Miskolci Egyetem

GÉPÉSZMÉRNÖKI KAR

Csatolt termo-mechanikai kopási folyamatok vizsgálata *hp*-verziós végeselem módszerrel

Ph.D. értekezés tézisei

Készítette:
Pere Balázs
okleveles középiskolai fizika tanár

Sályi István Gépészeti Tudományok Doktori Iskola,
Gépészeti Alaptudományok Tématerület,
Szilárd Testek Mechanikája Témacsoport

Doktori iskola vezető:
Dr. Páczelt István
az MTA rendes tagja

Témacsoport vezető:
Dr. Kozák Imre
az MTA rendes tagja

Témavezető:
Dr. Páczelt István
az MTA rendes tagja

Miskolc, 2005

Miskolci Egyetem

GÉPÉSZMÉRNÖKI KAR

Csatolt termo-mechanikai kopási folyamatok vizsgálata *hp*-verziós végeselem módszerrel

Ph.D. értekezés tézisei

Készítette:
Pere Balázs
okleveles középiskolai fizika tanár

Sályi István Gépészeti Tudományok Doktori Iskola,
Gépészeti Alaptudományok Tématerület,
Szilárd Testek Mechanikája Témacsoport

Doktori iskola vezető:
Dr. Páczelt István
az MTA rendes tagja

Témacsoport vezető:
Dr. Kozák Imre
az MTA rendes tagja

Témavezető:
Dr. Páczelt István
az MTA rendes tagja

Miskolc, 2005

Bíráló bizottság

Elnök:

Dr. habil Galántai Aurél, CSc	ME, egyetemi tanár

Titkár:

Dr. Szabó Ferenc, CSc	ME, egyetemi docens

Tagok:

Dr. habil Jármai Károly, DSc	ME, egyetemi tanár
Dr. Simon Vilmos, DSc	BME, egyetemi tanár
Dr. Vörös Gábor, CSc	BME, egyetemi docens

Hivatalos bírálók:

Dr. habil Váradi Károly, DSc	BME, egyetemi tanár
Dr. Kovács Béla, CSc	ME, egyetemi docens

1. Tudományos előzmények

Az érintkezési feladatokat két nagy csoportba sorolhatjuk. Az egyik csoportot a egyoldalú érintkezési feladat alkotja. Ennél a feladattípusnál az érintkező felületeken fellépő normál feszültség csak a test belseje felé mutathat. Ha a feszültség nullára csökken, a felületek elválhatnak egymástól. Az érintkezési feladatok másik csoportját a kétoldalú érintkezési feladatok alkotják. Az ideális kétoldalú érintkezési feladatoknál nincsen semmi korlátozás a feszültség nagyságára és irányára. Nem ideális érintkezési feladat valósul meg például ragasztott felületeknél. Amíg a redukált feszültség értéke nem haladja meg a ragasztás által biztosított maximális ,,adhéziós feszültséget", a kapcsolat kétoldalú marad.

Az egyoldalú érintkezési feladatok között megkülönböztetünk súrlódás nélküli érintkezési feladatot és súrlódásos érintkezési feladatot

Az első érintkezési feladatot Hertz oldotta meg 1882-ben [1]. A Hertz feltételezte, hogy az érintkezési tartomány mérete jóval kisebb mint az érintkező testek méretei. A érintkezési feladattal kapcsolatos újabb kutatások a XX. század 30-as éveiben kezdődtek el. Az érintkezéssel kapcsolatos variációs elvet Signorini 1959-ben publikálta [2]. Feltételezte, hogy terhelés hatására az érintkező felületek el is válhatnak egymástól. Ezt az elméletet Fichera fejlesztette tovább [3], aki a rugalmas, súrlódás nélküli érintkezési feladat megoldásának létezését és egyértelműségét is bizonyította.

Végeselem módszert a 70-es években alkalmaztak először érintkezési feladatok megoldására [4]. Ezek az úgynevezett h-verziós végeselem módszeren alapuló számítások voltak. A h-verziós végeselem módszerben a közelítő függvények többnyire lineárisak, esetleg másodfokúak. A közelítő függvények együtthatóit a közelítendő mező csomóponti értékei adják. A módszer annál pontosabb, minél több az ismeretlenek száma, azaz összességében minél több az elemek száma. Hosszú ideig csak h-verziós módszereket használtak az érintkezési feladatok megoldására. Először kis alakváltozásokkal járó érintkezési feladatokat oldottak meg. Kis alakváltozások esetén a végeselem hálók csomópontjai az érintkezési felületen elhanyagolhatóan kis mértékben mozdulnak el egymáshoz képest, ezért célszerű a hálót úgy kialakítani, hogy a csomópontok fedésbe kerüljenek egymással. Így a csomópontok egymáshoz képesti helyzete alapján vizsgálhatók az érintkezési feltételek [5]. Előfordulhat, hogy valamilyen okból a végeselem hálón az érintkezési felületen lévő csomópontok nem kerülnek fedésbe egymással. Ebben az esetben a csomópontok szemközti oldalra történő merőleges vetítésével úgynevezett kontakt szegmenseket hozhatunk létre. A kontakt szegmensek segítségével közelíthetjük pl. az elmozdulásmezőt, amelyet itt lokális koordinátákkal adhatunk meg. A fenti módszert Simo dolgozta ki [6]. Nagy alakváltozások esetén a felületek tangenciális irányú relatív elmozdulásai nem elhanyagolhatóak, így az érintkező felületeken a csomópontok és velük szemben lévő élek sorrendje megváltozhat. Erre az esetre dolgozták ki az úgynevezett ,,csomópont-oldal közötti" eljárást [7], amelyet azóta is széles körben alkalmaznak.

