

Miskolci Egyetem



GÉPÉSZMÉRNÖKI KAR

Peremkontúr-módszer a lineáris rugalmasságtan síkfeladataira
duál rendszerben

PhD értekezés tézisei

KÉSZÍTETTE:

Szirkik Sándor Mátyás
okleveles gépészmérnök

SÁLYI ISTVÁN GÉPÉSZETI TUDOMÁNYOK DOKTORI ISKOLA,
GÉPÉSZETI ALAPTUDOMÁNYOK TÉMATERÜLET,
SZILÁRD TESTEK MECHANIKÁJA TÉMACSOPORT

DOKTORI ISKOLA VEZETŐ:

Dr. Páczelt István
az MTA rendes tagja

TÉMACSOPORT VEZETŐ:

Dr. Kozák Imre
az MTA rendes tagja

TÉMAVEZETŐ:

Dr. habil Szeidl György
egyetemi tanár

Miskolc, 2004

Bíráló bizottság tagjai

Elnök:

Dr. habil Galántai Aurél a matematika tudomány kandidátusa

Titkár:

Dr. Szabó Ferenc a műszaki tudomány kandidátusa

Tagok:

Dr. habil Jármai Károly a műszaki tudomány doktora

Dr. Vörös Gábor a műszaki tudomány kandidátusa

Dr. habil Váradi Károly a műszaki tudomány kandidátusa

Hivatalos bírálók:

Dr. Uj József a műszaki tudomány kandidátusa

Dr. habil Gáspár Csaba a matematika tudomány kandidátusa

1. TUDOMÁNYOS ELŐZMÉNYEK

A peremelem-módszer hatékony numerikus eljárás, amely parciális differenciálegyenletekkel kapcsolatos peremérték-feladatok integrálegyenletek alkalmazásával történő megoldására szolgál. Az eljárás integrálegyenletei a tartomány peremére vonatkoznak, így a numerikus megoldás keresése során a tartomány peremét (síkbeli esetben a peremgörbét, térbeli esetben a peremfelületet) véges méretű elemekre, ún. peremelemekre bontjuk és ezeken az elemeken értelmezzük a megoldásokat (pl. elmozdulásvektor és feszültségvektor) közelítő függvényeket. Az egész peremre vonatkozó közelítést a peremelemek vett közelítések összessége adja. Az integrálegyenletek megoldása a peremen szolgáltatja a feladat peremfeltételek alapján nem ismert változóit. A peremen meghatározott mennyiségek ismeretében további egyenletekkel a tartomány belső pontjaiban képezhetőek a fizikai állapotokat leíró jellemzők. A peremelem-módszer egyik nagy előnye, hogy a megoldandó feladatok mérete eggyel kisebb lesz, mint az eredeti peremértékfeladat mérete (3D helyett 2D, 2D helyett 1D). A módszer alkalmazhatóságának kulcskérdése, hogy elő tudjuk állítani a módszer integrálegyenleteiben szereplő ún. alapegyenleteket.

A peremintegrál-egyenlet módszer elnevezést CRUSE és RIZZO használta először [1] és feltehetően ennek alapján alakult ki a BREBBIA és DOMINGUEZ [2, 3, 4] által bevezetett és valamivel egyszerűbb, de ma már általánosan elfogadott peremelem-módszer kifejezés. A módszerrel kapcsolatos első összefoglaló jellegű munka, az előbb említett [2] könyv 1978-ban jelent meg.

A szilárd testek mechanikájának peremérték-feladatai általában primál és duál alakban is megfogalmazhatóak. Mind a primál, mind pedig a duál rendszerben szerepelnek alapváltozók, elsődleges és másodlagos közbenső változók és forrásváltozók, valamint értelmező vagy kinematikai egyenletek, anyagegyenletek és mérlegegyenletek, illetve az utóbbiakból képzett alapegyenletek.

