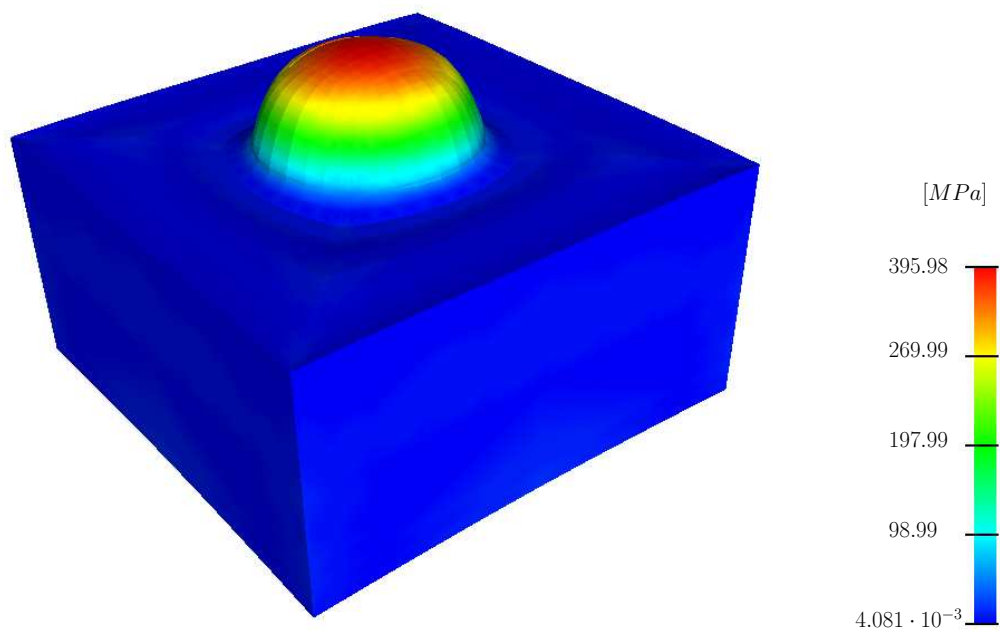
C.9. ábra: Érintkezési nyomás eloszlása, szimmetrikus esetben ($i_{\text{terh}} = 3$)



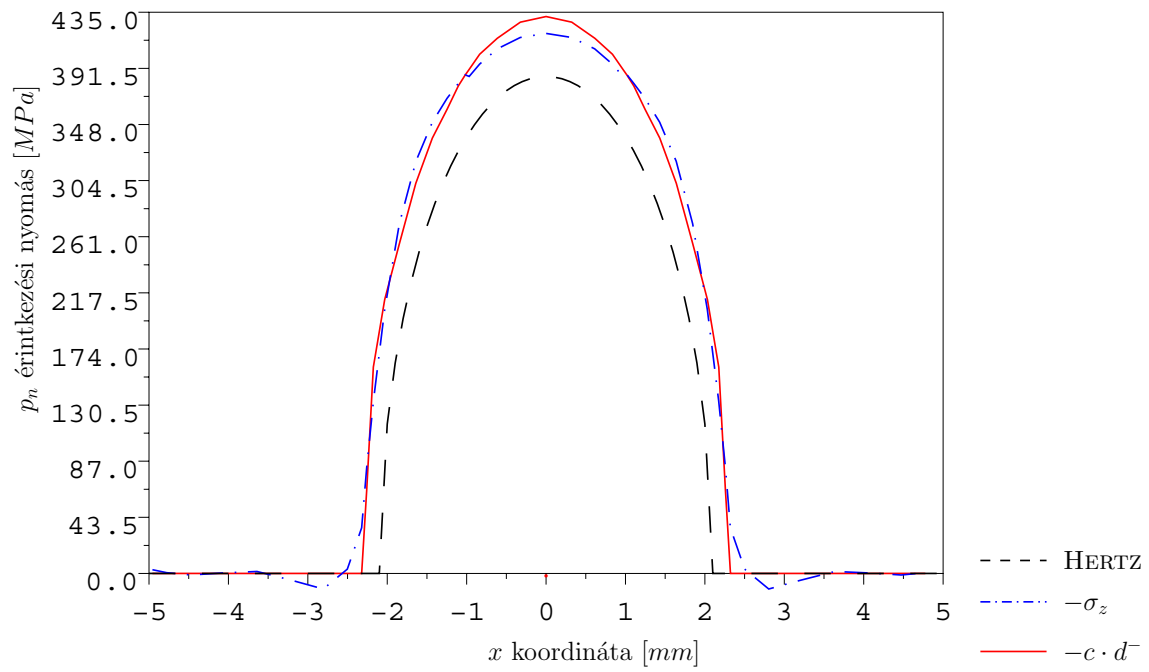
C.10. ábra: Az érintkezési tartomány változása, szimmetrikus esetben ($i_{\text{terh}} = 3$)



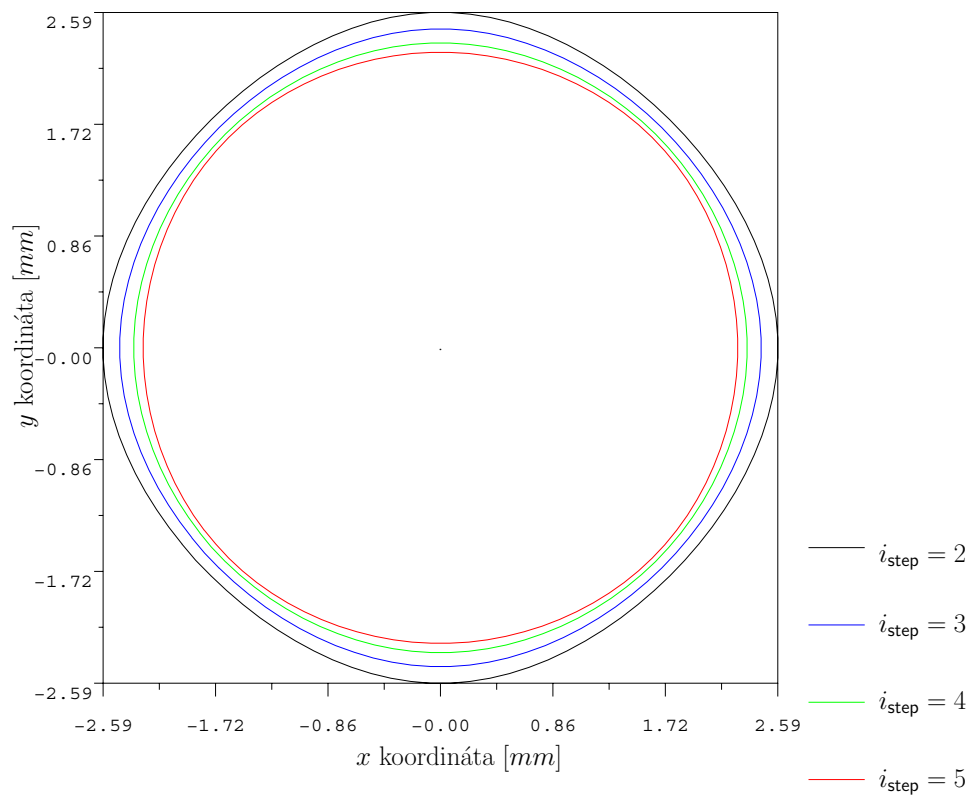
C.11. ábra: A z irányú elmozdulásmező, szimmetrikus esetben ($i_{\text{terh}} = 3$)



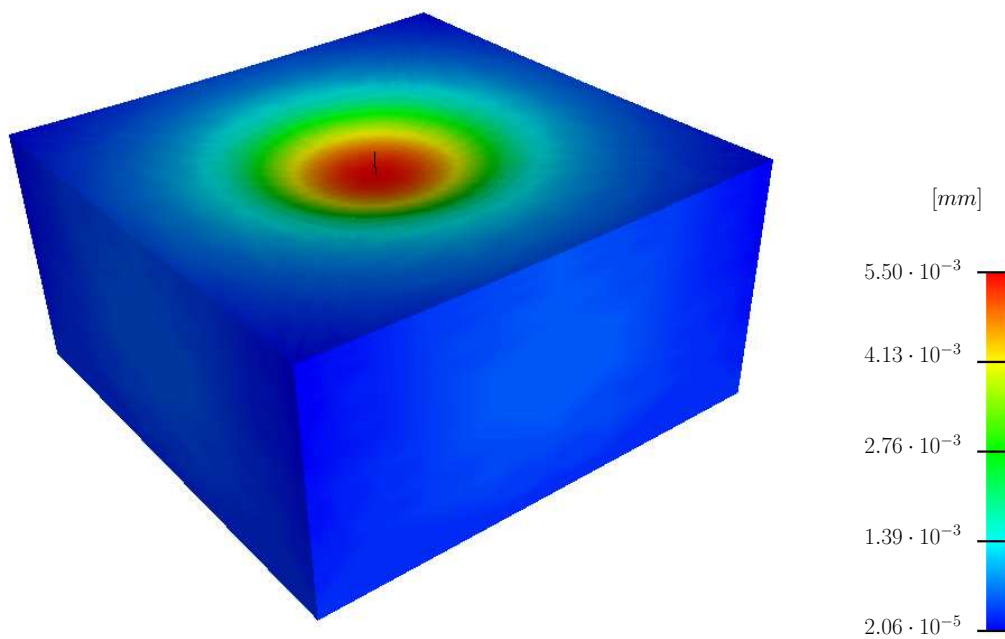
C.12. ábra: A $-\sigma_z$ feszültségmező, szimmetrikus esetben ($i_{\text{terh}} = 3$)