Az értekezésben mi csak kis alakváltozásokat fogunk vizsgálni, a végeselem hálót pedig úgy osztjuk fel, hogy az érintkezési felületeken a csomópontok fedésbe kerüljenek egymással.

Az érintkezési feltételek vizsgálatára több módszer létezik. A különböző módszerek többnyire abban különböznek egymástól, hogy hogyan közelítik az érintkező felületeken a nyomáseloszlást. Mindegyik módszer arra az alapgondolatra épül, hogy az érintkező felületek minden pontjában az érintkezési nyomás és az érintkező felületek távolságának szorzata nullával egyenlő. A teljesség igénye nélkül röviden összefoglaljuk a legfontosabb módszereket.

- A Lagrange multiplikátoros módszerben a Lagrange multiplikátor szerepét a nyomás tölti be [8, 9]. A nyomás értékét az elmozdulásmezőhöz hasonlóan alakfüggvényekkel közelítjük. A végső egyenletrendszerben az elmozdulásmező csomóponti értékei mellett megjelennek a csomóponti nyomásértékek is ismeretlenként.

- A büntetőparaméteres módszerben az érintkező felületek közé nagy merevségű rugókat helyezünk, ezzel akadályozzuk a testek egymásba hatolását [8, 9]. Teljesen megakadályozni nem tudjuk, hogy a testek egymásba hatoljanak. A számítást egy iterációs ciklus eredményeként kapjuk, a cikluson belül az aktuális érintkezési felületnek megfelelően el kell venni rugókat, vagy éppenséggel újakat kell hozzáadni a rendszerhez. Az általunk megoldandó feladat szempontjából fontos, hogy a felületre nemcsak diszkrét rugókat helyezhetünk, hanem folytonos eloszlású rugalmas közeget is. A büntetőparaméteres eljárás képezi az alapját a következő módszernek is.

- A kombinált módszerben [8, 9] (augmented Lagrangian) első lépésként megoldjuk az érintkezési feladatot büntetőparaméteres módszerrel. Második lépésben egy újabb iteráció keretén belül a nyomás-eloszlás értékét pontosítjuk. Ezzel a módszerrel nagy mértékben javíthatjuk a büntetőparaméteres eljárásban kapott nyomás-eloszlás értékét. A kombinált és büntetőparaméteres módszerrel később részletesen is foglalkozunk.

Az érintkezési feladatok p-verziós végeselem módszerrel történő megoldása csak pár éves múltra tekint vissza. A p-verziós végeselem módszerben az ismeretlen mezőket magasabb fokú polinomokkal közelítjük. A közelítő polinomok alkalmas megválasztásával elérhetjük, hogy a megoldandó egyenletrendszer jól kondicionált legyen, így kisebb numerikus hibát követünk el. A pontosság növelése érdelében az elemméret változatlanul hagyása mellett a közelítő polinomok fokszámát növeljük. A p-verziós végeselem módszer egyik előnye az, hogy ugyanakkora szabadsági fogszám mellett az energianormában vett hiba jóval kisebb mint a h-verzió esetén, és a hiba a polinom fokszám növelésével exponenciálisan csökken [10].

A p-verziós végeselem módszer érintkezési feladatokra történő alkalmazása azonban problémákat vet fel. A h-verzióban nagy pontosság eléréséhez kis méretű elemeket használunk, amelyek a csomópontok egymáshoz képesti közelsége miatt ideálisak az érintkezési tartomány szélének megkereséséhez. Az érintkezési tartomány szélének megállapítása során elkövetett hiba csökken az elemméret csökkentésével. A p-verzióban az elemméret csökkentése a túlságosan nagyra növő szabadsági fokszám miatt nem eléggé hatékony, ezért új módszereket kellett kidolgozni az érintkezési feladat megoldására.

Gabbert cikke [11] 1994-ben jelent meg, amelyben speciális pNh-elemeket javasolt a probléma feloldására. A vizsgált tartomány belsejében p-verziós elemeket használ, az érintkezési felületen lévő elemek érintkezési felület felőli oldalán azonban szakaszonként lineáris függvényeket alkalmaz. Ezzel eléri, hogy az érintkezési felületen az elemek méretéhez képest sűrűn helyezkednek el a csomópontok. Ez a módszer azonban az érintkezési feladat szempontjából h-verziósnak tekinthető, továbbá ezen elemeken belül a speciális, szakaszonként lineáris közelítő függvény miatt a deriváltakban szakadás lép fel.