Az alapváltozókból az értelmező egyenletek felhasználásával lehet az elsődleges közbenső változókat képezni, majd ezek birtokában az anyagegyenletek felhasználásával képezhetőek a másodlagos közbenső változók. Az alapegyenletek az utóbbinak mérlegegyenletbe történő helyettesítésével adódnak.

Az alapegyenletek csak az alapváltozókat tartalmazzák ismeretlenként.

A [primál] {duál} rendszer elsődleges közbenső változója megegyezik a [duál] {primál} rendszer másodlagos közbenső változójával.

Arra a felismerésre, hogy a matematikai fizika peremérték-feladatai a fenti módon rendszerbe foglalhatóak TONTI jutott [5], [6].

Az értekezés duál rendszerben végez vizsgálatokat a lineáris rugalmasságtan keretei között homogén, izotróp testre. Az alábbiak tömören áttekintik a duál rendszer változóit és egyenleteit.

A rugalmasságtan duál rendszerében másod-, vagy elsőrendű feszültségfüggvények tenzora az alapváltozó, a feszültségi tenzor az elsőrendű közbenső változó és az alakváltozási tenzor a másodrendű közbenső változó.

A duál rendszer mezőegyenleteit

- a feszültségi tenzort (feszültségeket) feszültségfüggvényekkel megadó egyenletek (duál kinematikai egyenletek),
- az alakváltozási tenzorra felírt HOOKE-törvény és

- az alakváltozási tenzor kompatibilitási feltételei alkotják.

Az elsőrendű feszültségfüggvények alkalmazásával kapcsolatosan, ami a variációs megfogalmazást illeti BERTÓTI [7], [8] cikkei, ami a peremelemes alkalmazásokat illeti SZEIDL [9], SZEIDL és SZIRBIK [10] és SZIRBIK [11] munkái említendők.

A primál rendszerbeli ún. *direkt peremelem-módszer*² integrálegyenletének jobboldalán álló integrál integranduszának divergenciamentességét LUTZ [12, 1991] ismerte fel. A divergenciamentesség fennállásának az a feltétele, hogy a primál rendszer alapváltozójaként szereplő elmozdulásmező kielégítse az alapegyenletet. A divergenciamentességnek az az eredménye, hogy a primál rendszerbeli direkt peremelem-módszer egyenletei egyszerűsödnek [13]. Ez azt jelenti, hogy háromdimenziós esetben a felületi integrálok helyett felületen vett vonalintegrálokat kell számítani, míg síkbeli feladatok esetén a potenciálfüggvények pontbeli értékeinek különbségét kell meghatározni a peremelemeken vett vonalintegrálok számítása helyett, azaz tovább csökkent a feladat mérete.

Az utóbbi lehetőséget használja ki az ún. *peremkontúr-módszer*, amelyet többek között, primál rendszerben vett két-, illetve háromdimenziós, lineáris rugalmasságtani feladatok megoldására használták fel [13], [14], [15].

A módszer lényegét tömören, síkbeli feladatokra korlátozva a figyelmet, az alábbiak foglalják össze.

A módszer az integrálegyenletek vonalintegráljait nem numerikusan (pl. a GAUSS-formula segítségével) számítja, hanem az integrandusz divergenciamentességét kihasználva potenciálfüggvényeket konstruál és ezek lineáris kombinációit véve, zárt alakú képleteket alkalmazza minden elemen. Ez a technika megnöveli a numerikus számítások pontosságát. A módszer bevezetése a rugalmasságtan primál rendszerében NAGARAJAN, LUTZ és MUKHERJEE nevéhez fűződik [13], [14].

Az idézett szerzők peremelemekre bontják fel a tartomány peremgörbáját és az egyes peremelemek egy kis környezetében közelítik kétváltozós lineáris, vagy kvadrátikus függvényekkel az elmozdulásmezőt és ezekből képzik ugyanitt a feszültségeket. Az elmozdulásmező lineáris közelítésének esetében hat, kvadrátikus esetben pedig tíz egymástól lineárisan független és az alapegyenletet kielégítő ún. alakfüggvény lineáris kombinációja. Következésképp, ezek mindegyikéhez meg kellett konstruálni a vonatkozó potenciálfüggvényeket.