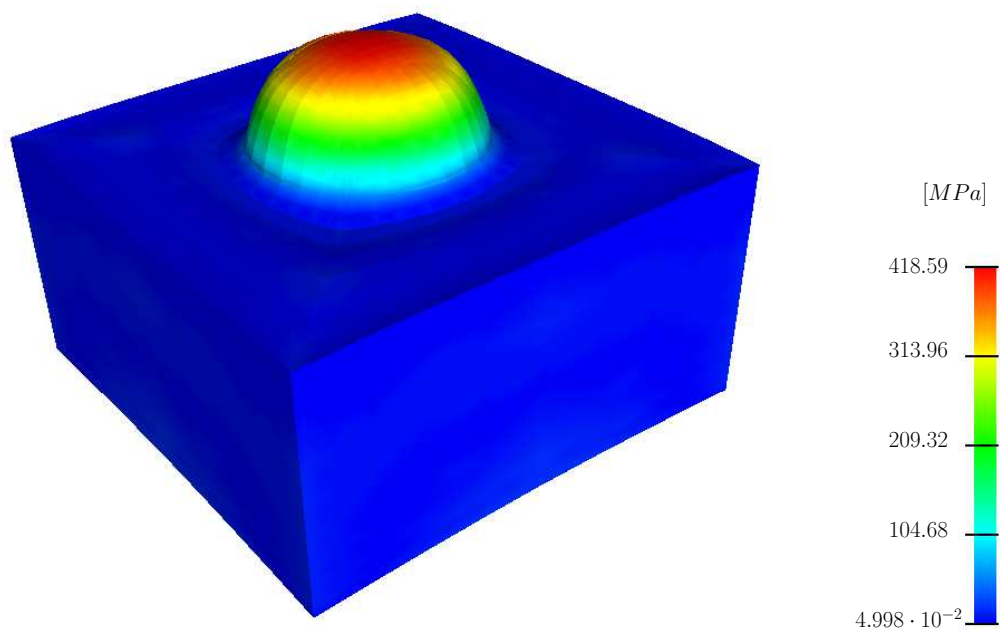
C.13. ábra: Érintkezési nyomás eloszlása, szimmetrikus esetben ($i_{\text{terh}} = 4$)



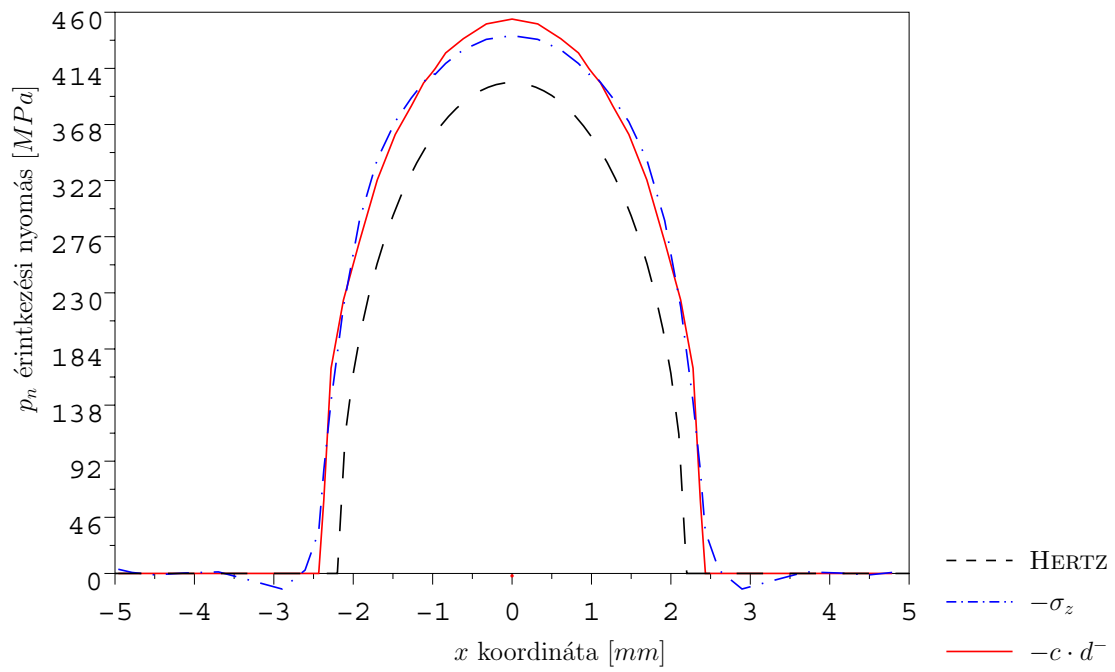
C.14. ábra: Az érintkezési tartomány változása, szimmetrikus esetben ($i_{\text{terh}} = 4$)



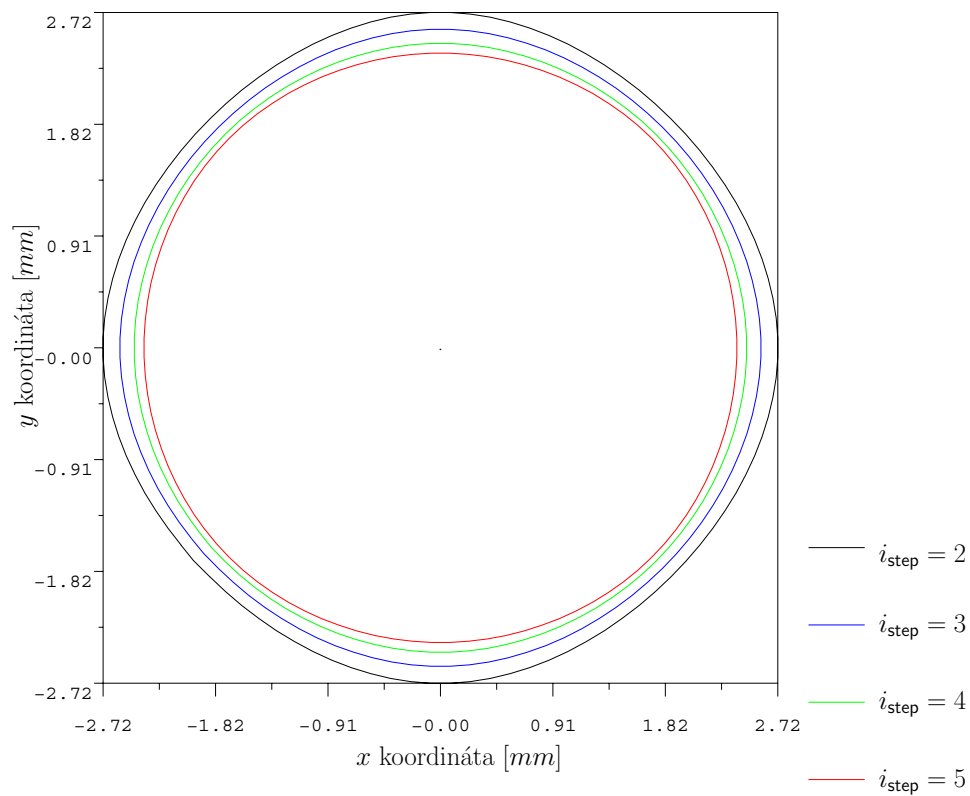
C.15. ábra: A z irányú elmozdulásmező, szimmetrikus esetben ($i_{\text{terh}} = 4$)