Ha az érintkezési tartományon is p-verziós elemeket használunk, újabb problémával kell szembenéznünk. A kontaktnyomás azon a felületrészen, ahol a testek nem érnek össze, azonosan nulla lesz. Ahol a testek összeérnek, ott a kontakt-nyomás nullától különböző. Az érintkezési tartomány határán a kontakt nyomásnak töréspontja van. A kontakt nyomás elvileg megegyezik az érintkezési felületen ébredő normál-feszültséggel, amely a Hooke-törvény alapján az elmozdulásmező deriváltjaiból számítható. Ennek az a következménye, hogy az elmozdulásmező, ami tulajdonképpen a feladat megoldása, az érintkezési tartomány határán nem lesz analitikus, ugyanis az érintkezési tartomány határán nem lehet Taylor-sorba fejteni. Szabó és Babuška osztályozása alapján [10] az érintkezési feladatok a C kategóriába tartoznak. A C kategória azt jelenti, hogy a megoldás véges számú pont kivételével a teljes tartományon analitikus, viszont a végeselem hálót nem lehet úgy megszerkeszteni, hogy a csomópontok a nem analitikus pontokra essenek. Ennek oka az, hogy nem tudjuk előre, hol lesz az érintkezési tartomány határa. Ezt a problémát iterációs lépésekkel oldhatjuk meg. Először tetszőleges hálóval oldjuk meg a feladatot. Az így kapott megoldás nyilván pontatlan lesz amiatt, hogy egy nem analitikus függvényt analitikus függvénnyel közelítünk. Viszont kapni fogunk egy viszonylag jó becslést az érintkezési tartomány határára. Az iteráció következő lépését többféleképpen oldották meg. Volpert [12] azt javasolta, hogy speciális, szinguláris függvényeket tartalmazó alakfüggvényeket használjunk. A szinguláris pont elhelyezkedését a végeselemen belül egy paraméter segítségével adhatjuk meg. Az iteráció során ezt a paramétert kell mindig módosítani a kívánt pontosság eléréséig. Nincs szükség a végeselem háló megváltoztatására, azonban a numerikus integrálás a speciális alakfüggvények miatt komplikálttá válik. Egy másik lehetséges módszer a Páczelt [13] által javasolt csomópont pozicionálás. Ebben a módszerben a nem analitikus ponthoz a végeselem hálón csomópontot helyezünk. Kezdetben nem tudjuk hol van ez a pont. Az első iterációs lépésben meg lehet becsülni bizonyos pontossággal a helyét, és a végeselem hálót úgy kell módosítani, hogy a nem analitikus ponthoz legközelebb eső (felületi) csomópontot a nem analitikus ponthoz toljuk. Ennek hatására a következő iterációs lépésben csökken a számítás során elkövetett hiba, azonban az elmozdított csomópont két oldalán lévő elemek eltorzulnak. Ez nem szerencsés, mert a pontosság romlásához vezet. A cikkben egy Gauss integrálási pontok vizsgálatán alapuló durva pozicionálást, és egy hibaindikátorokkal végzett finom csomópont pozicionálást alkalmaznak.

Az eddig tárgyalt módszerek mind azon a feltételezésen alapultak, hogy az érintkező felületek felületi érdességét elhanyagolhatjuk. Erre a végeselemes tárgyalás miatt van szükség. A felületen lévő egyenetlenségek, barázdák leírásához nagyon sok és nagyon kicsi végeselemre lenne szükség, ami rendkívüli módon megnövelné a feladat szabadsági fokainak számát. A felületi érdesség miatt a testek nem a teljes felületükön érintkeznek egymással, hanem annak körülbelül a harmad vagy negyed részén [14, 15]. Emiatt a felület érdességi csúcsaira az átlagosnál jóval nagyobb terhelés jut. A nagyobb terhelés miatt a felületi rétegben ébredő feszültség túlléptheti a rugalmassági határt. Az ekkor lejátszódó folyamatok (képlékeny alakváltozás, repedések) már csak nemlineáris elmélettel írhatók le.

Az értekezésben megvizsgáljuk az érintkező felületek kopását is. A kopás jelenségét akkor figyelhetjük meg, amikor két test elcsúszik egymáson. A kopás viszonylag lassú folyamat. Különböző autó- és gépalkatrészeknél, amelyeknél az érintkező felületek egymáshoz képest elmozdulnak, megfigyelhető a kopás jelensége. A kopási folyamat gyorsaságát több tényező befolyásolhatja. Az elsőként legjobban szembetűnő az, hogy ha a felületeket kenjük olajjal vagy zsírral, vagy esetleg egyéb anyagokkal, a kopás mértéke jelentősen lecsökken. A kenés kopásra gyakorolt hatásával egy másik tudományterület, a tribológia foglalkozik. Ebben a disszertációban mi csak „száraz” felületek egymáson történő elcsúszását fogjuk vizsgálni.

A következő szempont, ami a kopás mértékét befolyásolhatja, az az érintkező felületek anyagminősége és geometriája. Az egymással érintkező alkatrészeket általában valamilyen szerszámgéppel munkálják meg, hogy az érintkező felületek minél jobban illeszkedjenek egymáshoz. A megmunkálás során azonban a megmunkáló szerszám, alakjától és a szerszámgép rezgéseiből adódóan a felületbe apró egyenetlenségek kerülnek.

Négy fő kopási folyamatot különböztetünk meg, az adhezív, abrazív, korrozív és kifáradásos kopást. Mikor két felület elcsúszik egymáson, a nagy nyomás miatt a felületből kiálló csúcsok összehegedhetnek. További relatív elmozdulás hatására az összehegedt felületek vagy elválnak az összehegedés helyén, vagy az egyik csúcs egyszerűen letörik. Ennek hatására nem keletkeznek szabad részecskék a két felület között, csak anyag vándorol át az egyik felületről a másikra. Viszont mikor egy csúcs letörik a felületről, felületén kémiai elváltozások lépnek fel (pl. oxidáció). Ha a további relatív elmozdulás hatására újra hozzátapad a másik felülethez, a kémiai változás miatt a tapadás gyengébb lesz. Többszöri oda-vissza vándorlás után a felülethez tapadás annyira meggyengülhet, hogy a részecske leválik a felületről, így egy szabad részecske keletkezik. Ezt a folyamatot adhezív kopásnak nevezzük.