Az alakfüggvények lineáris kombinációjaként véve az adott elemen az elmozdulásmező közelítését, az utóbbiakban szereplő állandók, mint matematikai mennyiségek, a peremelem egyes kiválasztott pontjaiban vett fizikai mennyiségekkel (elmozdulásmező és normál, illetve érintő irányú nyírófeszültség) hozhatók kapcsolatba. Ez a kapcsolat a matematikai és fizikai állandók között mindig egyértelmű.

A primál rendszerrel kapcsolatos direkt módszer integrálegyenletében lévő integrálok az elemeken közvetlenül számított integrálok összegeként állítható elő. Ezzel szemben a peremkontúr-módszer az elemeken vett integrálok lineáris és kvadrátikus alakfüggvényekhez tartozó potenciálfüggvények különbségeként számíthatók. Ilyenkor a potenciálfüggvények zárt alakban képezhetők, azaz nincs szükség numerikus integrálásra.

²Különbséget szokás tenni az irodalomban a direkt és indirekt peremelem-módszer között [2]. Az értekezés vizsgálatai a direkt peremelem-módszer integrálegyenleteire vonatkoznak.

Ha a peremelem-módszer integrálegyenletét a perem megfelelő pontjaiban kollokáljuk, akkor lineáris egyenletek állíthatók elő a peremen ismeretlen fizikai mennyiségek számítására.

A kapott egyenletrendszer megoldva a tartomány belső pontjaiban is számíthatók az elmozdulások, alakváltozások és feszültségek.

Megjegyezzük, hogy ismereteink szerint még senki nem foglalkozott azzal a kérdéssel, hogy hogyan lehet kiterjeszteni a peremkontúr-módszert duál rendszerben megfogalmazott peremérték-feladatokra.

2. CÉLKITŰZÉSEK

Az értekezés, az előző Tudományos előzmények szakasz áttekintése alapján, különös tekintettel arra a körülményre, hogy duál rendszerben még nem folytak ilyen vizsgálatok, a peremkontúr-módszer duál rendszerben és síkfeladatokra történő kidolgozását tekinti céljának. A kitűzött feladat megoldása során a következő kérdések merülnek fel:

1. *divergenciamentes-e a duál rendszerrel kapcsolatos direkt peremelem-módszer egyenleteiben álló integrandusz,*
2. *ha igen, melyek a potenciálfüggvények lineáris approximáció esetén (a duál alapegyenletnek is teljesülnie kell),*
3. *melyek a potenciálfüggvények kvadrátikus approximáció esetén (a duál alapegyenletnek is teljesülnie kell),*
4. *milyen a kapcsolat a potenciálfüggvényekben szereplő paraméterek és a perem-csomópontokban vett fizikai mennyiségek között,*
5. *hogyan építhető fel a megoldást adó lineáris egyenletrendszer,*
6. *hogyan számíthatók a tartomány belső pontjában a feszültségi jellemzők.*

Az értekezést a peremkontúr-módszer duál rendszerbeli kidolgozásának feladatát elsőrendű feszültségfüggvények alkalmazása mellett tárgyalja. Az elsőrendű feszültségfüggvények használata számos kérdést vet fel. Tisztázni kell a megoldás egyértékűségének szükséges és elégséges feltételeit és meg kell keresni az elsőrendű feszültségfüggvényekre vonatkozó alapmegoldást. Az alapmegoldás ismeretében mód nyílik a SOMIGLIANA-féle identitás duál rendszerbeni felállítására és így módon a direkt peremelem módszer integrálegyenletei is kiadódnak.