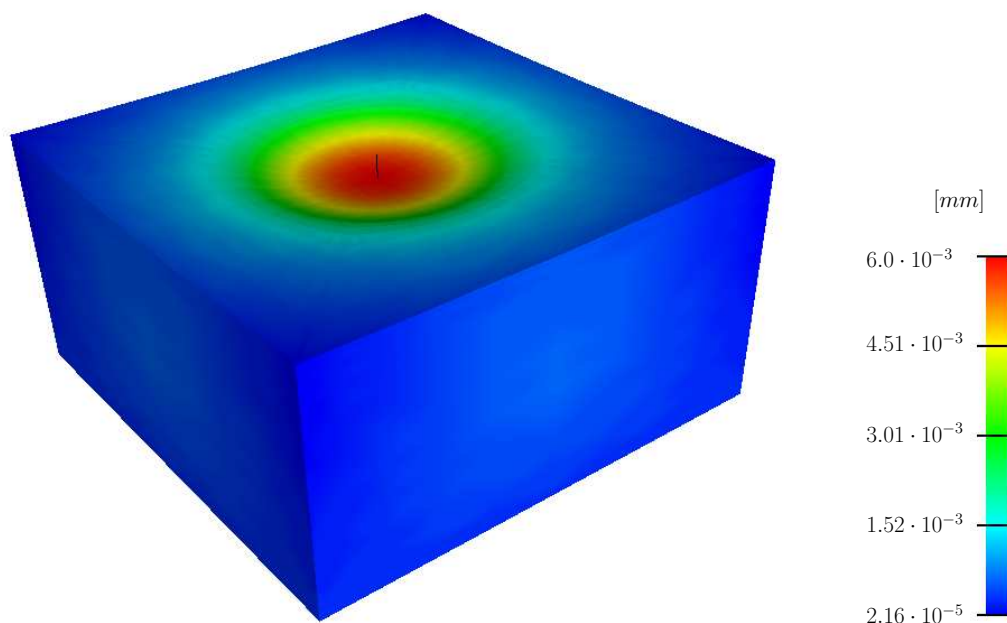
C.16. ábra: A $-\sigma_z$ feszültségmező, szimmetrikus esetben ($i_{\text{terh}} = 4$)



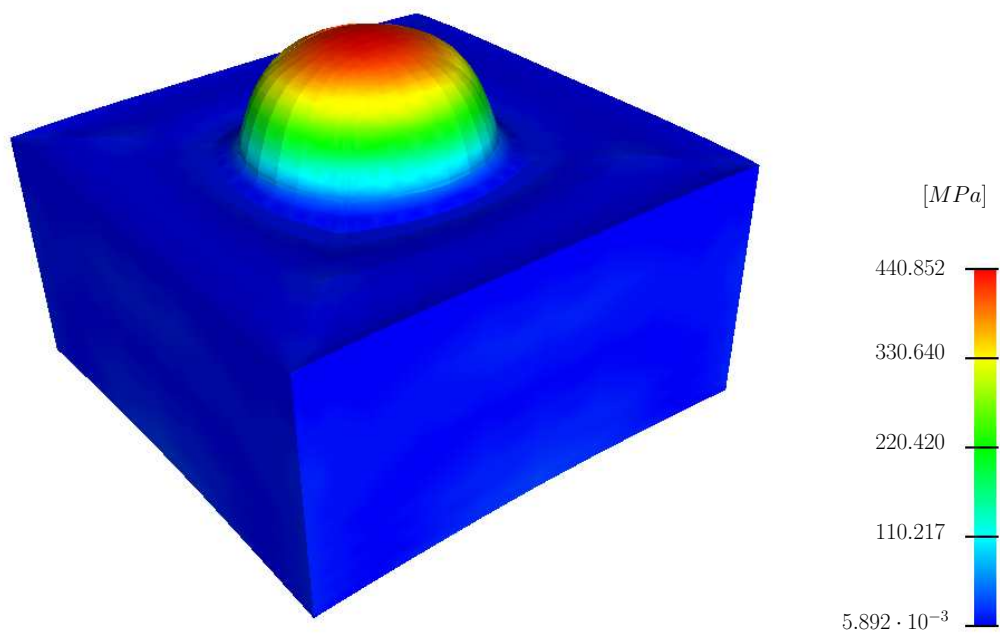
C.17. ábra: Érintkezési nyomás eloszlása, szimmetrikus esetben ($i_{\text{terh}} = 5$)



C.18. ábra: Az érintkezési tartomány változása, szimmetrikus esetben ($i_{\text{terh}} = 5$)

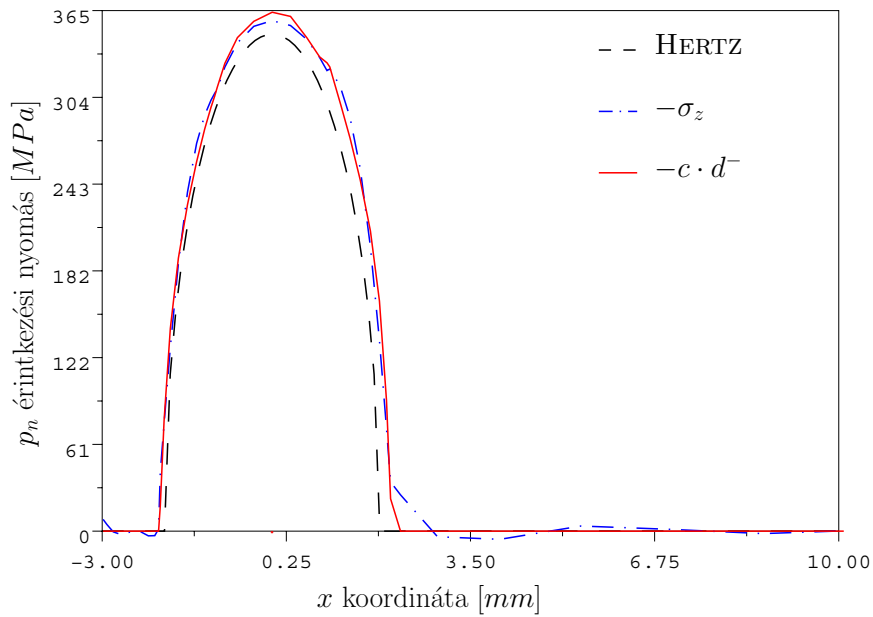


C.19. ábra: A z irányú elmozdulásmező, szimmetrikus esetben ($i_{\text{terh}} = 5$)

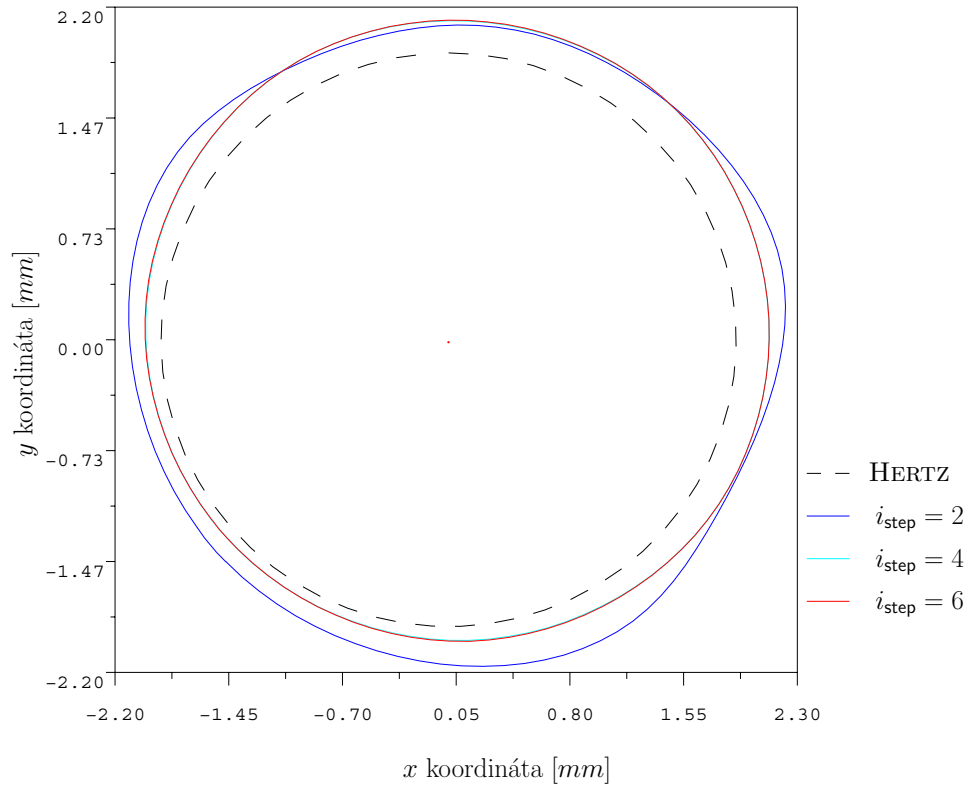


C.20. ábra: A $-\sigma_z$ feszültségmező, szimmetrikus esetben ($i_{\text{terh}} = 5$)