Közel egyforma nagyságú felületből kiálló csúcsokat feltételezve Archard [17] egy matematikai modellt állított fel az adhezív kopásra. Feltételezése szerint a kopás arányos a relatív elmozdulással és a testek közötti nyomással, és fordítva arányos a felület helyi keménységével. Az arányossági tényezőt kopási tényezőnek nevezzük, értékét különböző anyagokra kísérletekből határozhatjuk meg. A kopási tényező értéke 0 és 1 közé esik, nagysága függ a két felület közötti hézagot kitöltő anyagtól és a hőmérséklettől. Archard kopási törvénye a következő alakban írható:

$$\dot{w}_{adh} = \tilde{k}_{adh} \frac{v p_n}{H} \tag{1}$$

ahol $\tilde{k}_{adh}$ a adhezív kopási tényező, $v = |\dot{u}_t^2 - \dot{u}_t^1|$ a felületek egy érintkező pontpárjának relatív sebessége, p_n az érintkezési nyomás a vizsgált pontban, H a felület lokális keménysége, $\dot{w}_{adh}$ pedig a vizsgált pontban egységnyi idő alatt egységnyi felületen lekopott anyag térfogata.

Kísérletekkel bizonyították, hogy Archard kopási törvénye kis érintkezési nyomások esetén érvényes, nagy nyomások esetén azonban alulbecsüli a kopást [19]. Ezt javítani tudjuk, ha a kopási törvényt a következő képpen módosítjuk:

$$\dot{w} = k_w v^a p_n^b \tag{2}$$

ahol k_w a kopási tényező, amely magában foglalja a H keménységet és a kopási módok hatásait. Az a, b állandók és a k_w kopási tényező értékeit kísérletekből határozhatjuk meg. Az a, b és k_w értékének meghatározására irányuló kísérleteket elvégezhetjük az [18] cikkben közölt leírás alapján is.

A jelen értekezésben a számítások elvégzése során feltételezni fogjuk, hogy a lekopott anyag azonnal eltűnik a két érintkező felület közül. A valóságban azonban a kopás során levált részecskék még egy ideig a felületek között maradnak. Zmitrowicz monográfiájában megvizsgálta a levált részecskék mozgását, hatását a további kopásra [20].

Az érintkezési feladat megoldása egy pillanatnyi állapotot jellemzett, a kopás számítása pedig egy hosszabb időbeli folyamatot. Eddig nagyvonalúan nem beszéltünk a keletkezett hőről. Pedig ahol súrlódás van, ott hő is keletkezik. Strömberg [22] azt is kimutatta, hogy a kopás hatására is keletkezik hő az érintkező felületeken. A keletkezett hő miatt a vizsgált testek melegedni kezdenek. Ez a hőmérséklet változás a hőtágulás miatt akár jelentősen befolyásolhatja az érintkezési feladat megoldását, és ezen keresztül az egész kopási folyamatot.

A hővezetés egyenletének felírását és annak végeselemes diszkretizálását a szakirodalomból ismert módon végezzük el [23, 24]. A nehézség abból ered, hogy a végeselem háló módosítása után (amit az érintkezési feltételek kielégítésének nagy pontosságú igénye követel meg) az új hálón a régi hálón kiszámolt, de az új hálóra még át nem helyezett hőmérséklet mezővel kell számolnunk. A probléma megoldására számos módszer áll rendelkezésre a szakirodalomban, (főként képlékeny alakváltozások számításánál fordul elő hasonló probléma) viszont ezek megoldása h-verziós végeselem módszeren alapszik. A végeselem módszerben a magasabb fokú approximációnak két megközelítése létezik. Az elsőben Lagrange polinomokkal írják le a közelítendő mezőt. A Lagrange polinomok úgy vannak megkonstruálva, hogy a háló egyes csomópontjaiban az értékük 0, kivéve egyet, ahol értékük 1. Minden csomóponthoz tartozik egy olyan polinom, amelynek értéke a kérdéses csomópontban 1. Így a polinomokhoz tartozó paraméterek mind a csomóponti értékeket adják meg. Lagrange polinomokat használva a hőmérséklet mezőt könnyen átképezhetjük az új végeselem hálóra. Meg kell határoznunk az új csomópontok helyén a régi hálóval számított hőmérséklet értékeket. Ezek lesznek az új háló paraméterei, vagy csomóponti értékei. Erre láthatunk példát az [26, 27, 28, 29]-ben.