A direkt peremelem-módszer integrálegyenleteit síkfeladatok esetére a [9] munka ismerteti duál rendszerben. Az idézett munka a direkt peremelem-módszer hagyományos megoldási technikáját használja a numerikus megoldás során.

Az értekezés a duál rendszerbeli peremkontúr-módszer felépítésekor a direkt peremelem-módszer integrál egyenletének divergenciamentességének vizsgálatából indul ki és a numerikus alkalmazások kulcskérdéseinek tárgyalásán keresztül a számító program kifejlesztéséből nyert numerikus tapasztalatok feldolgozásáig jut el.

3. ÚJ TUDOMÁNYOS EREDMÉNYEK

Az új tudományos eredmények a duál rendszerbeli lineáris rugalmasságtan síkbeli feladataira vonatkoznak, homogén, izotróp testet feltételezve. A vizsgált tartomány egyszerűen összefüggő, lehet belső vagy külső. A felhasznált jelöléseket a jelölésjegyzék tartalmazza.

1. Legyen $\mathbf{u}_k$ a duál alapegyenletet kielégítő vektor. Legyen továbbá $\mathbf{t}_{\lambda\rho}$ az $\mathbf{u}_k$ -ből számított duál feszültségtenzor. Megmutattam, hogy ez esetben divergenciamentes a duál egyenletrendszerrel kapcsolatos SOMIGLIANA formulák jobboldalán álló

$$I_\kappa(Q) = \oint_{\mathcal{L}_o} [\mathfrak{u}_{\kappa\lambda}(M, Q)\mathfrak{t}_{\lambda\rho}(M) - \mathfrak{T}_{\kappa\lambda\rho}(M, Q)\mathfrak{u}_\lambda(M)] n_\rho(M) \, ds_M \quad (1)$$

integrál integrandusza, azaz fennáll a

$$\underbrace{[\mathfrak{u}_{\kappa\lambda}(M, Q)\mathfrak{t}_{\lambda\rho}(M) - \mathfrak{T}_{\kappa\lambda\rho}(M, Q)\mathfrak{u}_\lambda(M)]}_{P_{\kappa\rho}} \overset{M}{\partial}_\rho = 0 \quad (2)$$

egyenlet. Következésképp, létezik olyan

$$\phi_\kappa(\eta_1, \eta_2) = \int \epsilon_{\rho\pi 3} P_{\kappa\rho} d\eta_\pi = \int \epsilon_{\rho\pi 3} \left\{ \mathfrak{u}_{\kappa\lambda}(\eta_1, \eta_2)\mathfrak{t}_{\lambda\rho}(\eta_1, \eta_2) - \right. \\ \left. - \mathfrak{T}_{\kappa\lambda\rho}(\eta_1, \eta_2)\mathfrak{u}_\lambda(\eta_1, \eta_2) \right\} d\eta_\pi \quad (3)$$

potenciálfüggvény, amelynek a birtokában zárt alakban számítható az (1) integrál:

$$I_\kappa(Q) = \sum_{e=1}^{n_{be}} [\phi_\kappa^e(M_2, Q) - \phi_\kappa^e(M_1, Q)] . \quad (4)$$

2. Meghatároztam lineáris és kvadratikus approximáció esetén a $\mathfrak{D}_{Ik}\mathbf{u}_k = 0$ duál alapegyenletet kielégítő egymástól lineárisan független ${}^i\mathbf{u}_k$ alakfüggvényeket és a belőlük számított ${}^i\mathbf{t}_{\lambda\rho}$ tenzorokat. Ezek (3) egyenletbe történő helyettesítésével és az integrálás elvégzésével zárt alakban előállítottam a vonatkozó potenciálfüggvényeket.