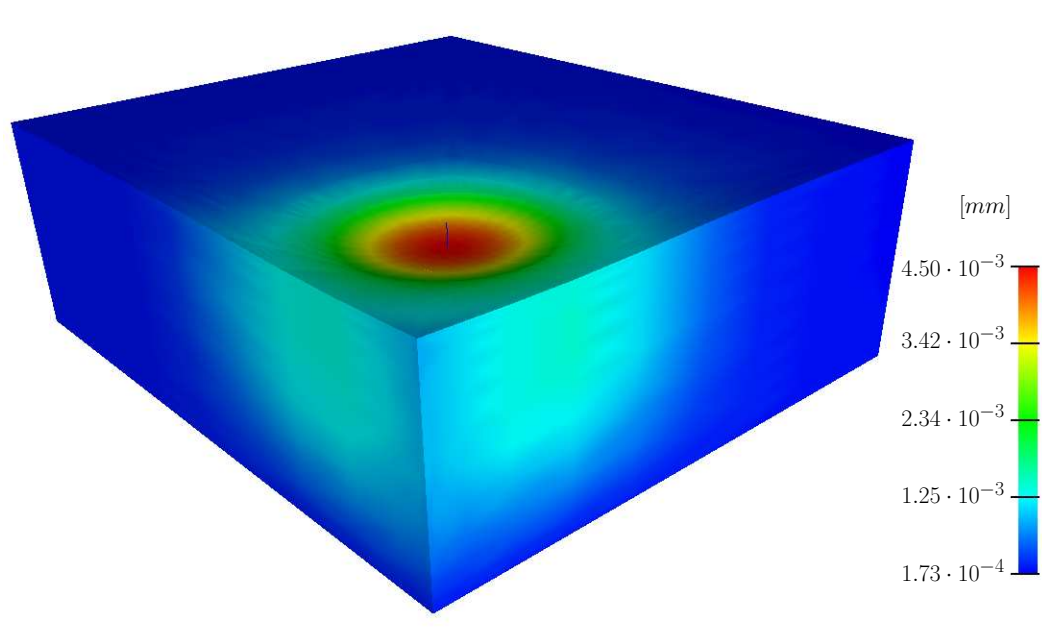
C.3. Nemszimmetrikus terhelésű 3D-s érintkezési feladatok



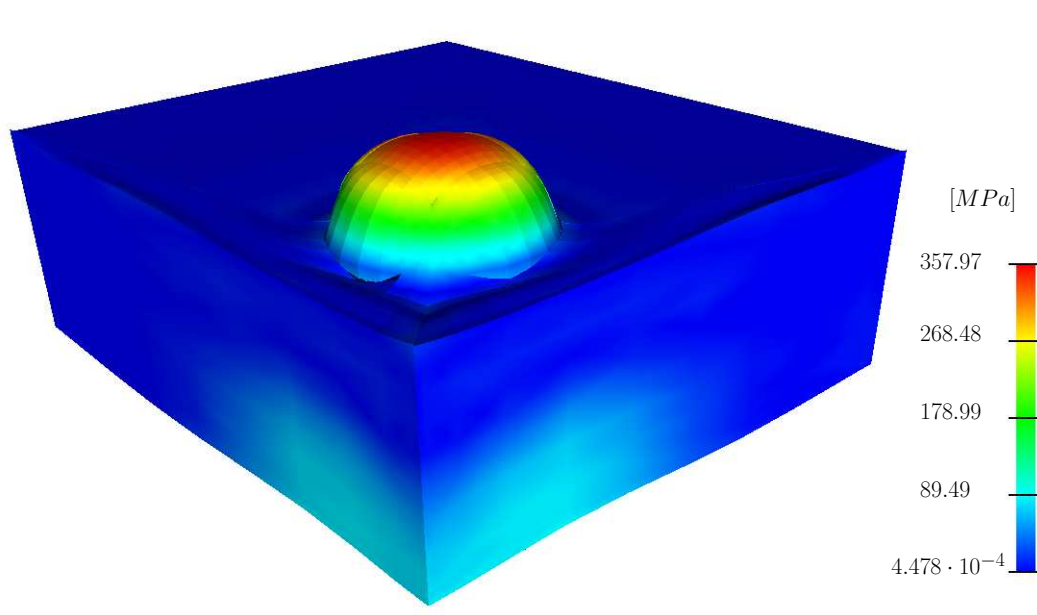
C.21. ábra: Érintkezési nyomás eloszlása, nemszimmetrikus esetben ($i_{\text{terh}} = 2$)



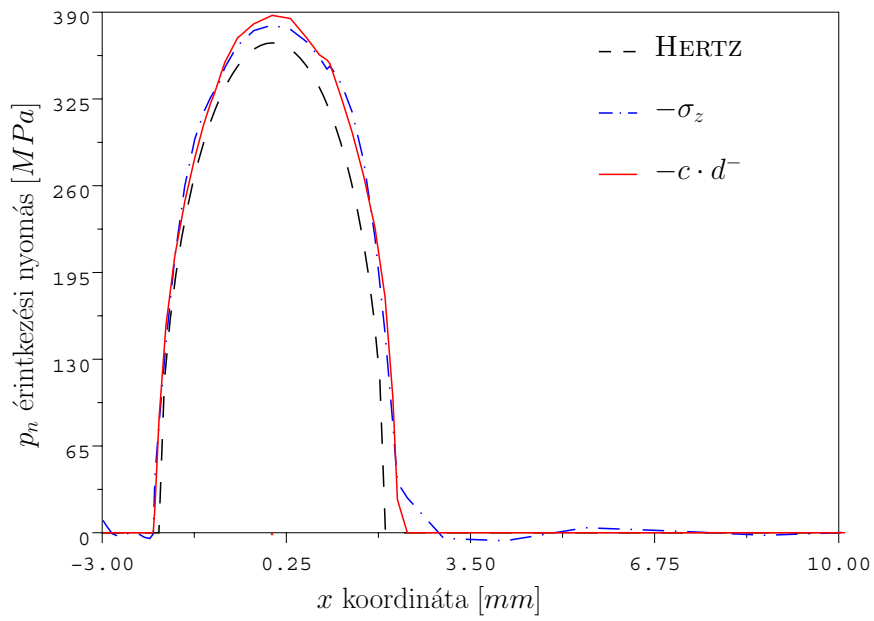
C.22. ábra: Az érintkezési tartomány változása, nemszimmetrikus esetben ($i_{\text{terh}} = 2$)



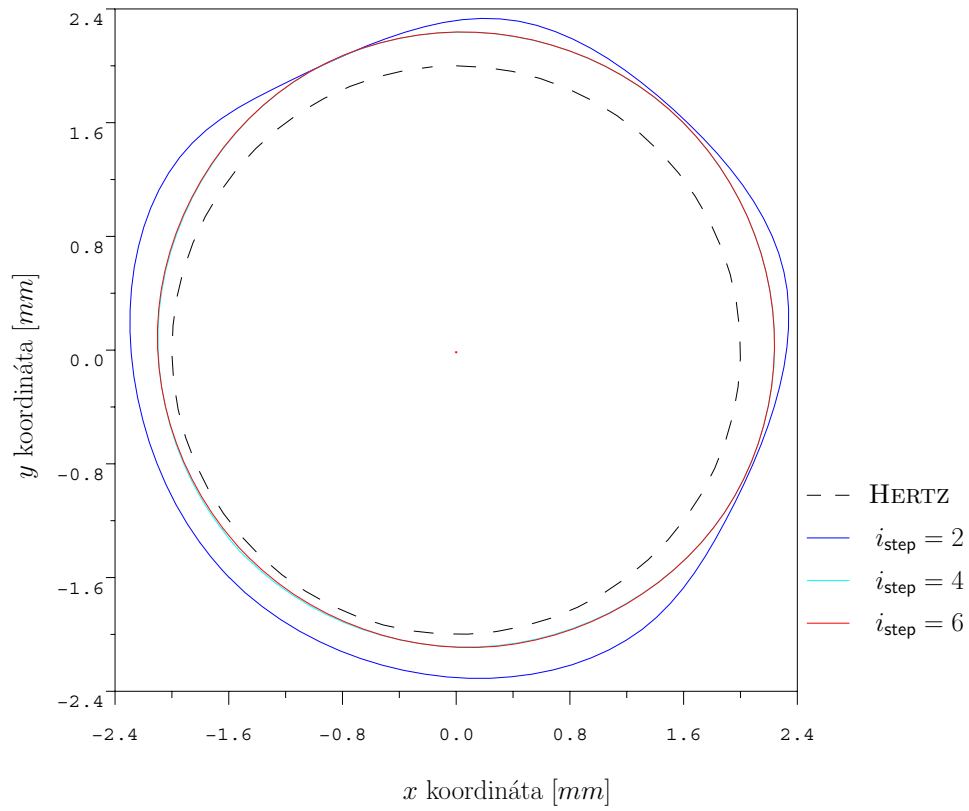
C.23. ábra: A z irányú elmozdulásmező, nemszimmetrikus esetben ($i_{\text{terh}} = 2$)