A másik megközelítésben, amelyet mi is használunk, a közelítő polinomokat Legendre polinomokból konstruáljuk meg. Fontos kiemelni, hogy ezeknél a polinomoknál a paraméterek értékei nem egyeznek meg a közelített mező fizikai értékeivel. Mi négy csomópontú végeselemeket használunk, de a közelítés fokszámától függően négynél akár jóval több paraméter is tartozhat egy végeselemhez. A paramétereket három csoportba sorolhatjuk, úgy mint csomóponti paraméterek, oldalfüggvényekhez tartozó paraméterek és belső függvényekhez tartozó paraméterek. Az első megközelítésben használt módszer itt nem működik. Megoldást jelenthet a legkisebb négyzetek módszerének alkalmazása, amelyben lineáris algebrai egyenletrendszer megoldására vezetjük vissza a feladatot. Ezt a módszert sikeresen alkalmazták h-verziós végeselem módszerrel megoldott problémák esetén, ahol biztosítani kellett a lokális vagy globális egyensúly fenntartását [30], vagy olyan esetekben, ahol kisebb méretű végeselemekről kellett átképezni egy mezőt durvább felosztású hálóra [31]. Az említett cikkekben leírtakhoz hasonlóan oldjuk meg a problémát p-verzió esetére is (lásd [25]).

Az érintkezési, kopási és hővezetési feladatoknál fellépő problémák tisztázása után algoritmust dolgoztunk ki a csatolt termo-mechanikai feladat megoldására (lásd 1. ábra). A számításhoz az irodalomból jól ismert, úgynevezett operátor hasítás módszerét használtuk fel [9]. Az értekezésben lévő számpéldához hasonló feladat megoldása található [32]-ben. Az értekezésben található összes számpélda saját fejlesztésű, C nyelven írt programmal nyert megoldást.

2. Célkitűzések

A fentiek alapján a következő célokat tűzzük ki:

- Az érintkezési feladat p-verziós végeselemes megfogalmazása a kombinált módszer (és benne a büntetőparaméteres módszer) segítségével.
- Új módszer keresése, amely segítségével az érintkezési tartomány határa tengelyszimmetrikus alakváltozás esetén nagy pontossággal meghatározható.
- A csomópont pozicionálásból eredő végeselem háló módosítás véghezvitele, ügyelve arra, hogy az érintkezési tartományon a test alakja nagy pontossággal legyen leírható.
- A kopási folyamat diszkretizálása a numerikus számítások elvégzéséhez. A kopásból származó végeselem háló módosítást úgy kell elvégezni, hogy az összhangban legyen az érintkezési feladattal.
- Algoritmust kell kidolgozni a kopás számítására. Az algoritmusnak tartalmaznia kell az érintkezési feladat megoldását is, ugyanis az ott kapott nyomáseloszlás szükséges a kopás számításához.
- A hővezetési feladat p-verizós végeselemes megfogalmazása.
- Eljárás kidolgozása, amely segítségével a hőmérséklet paraméterek átszámíthatók egyik végeselem hálóról a másikra.
- A csatolt termo-mechanikai feladat végeselemes megfogalmazása.
- Számítási algoritmus kidolgozása és számítógép program készítése, amellyel a csatolt kopási-termo-mechanikai érintkezési feladat numerikusan megoldható.

3. A feladat megoldásának módszere

Feltételeztük, hogy a vizsgált testek anyaga homogén és izotróp. A vizsgált mechanikai rendszer forgástestekből áll. A feladatot a kis alakváltozások elméletén belül tengelyszimmetrikus alakváltozási esetekre oldottuk meg. A

Időlépések (l)

Hővezetési iteráció (i)

Kopási iteráció (j)

Kontakt iteráció (k)

p_n nyomás, $\boldsymbol{u}$ elmozdulásmező,
C érintkezési tartomány kiszámítása

a végeselem háló módosítása

Ha $\dfrac{|\boldsymbol{r}_{CB}^{(k-1)} - \boldsymbol{r}_{CB}^{(k)}|}{|\boldsymbol{r}_{CB}^{(k-1)}|} \leq \tau_{CB}$ igaz, akkor kilépés az iterációból

$k := k + 1$

Adott: $w_{j-1}^{(t+\Delta t)}$ ha $j \neq 1$
vagy
$w_{j-1}^{(t+\Delta t)} = 0$ ha $j = 1$

${p_n}_j^{(t+\Delta t)}$ kiszámítása , $v_j = r\omega$

$w_j^{(t+\Delta t)}$ kiszámítása, kezdeti hézag módosítása $h_j^{(t+\Delta t)} = h + w_j^{(t+\Delta t)}$

Ha $\dfrac{\displaystyle\int_{(A_c)} w_{j-1}^{(t+\Delta t)} dA - \int_{(A_c)} w_j^{(t+\Delta t)} dA}{\displaystyle\int_{(A_c)} w_{j-1}^{(t+\Delta t)} dA} \leq \tau_w$ igaz, akkor $J := j$, és kilépés az iterációból

$j := j + 1$

$h^{(t+\Delta t)} = h + w_J^{(t+\Delta t)}$

A $T^{(t)}$ hőmérséklet mező átszámítása az új végeselem hálóra

A $T_{[s]}^{(t+\Delta t)}$ hőmérsékletet leíró paraméterek meghatározása ($s = 1, \ldots, n$)

Ha $\dfrac{||\mathbf{t}_{i-1}|| - ||\mathbf{t}_i||}{||\mathbf{t}_{i-1}||} \leq \tau_T$ igaz, akkor kilépés az iterációból