a. Lineáris approximáció esetén

$$\begin{aligned} [{}^1\mathbf{u}_k]^T &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} , & [{}^2\mathbf{u}_k]^T &= \begin{bmatrix} \eta_1 & -\eta_2 & 0 \end{bmatrix} , \\ [{}^3\mathbf{u}_k]^T &= \begin{bmatrix} \eta_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} , & [{}^4\mathbf{u}_k]^T &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} , \\ [{}^5\mathbf{u}_k]^T &= \begin{bmatrix} 0 & \eta_1 & 0 \end{bmatrix} , & [{}^6\mathbf{u}_k]^T &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5)$$

a lineáris alakfüggvények alakja. A vonatkozó ${}^i\phi_\kappa$ ($i = 1, \dots, 6$; $\kappa = 1, 2$) potenciálfüggvényeket pedig a

$$\begin{aligned} {}^1\phi_1 &= \frac{1}{2\pi} \arctan \frac{\eta_2}{\eta_1} + \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \frac{\eta_1\eta_2}{\eta_1^2 + \eta_2^2}, \\ &\dots \\ {}^6\phi_1 &= \frac{\mu\eta_2}{4\pi(1-\nu)} \left(2 \ln \sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2} + 3 \right), \\ {}^1\phi_2 &= \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[(1-2\nu) \ln \sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2} + \frac{\eta_2^2}{\eta_1^2 + \eta_2^2} \right], \\ &\dots \\ {}^6\phi_2 &= -\frac{\mu\eta_1}{4\pi(1-\nu)} \left(2 \ln \sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2} + 3 \right) \end{aligned}$$

képletek szolgáltatják³.

- b. Megmutattam, hogy kvadratikus approximáció esetén az első hat alakfüggvény, következésképpen a hozzájuk tartozó potenciálfüggvények megegyeznek a lineáris approximáció alakfüggvényeivel és potenciálfüggvényeivel. Meghatároztam a fennmaradó

$$\begin{aligned} [{}^7\mathbf{u}_k]^T &= \begin{bmatrix} -2\eta_1\eta_2 & \eta_2^2 & k\eta_2 \end{bmatrix}, & [{}^8\mathbf{u}_k]^T &= \begin{bmatrix} \eta_1^2 & -2\eta_1\eta_2 & k\eta_1 \end{bmatrix}, \\ [{}^9\mathbf{u}_k]^T &= \begin{bmatrix} \eta_2^2 & 0 & k\eta_1 \end{bmatrix}, & [{}^{10}\mathbf{u}_k]^T &= \begin{bmatrix} 0 & \eta_1^2 & k\eta_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

kvadratikus alakfüggvényeket, illetve a vonatkozó

$$\begin{aligned} {}^7\phi_1 &= \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \left\{ [-(1-\nu)\eta_1^2 - (\nu-2)\eta_2^2] \ln(\eta_1^2 + \eta_2^2) + \right. \\ &\quad \left. + (7-2\nu)\eta_2^2 + (\nu-2)\eta_1^2 + \frac{6\eta_1^4}{\eta_1^2 + \eta_2^2} \right\}, \\ &\dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^{10}\phi_1 &= \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \left\{ \eta_1^2 [(\nu-1) + \nu \ln(\eta_1^2 + \eta_2^2)] + \right. \\ &\quad \left. + \eta_2^2 (1-\nu) [4 + \ln(\eta_1^2 + \eta_2^2)] - \frac{2\eta_1^4}{\eta_1^2 + \eta_2^2} \right\}, \end{aligned}$$

$${}^7\phi_2 = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left\{ \eta_1\eta_2 [5\nu - 3 + \nu \ln(\eta_1^2 + \eta_2^2)] + \frac{3\eta_1^3\eta_2}{\eta_1^2 + \eta_2^2} \right\},$$

...

$${}^{10}\phi_2 = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left\{ [3\nu - 4 - (1-\nu) \ln(\eta_1^2 + \eta_2^2)] \eta_1\eta_2 + \frac{\eta_1\eta_2^3}{\eta_1^2 + \eta_2^2} \right\}$$

potenciálfüggvényeket³.