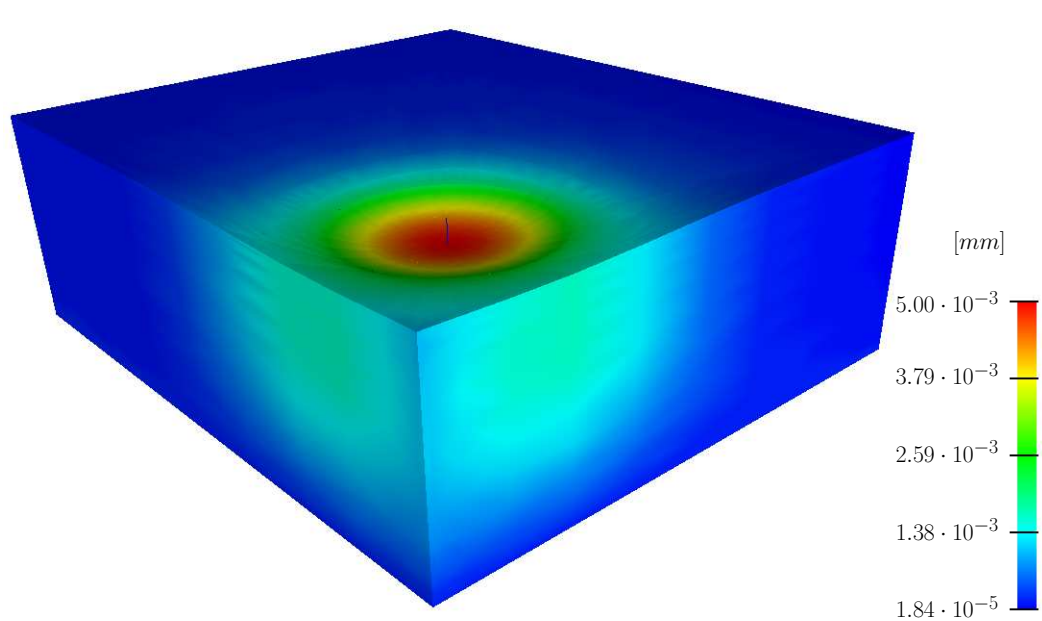
C.24. ábra: A $-\sigma_z$ feszültségmező, nemszimmetrikus esetben ($i_{\text{terh}} = 2$)



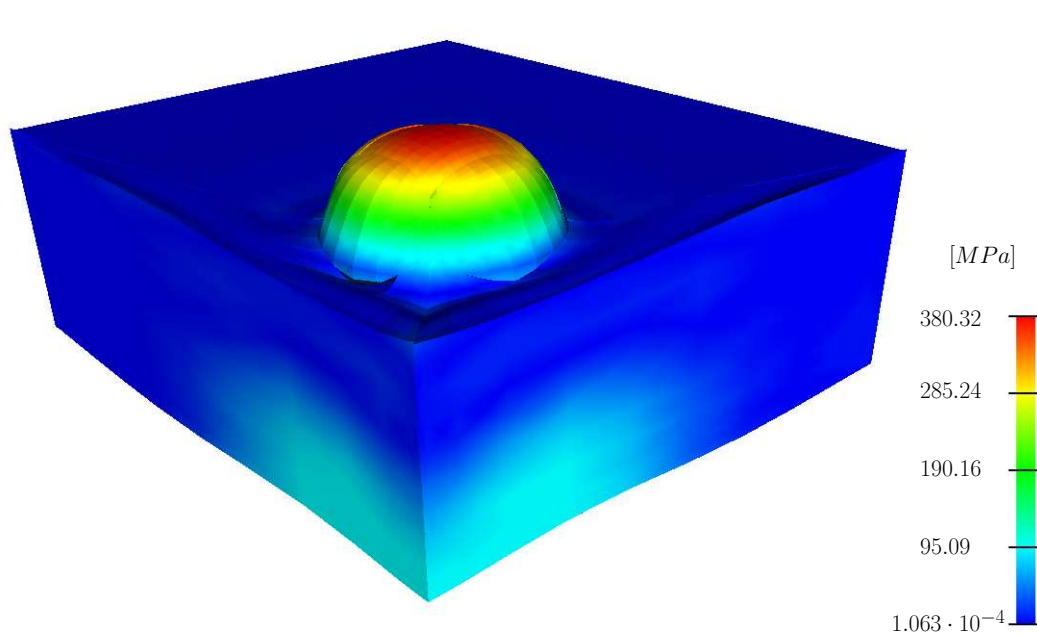
C.25. ábra: Érintkezési nyomás eloszlása, nemszimmetrikus esetben ($i_{\text{terh}} = 3$)



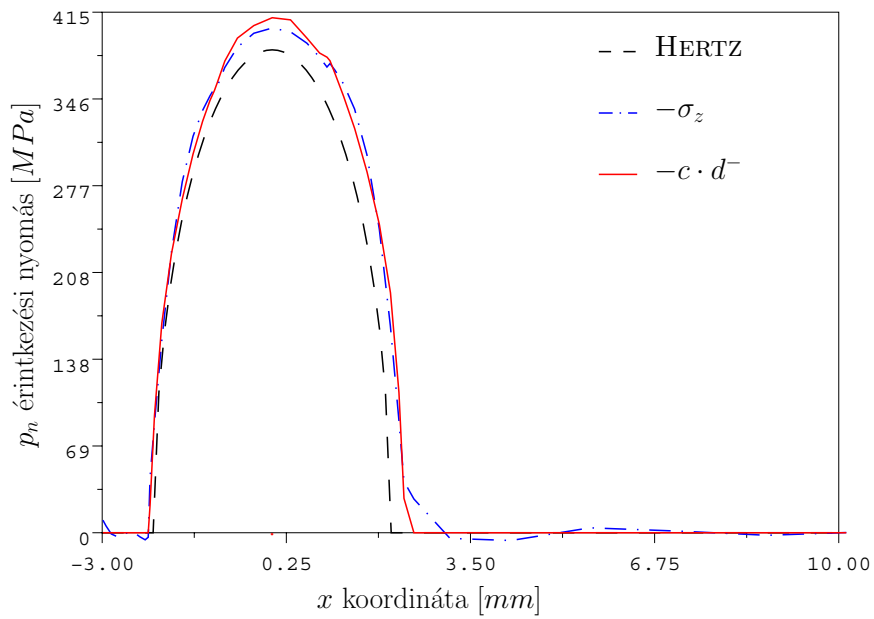
C.26. ábra: Az érintkezési tartomány változása, nemszimmetrikus esetben ($i_{\text{terh}} = 3$)



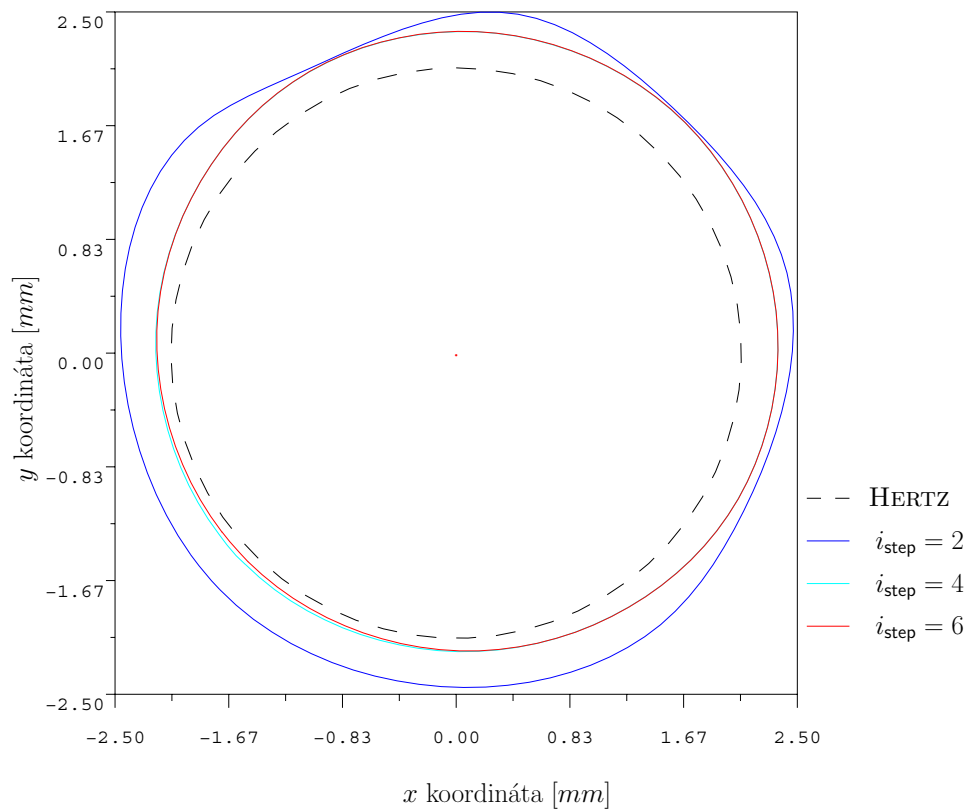
C.27. ábra: A z irányú elmozdulásmező, nemszimmetrikus esetben ($i_{\text{terh}} = 3$)