$i := i + 1$

új időlépés: $t^{l+1} = t^l + \Delta t, \quad l := l + 1$

1. ábra. A számítás algoritmusa, ahol p_n az érintkezési nyomás, $\boldsymbol{u}$ az elmozdulás mező, C a tényleges érintkezési tartomány, $\boldsymbol{r}_{CB}^{(i)}$ az i-edik iterációs ciklusban az érintkezési tartomány határához mutató helyvektor, $w_j^{(t+\Delta t)}$, v_j és ${p_n}_j^{(t+\Delta t)}$ a j-edik iterációs ciklusban a $t + \Delta t$ időpillanathoz tartozó kopás, relatív sebesség és érintkezési nyomás értéke, h a testek közötti kezdeti hézag, $h^{(t+\Delta t)}$ a testek közötti hézag a $t + \Delta t$ időlépésben, $T_{[s]}^{(t+\Delta t)}$ a $t + \Delta t$ időpillanathoz tartozó hőmérséklet mező paraméterek, $\mathbf{t}_i$ az i-edik iterációs lépésben a hőmérséklet paraméterek vektora, τ_{CB}, τ_w és τ_T pedig az egyes iterációs ciklusokból való kilépéshez megadott hibakorlátok.

megoldáshoz p-verziós végeselem módszert használtunk, az érintkezési feladat számításánál az úgynevezett kombinált módszer (augmented Lagrangian) került felhasználásra. A testek geometriája folytonos, magas fokszámú polinomokkal kerül leírásra. Feltételezett, hogy a kopás Archard kopási törvénye szerint megy végbe. A kapcsolt kopási-hőtani-mechanikai feladatnál anyagállandók hőmérséklettől való függésétől eltekintünk. A számításokat saját fejlesztésű számítógépes programmal végeztük. A kapcsolt feladat vizsgálatára a mechanika variációs módszerei, a végeselem-módszer modern irányai, a numerikus matematika eredményei nyertetek felhasználást.

4. Új tudományos eredmények

Az új tudományos eredményeket a következő pontokban foglaljuk össze:

1. Az érintkezési tartomány határának megkeresésére geometriai alapokon nyugvó új módszer került bevezetésre.

   A választott variációs elvből következő megoldási módszer miatt a testek kis mértékben egymásba hatolnak. Ennek következményeként a testek kontúrjai az érintkezési tartomány határán metszik egymást, azaz a határpontok megkeresése egymástól függetlenül felírt magasabb fokú algebrai egyenlet közelítő megoldására vezethető vissza.

2. Az érintkezési tartomány szélére elhelyezett a határpontot kettősen átölelő kisméretű elemekkel az elvileg nem analitikus megoldáshoz tartozó közelítő megoldás igen kismértékű feszültségi oszcillációt eredményez {6}.

   Az érintkezési tartomány határa az elmozdulásmező szempontjából egy nem analitikus pont. Az elmozdulás mezőt szakaszonként (elemenként) Legrende polinomokkal jellemzett analitikus függvényekkel közelítjük az elemek közötti C^0 osztályú folytonosságot megkövetelve. A tényleges érintkezési tartomány határára iterációval elhelyezett csomópontok biztosítják a deriváltak szakadását. Az iteráció során egyre közelebb kerülünk a tényleges határhoz a választott közelítés fokszámától függő mértékben. Az érintkezési tartomány szélére elhelyezett kisméretű elemek használatával az oszcilláció nagymértékben lecsökken.

3. A testek között kialakuló kopás miatt az érintkező felületek alakja változik. Ennek leírására szolgáló Legrende polinomokat felhasználó sorbafejtés együtthatóit a legkisebb négyzetek módszerével határozzuk meg biztosítva a ténylegesen kialakuló érintkezési tartomány széli kopás eltűnését és ezzel a kopási alakot leíró függvény oszcilláció mentességét. A kopás a végeselemes háló módosítását okozza.

A végeselem hálót a kopásnak megfelelően módosítani kell. A kopásértékek az érintkezés-elválás feltételének ellenőrzése céljából diszkrét pontokban, nevezetesen az érintkező elemek integrálási pontjaiban (Lobatto pontok) kerülnek kiszámításra. A testek geometriáját a Legendre polinomokat is felhasználó alakfüggvényeken keresztül írjuk le illetve közelítjük. A módosítást csak azon a peremszakaszon végezzük el, ahol a felületek ténylegesen összeérnek, azaz kopás történt.

4. Az időben nemlineárisan lejátszódó kopási folyamatot időlépésenként alkalmazott belső iterációval oldjuk meg a kopási különbségekre előírt korlát betartásával. Az időlépés maximális értéke numerikus kísérletek alapján nyer meghatározást {2}, {3}, {8}.

   A kopási folyamat nemlinearitása miatt egy időlépésen belül iterációkat alkalmazunk a kopás számítására. Az iteráción belül megoldjuk az érintkezési feladatot, majd a nyomáseloszlás ismeretében kiszámítjuk a kopást. A kopott felülettel újra megoldjuk az érintkezési feladatot, és újra kiszámítjuk a kopást az eredeti felületen. Ezt addig ismételjük, amíg két egy mást követő iterációs lépésben kapott kopás különbsége egy előre adott hibahatár alá nem csökken. Az időlépés nagyságát nem választhatjuk meg tetszőlegesen, túl nagy időlépések esetén oszcillációk léptek fel az érintkezési feladat megoldása során az elmozdulásmezőben.

5. A p-verziójú számításhoz rendelt, Legrende polinomokat felhasználó hőmérséklet mező közelítéséhez, a kopás miatt változó hálóhoz tartozóan egy eljárás került kifejlesztésre, a régi hálóról az új hálóra történő átszámítással járó megváltozott hőmérsékleti sorbafejtési paraméterek meghatározására a hibanégyzet minimum elve alapján. Az elv bármilyen skalár mező átszámítására alkalmazható a p-verziójú közelítés során {1}, {5}.