³Az összes potenciálfüggvény az értekezés A. Függelékében található meg.

3. Meghatároztam a fizikai és a matematikai állandók kapcsolatát adó kölcsönösen egyértelmű

$$\mathbf{T}^e \mathbf{a}^e = \mathbf{p}^e \quad (6)$$

összefüggést.

- a. Lineáris approximáció esetén

$$\underbrace{\mathbf{T}^e}_{(6 \times 6)} = \begin{bmatrix} 1 & x_1(M_1) & x_2(M_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x_2(M_1) & 0 & 1 & x_1(M_1) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\mu} n_1(K) & \frac{1-\nu}{2\mu} n_2(K) & 0 & \frac{\nu}{2\mu} n_2(K) & -n_1(K) \\ 0 & -\frac{1}{2\mu} n_2(K) & \frac{\nu}{2\mu} n_1(K) & 0 & \frac{1-\nu}{2\mu} n_1(K) & -n_2(K) \\ 1 & x_1(M_2) & x_2(M_2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x_2(M_2) & 0 & 1 & x_1(M_2) & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

a (6) képletben álló mátrix, míg

$$\underbrace{(\mathbf{a}^e)^T}_{(1 \times 6)} = [a_1^e \quad a_2^e \quad a_3^e \quad a_4^e \quad a_5^e \quad a_6^e] \quad (8)$$

a matematikai állandók

$$\underbrace{(\mathbf{p}^e)^T}_{(1 \times 6)} = [\mathcal{F}_1^e(M_1) \mid \mathcal{F}_2^e(M_1) \mid \mathfrak{t}_1^e(K) \mid \mathfrak{t}_2^e(K) \mid \mathcal{F}_1^e(M_2) \mid \mathcal{F}_2^e(M_2)] \quad (9)$$

pedig a fizikai mennyiségek mátrixa.

- b. Kvadratikus esetben (10×10) -es a $\mathbf{T}^e$ mátrix⁴, a matematikai és a fizikai mennyiségek mátrixai pedig

$$\underbrace{(\mathbf{a}^e)^T}_{(1 \times 10)} = [a_1^e \quad a_2^e \quad a_3^e \quad a_4^e \quad a_5^e \quad a_6^e \quad a_7^e \quad a_8^e \quad a_9^e \quad a_{10}^e] \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & \underbrace{(\mathbf{p}^e)^T}_{(1 \times 10)} = \\ & = \left[\mathcal{F}_1^e(M_1) \mid \mathcal{F}_2^e(M_1) \mid \mathfrak{t}_1^e(K_1) \mid \mathfrak{t}_2^e(K_1) \mid \mathcal{F}_1^e(M_2) \mid \mathcal{F}_2^e(M_2) \mid \mathfrak{t}_1^e(K_2) \mid \mathfrak{t}_2^e(K_2) \mid \mathcal{F}_1^e(M_3) \mid \mathcal{F}_2^e(M_3) \right] \end{aligned} \quad (11)$$

alakúak.

4. Megmutattam, hogyan lehet kezelni a vonatkozó integrálegyenlet regularizációja révén a szinguláris viselkedés okozta nehézségeket és azt is, hogy hogyan kell a ${}^1\phi_1$ és ${}^4\phi_2$ potenciálfüggvények szakadásait figyelembevenni a numerikus megoldást adó egyenletrendszer felépítésekor.

⁴A $\mathbf{T}^e$ mátrix mérete miatt, részletesen kiírva csak az értekezés B. Függelékében lelhető fel.