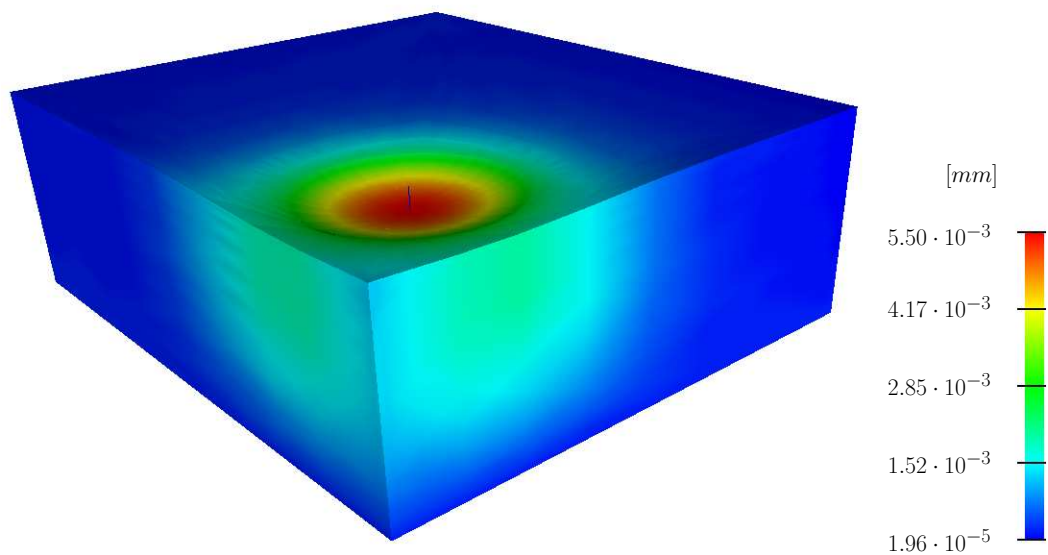
C.28. ábra: A $-\sigma_z$ feszültségmező, nemszimmetrikus esetben ($i_{\text{terh}} = 3$)



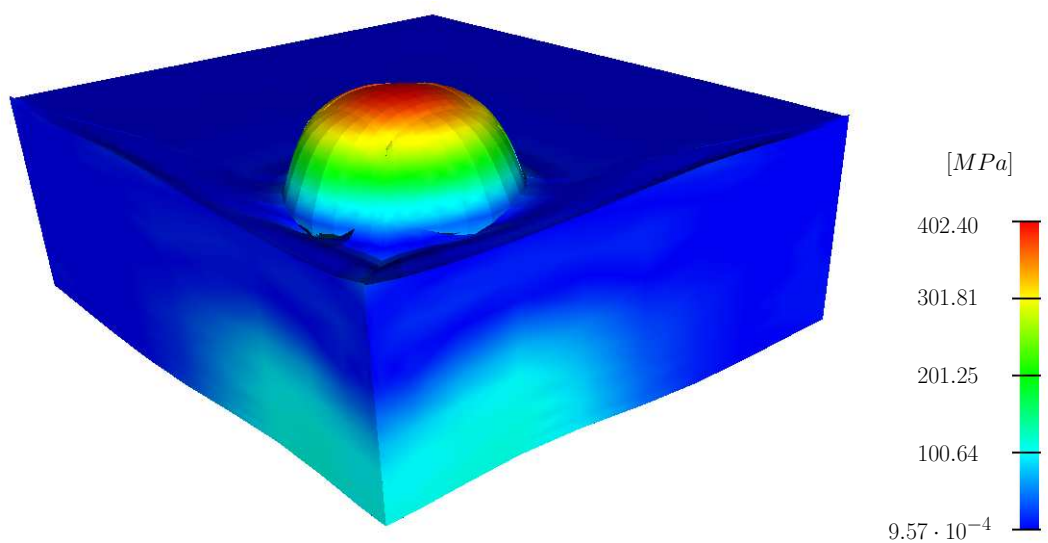
C.29. ábra: Érintkezési nyomás eloszlása, nemszimmetrikus esetben ($i_{\text{terh}} = 4$)



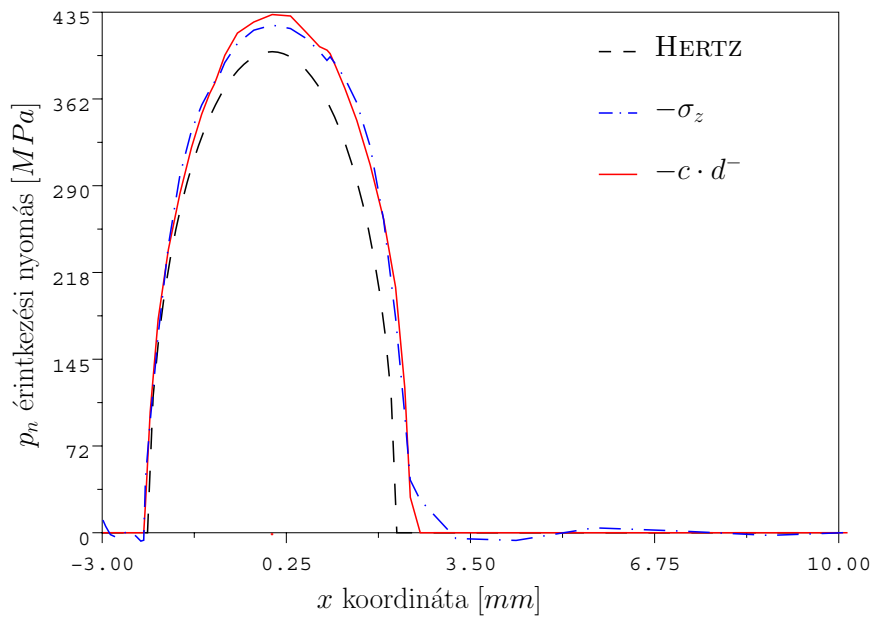
C.30. ábra: Az érintkezési tartomány változása, nemszimmetrikus esetben ($i_{\text{terh}} = 4$)



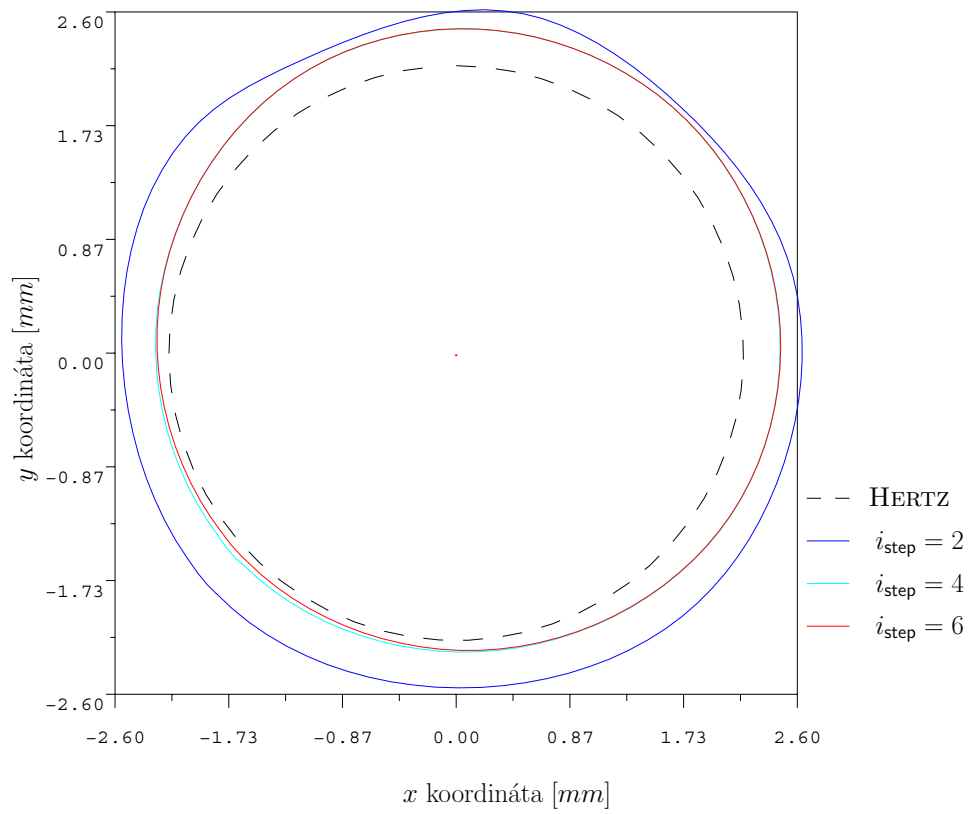
C.31. ábra: A z irányú elmozdulásmező, nemszimmetrikus esetben ($i_{\text{terh}} = 4$)