   A hővezetési feladatot időlépésenként lehet megoldani. Figyelembe kell venni, hogy a kopás számításánál kopási iterációnként a végeselem háló módosul. A hővezetési feladat megoldásához ugyanakkor ugyanazon a végeselem hálón kell megadni a hőmérséklet mezőt. Emiatt a hőmérséklet mezőket azonos hálóra kell transzformálni, átszámítani. Az eljárás során, amikor a hálón egy pont globális koordinátáiból szeretnénk meghatározni a lokális koordinátákat és a pontot tartalmazó végeselemet, szintén csak a próbálkozásra hagyatkozhatunk. Az általunk kidolgozott algoritmus segítségével pár lépésben megtaláljuk a keresett végeselemet. Az algoritmus nagyon előnyös numerikus integrálás során.

6. Az operátor hasítás módszerével algoritmus került kidolgozásra a csatolt

kopási-hővezetési-érintkezési mechanikai feladat p-verziójú végeselem-módszeres megoldására. A számítás összehangoltan kezeli az érintkezési feladat megoldását, a kopás számítását, és a hővezetési feladat megoldását. Iterációs ciklusok alkalmazásával biztosított egy időlépésen belül az elmozdulásmező és a hőmérséklet mező konvergenciája {3}, {4}, {7}.

5. Publikációk az értekezés témájában

Idegen nyelvű folyóiratban megjelent szakcikk:

{1} **B. Pere**, I. Páczelt: *A mapping technique for a heat conduction problem on moving mesh using the hp-version of the finite element method*, Journal of Computational and Applied Mechanics, Vol. 3, no. 2 (2002), 169-191

Magyar nyelvű folyóiratban megjelent idegen nyelvű szakcikk:

{2} **B. Pere**, I. Páczelt: *Modelling of wearing problem coupled with heat generation*, GÉP, L. évfolyam 5. szám, 1999, 27-30.

Teljes terjedelemben megjelent idegen nyelvű konferenciaelőadás:

{3} I. Páczelt, **B. Pere**: Investigation of contact wearing problems with hp-version of the finite element method, Thermal Stresses '99, Proc. of the Third Internat. Congress on Thermal Stresses, Cracow, Poland, 1999, 81-84.

{4} **B. Pere**: *Investigation of coupled thermo-mechanical problems with hp-version of the finite element method*, MicroCAD '2000 International Computer Science Conference, Section M: Applied Mechanical Engineering Sciences, Miskolc, February 23-24, 2000, 127-132.

{5} **B. Pere**: *Modelling of the coupled thermo-mechanical contact problem using hp-version of the finite element method*, MicroCAD '2001 International Computer Science Conference, Section N1: Applied Mechanical Engineering Sciences, March 1-2, 2001.

Idegen nyelvű konferenciaelőadás absztrakt:

{6} **B. Pere**, I. Páczelt: *Solution of coupled thermo-mechanical contact problem using the hp-version of the finite element method*, Book of abstracts, Numerical Methods and Computational Mechanics, July 15-19, 2002, University of Miskolc, Hungary, Miskolc, 212-214.

Magyar nyelvű konferenciaelőadás absztrakt:

{7} **Pere B.**, Páczelt I.:*Hőfejlődéssel párosuló kopási folyamatok modellezése*, VIII. Magyar Mechanikai Konferencia, Miskolci Egyetem, Miskolc, 1999.08.30-09.1., 114.

{8} **Pere B.**, *Érintkezési feladat és kopási folyamat számítása hp-verziós végeselem módszerrel*, IX. Magyar Mechanikai Konferencia, Miskolci Egyetem, Miskolc, 2003.08.27-08.29., 90.

6. Eredmények hasznosítása, további kutatási feladatok

A disszertáció p-verziójú végeselem-módszer felhasználásával forgástestek közötti kopási feladatok szimulációjára ad elméleti megközelítést és az elkészített számítógépi program segítségével numerikus tapasztalatokat. A gépészeti berendezések üzemeltetésénél jelentkező kopási, hőfejlődési folyamatok vizsgálata a gyakorlat számára nagy fontossággal bír. A számítógépes vizsgálatok előjelzést adhatnak a szerkezet tényleges viselkedésére. A dolgozatban tárgyalt módszer alkalmazhatóságának kibővítéséhez további vizsgálatok szükségesek. Eddig csak homogén, izotróp testeket vizsgáltunk, az anyagtörvény módosításával a módszer kiterjeszthető ortotróp anyagokra is. A kopás számításánál nem vettük figyelembe a két érintkező felület között mozgó, a kopás során keletkezett szemcséket. Ez a felületek közötti anyagréteg módosítja az érintkezési feladat és a hővezetési feladat megoldását. A feladat számítógépes megoldása hosszadalmas az egymásba ágyazott iterációs ciklusok miatt. Érdemes lenne megvizsgálni, hogy párhuzamos programozás alkalmazásával miként lehetne gyorsítani a feladat numerikus megoldását.

Hivatkozások

[1] Hertz, H.: *Über die Berühnung fester elastischer Körper* Journ. für reine und angew. Math (Crelle), **92** (1882), 156

[2] Signorini, A.: *Questioni di elasticiti non linearizzato o semilinearizzata*, Rend. di Matem. e. delle suo Appl., **18**, (1959), 17-31.