5. A megoldást adó lineáris egyenletrendszer lineáris és kvadratikus approximáció esetén is:

$$\sum_{e=1}^{n_{be}} \underbrace{\Phi^{je} \mathbf{B}^j (\mathbf{T}^{-1})^e}_{\mathbf{N}^{je}} \mathbf{p}^e = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{belső tartomány} \\ \hat{\mathbf{u}}(\infty) & \text{külső tartomány} \end{cases} \quad (12)$$

A $\mathbf{p}^e$ megoldás a feszültségfüggvények elemhatáron való folytonosságának figyelembevételével adódik. Φ^{je} , $\mathbf{B}^j$, $(\mathbf{T}^{-1})^e$ és $\mathbf{p}^e$ mátrixok mérete az approximáció jellegétől (lineáris, kvadratikus) függ. A j egyenletszámláló a peremen felvett kollokációs pontokat azonosítja. Lineáris esetben $j = 1, \dots, n_{be}$ kvadratikus approximáció esetén pedig $j = 1, \dots, 2n_{be}$.

6. Megadtam a feszültségek számításának képleteit lineáris és kvadratikus approximáció esetén is mind a tartomány belső pontjaira mind pedig az aktuális peremelem pontjaira vonatkozóan.

4. PUBLIKÁCIÓK AZ ÉRTEKEZÉS TÉMÁJÁBAN

Idegennyelvű könyvrészlet:

- **G. Szeidl, S. Szirbik**, *Boundary contour method for plane problems in dual formulation with quadratic shape functions*, Chapter 14 in *Selected Topics in Boundary integral formulations for solids and fluids* by V. Kompis, Springer Wien-NewYork, 209–232, 2002.

Idegennyelvű folyóiratban megjelent szakcikk:

- **S. Szirbik**, *Boundary contour method for plane problems in a dual formulation with linear elements*, *Journal of Computational and Applied Mechanics*, **1**(2), 205–222, 2000.

Teljes terjedelemben megjelent idegennyelvű konferencia előadás:

- **S. Szirbik**, *A Possibility for formulation of the boundary contour method for plane problems in dual system*, microCAD-SYSTEM'99 International Computer Science Conference, ME, Miskolc, 163–168, February 24–25, 1999.
- **S. Szirbik**, *Boundary contour method for plane problems with linear elements in dual system*, microCAD-SYSTEM 2000 International Computer Science Conference, ME, Miskolc, 157–162, February 23–24, 2000.
- **S. Szirbik**, *Boundary contour method with quadratic shape functions for plane problems in a dual system*, microCAD-SYSTEM 2001 International Computer Science Conference, ME, Miskolc, 121–126, March 1–2, 2001.

Idegennyelvű konferencia előadás absztrakt:

- **S. Szirbik, G. Szeidl**, *Boundary contour method for plane problems in dual system*, VIII-th International Conference on Numerical Methods in Continuum Mechanics, Lyptovsky Jan, Slovak Republic, Abstracts 18–19, September 19–24, 2000.
- **S. Szirbik, G. Szeidl**, *Boundary contour method with quadratic shape functions for plane problems in dual system*, 2nd European Conference on Computational Mechanics, Cracow, Poland, Abstracts 196–197, June 26–29, 2001.

- **S. Szirbik**, *Application of boundary contour method to solving plane problems in a dual formulation*, An Euro Conference on Numerical Methods and Computational Mechanics, Miskolc, Hungary, Abstracts 260–261, July 15-19, 2002.

Magyar nyelvű konferencia előadás absztrakt:

- **S. Szirbik**, *Peremgörbe módszer lineáris approximációval a síkrugalmasságtan duál feladataiban*, The VIII-th Hungarian Conference on Mechanics, Miskolci Egyetem, Miskolc, 136. o. 1999. augusztus 30.-szeptember 1.

5. AZ EREDMÉNYEK ALKALMAZHATÓSÁGA

Az értekezés eredményei alapján kifejlesztett számítógépi program alkalmas a síkrugalmasságtan numerikus feladatainak megoldására egyszeresen összefüggő tartományok esetén. A számítási eredmények bizonyítják, hogy a módszer alapján kifejlesztett kóddal a számítások numerikus pontossága lényegesen javítható már alacsony elemszám esetén is.