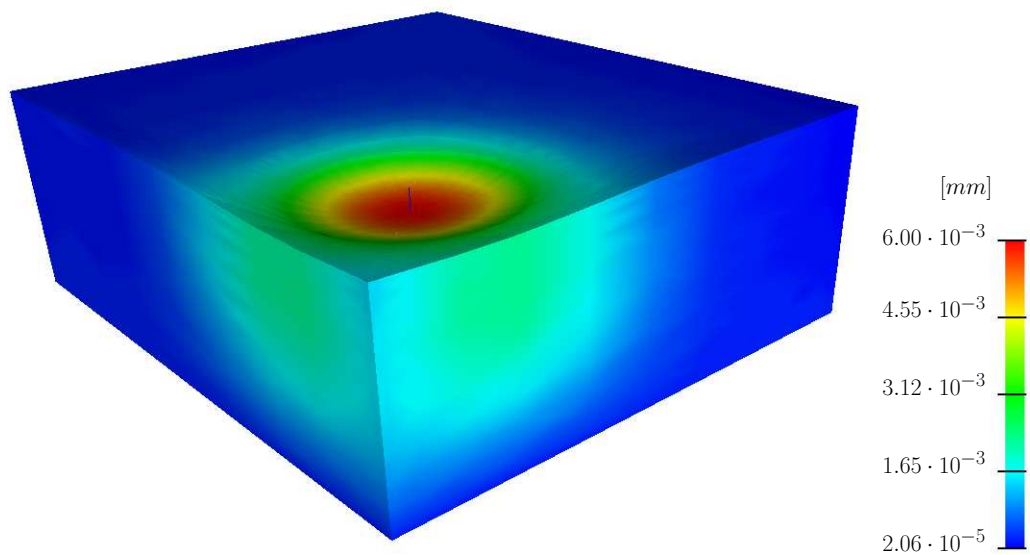
C.32. ábra: A $-\sigma_z$ feszültségmező, nemszimmetrikus esetben ($i_{\text{terh}} = 4$)



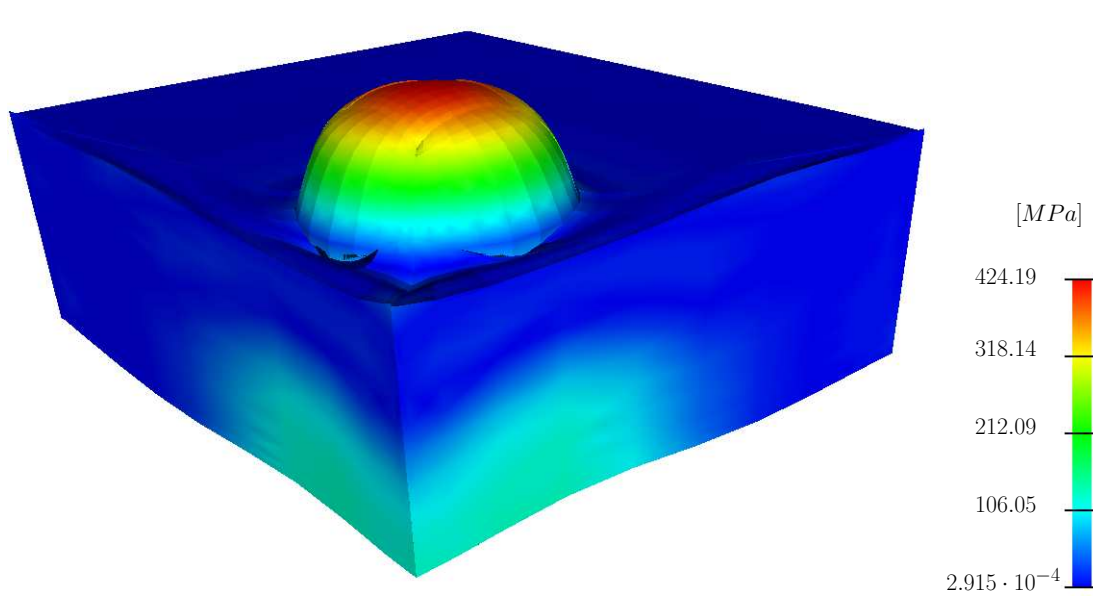
C.33. ábra: Érintkezési nyomás eloszlása, nemszimmetrikus esetben ($i_{\text{terh}} = 5$)



C.34. ábra: Az érintkezési tartomány változása, nemszimmetrikus esetben ($i_{\text{terh}} = 5$)



C.35. ábra: A z irányú elmozdulásmező, nemszimmetrikus esetben ($i_{\text{terh}} = 5$)



C.36. ábra: A $-\sigma_z$ feszültségmező, nemszimmetrikus esetben ($i_{\text{terh}} = 5$)

D. függelék

PUBLIKÁCIÓK AZ ÉRTEKEZÉS TÉMÁJÁBAN

Idegen nyelvű folyóiratban megjelent szakkikk:

- ⟨1⟩ Páczelt, I. & Baksa, A. (2002). Examination of contact optimization and wearing problems. *Journal of Computational and Applied Mechanics*, 3(1), pp. 61-84.

Magyar nyelvű folyóiratban megjelent szakkikk:

- ⟨2⟩ Baksa, A. & Páczelt, I. (2001). Some new contact optimization problems with iteration. *GÉP*, 52(3-4), pp. 38-42.
- ⟨3⟩ Baksa & Páczelt, I. (2004). Approximation of contact domain with the use of B-splines. *GÉP*, 55(1), pp. 8-13.
- ⟨4⟩ Baksa, A. (2005). Érintkezési feladat megoldása háromdimenziós p -verziójú végeselemek segítségével. *GÉP*, 56(5), pp. 1-12.

Tudományos közlemény, idegen nyelvű konferencia kiadványban:

- ⟨5⟩ Baksa, A. & Páczelt, I. (2001). Optimization problem of rolling body contacts. 3rd *International Conference of PhD Students*, University of Miskolc, pp. 1-8.
- ⟨6⟩ Baksa, A & Páczelt, I. (2001). Some new contact optimization problems. *microCAD'2001 International Scientific Conference*, Section N: Applied Mechanical Engineering Sciences, University of Miskolc, pp. 7-12.
- ⟨7⟩ Páczelt, I. & Baksa, A. (2001). Solution of contact optimization problems with iteration. *ECCM 2001 European Conference on Computational Mechanics*, Cracow, Poland, CD Proceedings.
- ⟨8⟩ Baksa, A. & Páczelt, I. (2002). Solution of contact problems with FEM and parallel technique. *microCAD'2002 International Scientific Conference*, Section D1: Mechanical Engineering Sciences, University of Miskolc, pp. 1-5.
- ⟨9⟩ Baksa, A. & Páczelt, I. (2004). Approximation of contact domain with the use of B-splines. *microCAD 2004, International Scientific Conference*, Section E: Applied Mechanics, University of Miskolc, pp. 7-12.
- ⟨10⟩ Páczelt, I. & Baksa, A. (2005). Solution of contact problems with high rate convergence. 8th *U.S. National Congress on Computational Mechanics*, Austin, Texas, July 24-28. Minisymposia: Computational Contact Mechanics, Conference CD Proceedings.

Szakmai tudományos előadás idegen nyelven:

- ⟨11⟩ Baksa, A. & Páczelt, I. (2002). Solution of contact problems using parallel technique. *nmcm2002, Numerical Methods and Computational Mechanics*, University of Miskolc.
- ⟨12⟩ Baksa, A. & Páczelt, I. (2002). Different solution methods for contact optimization problems. *Solmech2002, 34th Solid Mechanics Conference*, Zakopane, Poland.

Szakmai tudományos előadás magyar nyelven:

- ⟨13⟩ Páczelt, I. & Baksa, A. (1999). Programrendszer érintkezési feladatok megoldására, *VIII. Magyar Mechanikai Konferencia*, Miskolci Egyetem.
- ⟨14⟩ Baksa, A. & Páczelt, I. (2003). Iterációs technikák érintkezési optimalizálási feladatok megoldásához. *OGET2003, XI. Nemzetközi Gépész Találkozó, Számítógépes tervezés és gyártás*, Erdélyi Magyar Társaság, Kolozsvár, pp. 26-30.
- ⟨15⟩ Baksa, A. & Páczelt, I. (2003). Érintkezési feladatok vizsgálata magasfokú approximáció segítségével. *IX. Magyar Mechanikai Konferencia*, Miskolci Egyetem.
- ⟨16⟩ Baksa, A. & Páczelt, I. (2005). Térbeli érintkezési feladat vizsgálata. *OGET2005, XIII. Nemzetközi Gépész Találkozó, Fogaskerék-hajtások, Modern Megmunkálások*, Erdélyi Magyar Társaság, Szatmárnémeti, pp. 39-42.

HIVATKOZÁSOK

- [1] G. Amontons. On the resistance originating in machines. *Mem. Acad. Roy.*, pages 206–222, 1699.
- [2] J.S. Arora, A.I. Chahande, and J.K. Paeng. Multiplier methods for engineering optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 7:1485–1525, 1991.
- [3] N. Atting and R. Esser. *Molecular Dynamics on Parallel Computers*. World Scientific, 1999.
- [4] I. Babuška and B.Q. Guo. Approximation properties of the *hp*-version of the finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 133:319–346, 1996.
- [5] I. Babuška and W.C. Rheinboldt. Error estimates for adaptive finite element computations. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 15:736–754, 1978.
- [6] I. Babuška and M. Suri. The *p*- and *hp*-versions of the finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 80:5–26, 1990.
- [7] P.K. Banerjee. *The Boundary Element Methods in Engineering*. McGraw – Hill Book Company, 1994.
- [8] R.H. Bartels, J.C. Beatty, and B.A. Barsky. *An Introduction to Splines for use in Computer Graphics & Geometric Modeling*. Morgan Kaufmann Publishers, Inc., 1987.
- [9] K.J. Bathe. *Finite Element Procedures*. Prentice Hall, 1996.
- [10] Gy. Béda, I. Kozák, and J. Verhás. *Kontinuummechanika*. Akadémiai Kiadó, 1995.
- [11] Y.P. Chiu and M.J. Harnett. A numerical solution for the contact problem involving bodies with cylindrical surface considering cylinder effect. *ASME Journal for Tribology*, 109:479–486, 1987.
- [12] T.F. Conry and A. Seireg. A mathematical programming method for design of elastic bodies in contact. *Journal of Applied Mechanics*, 38:1293–1307, 1971.
- [13] C.A. Coulomb. The theory of simple machines. *Mem. Math. Phys. Acad. Sci.*, 10:161–331, 1785.
- [14] B.M. Csizmadia and E. Nándori. *Mechanika Mérnököknek, Modellalkotás*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2003.
- [15] A. Düster. *High order finite elements for three-dimensional, thin-walled nonlinear continua*. Shaker Verlag, Aachen, 2001.
- [16] L. Euler. Sur le frottement des corps solides. *Mem. Acad. Sci. Berlin*, 4:122–132, 1748.

- [17] J. Gallier. *Curves and Surfaces in Geometric Modeling, Theory and Algorithms*. Morgan Kaufmann Publishers, San Fransisco, California, 2000.
- [18] W. Goldsmith. *Impact: The theory and physical behavior of colliding solids*. London: Edward Arnold, 1960.
- [19] W. Gui and I. Babuška. The h -, p - and hp -versionns of the finite element mehod in on dimension. Part I: The error analysis of the p -version. *Numerische Mathematik*, 49:577–612, 1986.
- [20] W. Gui and I. Babuška. The h -, p - and hp -versionns of the finite element mehod in on dimension. Part II: The error analysis of the h - and hp -versions. *Numerische Mathematik*, 49:613–657, 1986.
- [21] M.J. Harnett. The analysis of contact stresses in rolling element bearings. *ASME, Journal for Lubrication Technology Series F*, 98:105–109, 1979.
- [22] J. Haslinger and P. Neittaanmaki. *Finite Element Approximation for Optimal Shape Design*. John Wiley & Sons Ltd., London, 1996.
- [23] H. Hertz. Über die Berührung fester elastischer Körper. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 29:156–171, 1882.
- [24] D. Hilding, A. Klarbring, and J. Peterson. Optimization of structures in unilateral contact. *Applied Mech. Rev.*, 52(4):139–160, 1999.
- [25] T.J.R. Hugues, R.L. Taylor, J.L Sackman, A. Curner, and W. Kanaknukulchai. A finite element method for a class of contact-impact problems. *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 8:249–276, 1976.
- [26] K.L. Johnson. *Contact Mechanics*. Cambridge University Press, 1985.
- [27] J.-W. Ju and R.L. Taylor. A perturbed Lagrangian formulation for the finite element solution of nonlinear frictional contact problems. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 7:1–14, 1988.
- [28] I. Juhász. *Számítógépes geometria és grafika*. Miskolci Egyetemi kiadó, 1995.
- [29] I. Juhász and Zs. Bancsik. Increasing the degree of closed B-spline curves. *Mathematical and Computer Modeling*, 38:877–882, 2003.
- [30] J.J. Kalker. *A Course of Contact Mechanics*. TU Delft, Neatherland, 1985.
- [31] J.J. Kalker. *Three Dimensional Elastic Bodies in Rolling Contact*. Academic Publisher, Doordrecht, 1990.
- [32] J.J. Kalker. *User's Manual, Listing CONPC*. TU Delft, Faculty of Technical Mathematics and Informatics, 1990.
- [33] N. Kikutchi and J.T. Oden. A study of variational inequalities and finite element methods. In *Contact problems in elasticity*. Philadelphia: SIAM, 1988.
- [34] N. Kikutchi and J.E. Taylor. Shape optimization for unilateral elastic bodies in contact. In *Num. Meth. Coupl. Probl. (Proceeding for International Conference, held at University College, Swansea, Wales)*, pages 430–441, 1981.
- [35] A. Klarbring. Contact, friction, discrete mechanical structures and mathematical programming. In *CISM course: Contact problems: Theory, Methods, Applications*, pages 1–51, 1997.

- [36] A. Klarbring and J. Haslinger. On almost constant stress distribution by shape optimization. *Structural Optimization*, 5:213–216, 1993.
- [37] B. Krekó. *Optimum számítás*. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1972.
- [38] A.I. Lur'e. *Three-dimensional Problems of the Theory of Elasticity*. English translation by J.R.M. Radok, Interscience, 1964.
- [39] Z. Mróz. Sensitivity analysis of distributed and discretized systems. *Advanced TEMPUS Course on Numerical Methods in Computer Aided Optimal Design, Zakopane*, 1:1–60, 1992.
- [40] I. Páczelt. *Végeselem-módszer a mérnöki gyakorlatban, I. kötet*. Miskolci Egyetemi Kiadó, Miskolc, 1999.
- [41] I. Páczelt. Iterative methods for solution of contact optimization problems. *Archives of Mechanics*, 52(4-5):685–711, 2000.
- [42] I. Páczelt and A. Baksa. Examination of contact optimization and wearing problems. *Journal of Computational and Applied Mechanics*, III(1):61–84, 2002.
- [43] I. Páczelt and B. Herpai. Some remarks on the solution of contact problems of elastic shells. *Archivum Budowy Maszyn XXIV*, pages 197–202, 1977.
- [44] I. Páczelt, B. Szabó, and T. Szabó. Solution of contact problem using the *hp*-version of the finite element method. *Computers and Mathematics with Applications*, 38:49–69, 1999.
- [45] I. Páczelt and T. Szabó. Optimal shape design for contact problems. *Structural Optimization*, 7(1/2):66–75, 1994.
- [46] I. Páczelt and T. Szabó. Application of the augmented Lagrangian technique for solution of contact optimization problems. *Second International Conference on Contact Mechanics, Computational Mechanics Publications, London*, II:249–256, 1995.
- [47] I. Páczelt and T. Szabó. Solution of contact optimization problems of cylindrical bodies using the *hp*-fem. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 53:123–146, 2002.
- [48] P.D. Panagiotopoulos. *Inequality Problems in Mechanics, Convex and Nonconvex Energy Functions*. Birkhäuser Verlag, Boston, Basel, 1985.
- [49] H. Park. Choosing nodes and knots in closed B-spline curve interpolation to point data. *Computer-Aided Design*, 33:967–974, 2001.
- [50] H. Park and K. Kim. Smooth surface approximation to serial cross-sections. *Computer-Aided Design*, 28:995–1005, 1999.
- [51] H. Park, K. Kim, and S-C. Lee. A method for approximate NURBS curve compatibility based on multiple curve refitting. *Computer-Aided Design*, 32:237–252, 2000.
- [52] J. Peterson. Behaviorally constrained contact force optimization. *Structural Optimization*, 9:189–193, 1995.
- [53] F. Pfeiffer and C. Glocker. *Multibody Dynamics with Unilateral Contact*. John Wiley & Sons, New York, 1996.
- [54] L. Piegl and W. Tiller. *The NURBS Book*. Berlin: Springer, 1995.

- [55] Sz.D. Ponormajov. *Szilárdsági számítások a gépészetben: 3. kötet, Lemezek. Héjak. Vastag falú csövek. Érintkezési feszültség*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1965.
- [56] A. Signorini. Sopra alcune questioni di elastostatica. *Atti della Societa Italiana per il Progresso delle Scienze*, 1933.
- [57] J.C. Simo, P. Wriggers, and R.L. Taylor. A perturbed Lagrangian fomulation for the finite element solution of contact problems. *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 50:163–180, 1985.
- [58] N. Strömberg, L. Johanson, and A. Klarbring. Derivation and analysis of a generalized standard model for contact, friction and wear. *International Journal for Solids and Structures*, 33:1817–1836, 1996.
- [59] M. Suri, I. Babuška, and C. Schwab. Locking effects in the finite element approximation of plate models. *Mathematics of Computation*, 64:461–482, 1996.
- [60] B. A. Szabó and I. Babuška. *Finite Element Analysis*. John Wiley & Sons, 1991.
- [61] B.A. Szabó. Mesh design for the p -version of the finite elemen method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 55:181–197, 1986.
- [62] B.A. Szabó and R.L. Actis. Finite element analysis in professional practice. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 133:209–228, 1996.
- [63] S.P. Timoshenko and J.N. Goodier. *Theory of Elasticity*. McGraw-Hill, New York, 1970.
- [64] M.J. Turner, R.W. Clough, H.C. Martin, and L.J. Topp. Stiffness and deflection analysis of complex structures. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 23:805–823, 1956.
- [65] E.A. Wilson and B. Parsons. Finite element analysis of elastic contact problems using differential displacements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2:387–395, 1970.
- [66] P. Wriggers. *Computational Contact Mechanics*. John Wiley & Sons, Ltd, 2002.
- [67] Z.H. Zhong. *Finite element procedures for contact-impact problems*. New York: Oxford University Press, 1993.