6. TOVÁBBI KUTATÁSI FELADATOK

A módszer szélesebb körű alkalmazásához további feladatok vizsgálata szükséges. Így például nem tartalmazza az értekezés a választ arra a kérdésre, hogy hogyan vehető pontosabban figyelembe a peremen működő koncentrált erő. A több egymástól független szakaszon előírt feszültségi peremfeltételek biztosítása pedig további, azaz az egyenértékűséggel kapcsolatos egyenletek figyelembevételét és ezek algoritmusba történő beépítését igényli.

A közeljövőben tervezzük a módszer ortotróp testek esetére történő kiterjesztését. Ebben az esetben a nehézség az alapmegoldás előállításában rejlik.

Távlati kutatási célként fogalmazzuk meg a módszer kiterjesztését többszörösen összefüggő belső és külső tartományokra.

HIVATKOZÁSOK

- [1] T. A. Cruse and F. J. Rizzo. *Boundary-integral equation method: Computational application in applied mechanics*, volume 11. A. S. M. E., New York, 1975.
- [2] C. A. Brebbia. *The boundary elements method for engineers*. Pentech Press, London, 1978.
- [3] C. A. Brebbia and J. Dominguez. Boundary element methods versus finite elements. In *Proc. Int. Conference on Applied Numerical Modelling*. Pentech Press, London, 1978.
- [4] C. A. Brebbia and J. Dominguez. Boundary element methods for potential problems. *Applied Mathematical Modelling*, 1:1–7, 1977.
- [5] E. Tonti. Variational Principles in Elastostatics. *Meccanica*, 14:201–208, 1967.
- [6] E. Tonti. A mathematical model for physical theories I. II. *Rendiconti Accademia Nazionale dei Lincei*, pages 175–181; 351–356, 1972.
- [7] E. Bertóti. Indeterminacy of first order stress functions and the stress and rotation based formulation of linear elasticity. *Computational Mechanics*, 14:249–265, 1994.
- [8] E. Bertóti. Stress and rotation-based hierarchic models for laminated composites. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39:2647–2671, 1996.
- [9] G. Szeidl. *Dual Problems of Continuum Mechanics (Derivation of Defining Equations, Single Valuedness of Mixed Boundary Value Problems, Boundary Element Method for Plane problems)*. Habilitation Booklets of the Miskolc University, Faculty of Mechanical Engineering, University of Miskolc, Department of Mechanics, November 26, 1997. 52-63, (In Hungarian).
- [10] G. Szeidl and S. Szirbik. *Selected Topics in Boundary Integral Formulations for Solids and Fluids: Boundary Contour Method for Plane Problems in a Dual Formulation with Quadratic Shape Functions*, chapter 14. SpringerWienNewYork, 2002.

- [11] S. Szirbik. Boundary contour method for plane problems in a dual formulation with linear elements. *Journal of Computational and Applied Mechanics*, 1(2):205–222, 2000.
- [12] E. D. Lutz. *Numerical Methods for Hypersingular and Near Singular Boundary Integrals in Fracture Mechanics*. Ph.D Thesis, Cornell University, Ithaca, NewYork, Department of Computer Science, 1991.
- [13] A. Nagarjan, E. D. Lutz, and S. Mukherjee. A novel boundary element method for linear elasticity with no numerical integration for two dimensional and line integrals for three-dimensional problems. *Journal of Applied Mechanics*, 264(61):264–269, 1994.
- [14] A. Nagarjan, S. Mukherjee, and E. D. Lutz. The boundary contour method for three-dimensional linear elasticity. *Journal of Applied Mechanics*, 63:278–286, 1996.
- [15] A. V. Phan, S. Mukherjee, and J. R. R. Mayer. The boundary contour method for two-dimensional linear elasticity with quadratic boundary elements. *Computational Mechanics*, 20:310–319, 1997.