[3] Fichera, G.: *Problemi elastostatici con vincali unilaterali: il problema di Dignorini con ambigue condizioni al contorno*, Mem. Accad. Naz. Lincei, Ser. 8, **7**, (1964), 91-140

[4] Chan, S. K. and Tuba, I. S.: *A finite element method for contact problems of solid bodies, Part I., Part II.*, International Journal of Mechanical Science, **13**, (1971), 615-625, 627-639

[5] Francavilla, A. and Zienkiewicz, O. C.: *A note on numerical computation of elastic contact problems*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, **9**, (1975), 913-924

[6] Simo, J. C. and Wriggers, P. and Taylor, R. L.: *A perturbed Lagrangian formulation for the finite element solution of contact problems*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **50**, (1993), 163-180

[7] Hughes, T. R. J. and Taylor, R. L. and Kanoknukulchai, W. A.: *A finite element method for large displacement contact and impact problems*, In K. J. Bathe, editor, Formulations and Computational Algorithms in FE Analysis, MIT Press, Boston, (1977), 468-495

[8] Páczelt I.: *A végeselem-módszer modellezési kérdései, hibaanalízis*, Miskolci Egyetemi Kiadó, Miskolc, (1994)

[9] Wriggers, P.: *Computational contact mechanics*, John Wiley & Sons, LTD, (2002)

[10] Szabó, B. and Babuška, I.: *Finite element analysis*, John Wiley & Sons, New York, 1991.

[11] Gabbert, U. and Graeff-Weinberg, K.: *Eine* ph-*Elementformulierung für die Kontaktanalyse*, Z. angew. Math. Mech., **74**(4), (1994), 195-197.

[12] Volpert, Y., Szabó, T., Páczelt, I. and Szabó, B.: *Application of the space enrichment method to problems of mechanical contact*, Finit. Elem. Anal. Desig., **24**, (1997), 157-170.

[13] Páczelt, I., Szabó, B. and Szabó, T.: *Solution of contact problem using the* hp-*version of the finite element method*, Int. J. of Comp. and Math., **38**, (1999), 49-69.

[14] Váradi, K. and Néder, Z. and Friedrich, K. and Flöck, J.: *Numerical and finite element contact temperature analysis of real composite-steel surface in sliding contact*, Tribology International, 11, **31**, (1998), 669-686

[15] Váradi, K. and Néder, Z. and Bercsey, T. and Steinhilper, W.: *Contact and Thermal Analysis of the Wear Process in Linear Bearings*, Tribology Transactions, **41**, (1998), 11-18

[16] Kozák I., Béda Gy.: *Rugalmas testek mechanikája*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, (1987)

[17] Archard, J. F.: *Contact and rubbing of flat surfaces*, Journal of Applied Physics, **24**, (1953), 981-988

[18] B. Pere, I. Páczelt: *Modelling of wearing problem coupled with heat generation*, MicroCAD '99 International Computer Science Conference, Section M: Mechanical Engineering Sciences, Miskolc, February 24-25, 1999, 129-134.

[19] Saracibar, C. A.: *On the numerical modeling of frictional wear phenomena*, Computer methods in applied mechanics and engineering, **177**, (1999), 401-426

[20] Zmitrowicz A.: *Variational formulation of contact, friction and wear problems*, Gdańsk, (1999)

[21] Kozák I., Béda Gy. és Verhás J.: *Kontinuummechanika*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, (1986)

[22] Strömberg, N.: *Finite element treatment of two-dimensional thermoelastic wear problems*, Computer methods in applied mechanics and engineering, **177**, (1999), 441-455

[23] Carslaw, H. S. and Jaeger, J. C.: *Conduction of heat in solids*, Oxford University Press, London, (1959)

[24] Lewis, R. W., Morgan, K., Thomas, H. R. and Seetharamu, K. N.: *The finite elementmethod in heat transfer analysis*, John Wiley & Sons, Chichester, 1996.

[25] B. Pere, I. Páczelt: *A mapping technique for a heat conduction problem on moving mesh using the hp-version of the finite element method*, Journal of Computational and Applied Mechanics, Vol. **3**, no. 2 (2002), 169-191

[26] Zhu, Y. Y., Zacharia, T. and Cescotto, S.: *Application of fully automatic remeshing to complex metal-forming analysis*, Comput. Struct., **62**(3), (1997), 417-427.

[27] Trädegård, A., Nilsson, F. and Östlund, S.: *FEM-remeshing technique applied to crack growth problems*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **160**, (1998), 115-131.

[28] Brokken, D., Brekelmans, W. A. M. and Baaijens, F. P. T.: *Numerical modeling of the metal blanking process*, J. of Mater. Proc. Techn., **83**, (1998), 192-199.

[29] Brokken, D., Brekelmans, W. A. M. and Baaijens, F. P. T.: *Predicting the shape of blanked products: a finite element approach*, J. of Mater. Proc. Techn., **103**, (2000), 51-56.

[30] Hamel, V., Roelandta, J. M., Gacelb, J. N. and Schmitb, F.: *Finite element modeling of clinch forming with automatic remeshing*, Comput. Struct., **77**, (2000), 185-200.

[31] Lindgren, L.-E. and Häggblad, H.-Å.: *Automatic remeshing for three-dimensional finite element simulation of welding*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **147**, (1997), 401-409.

[32] Páczelt, I. and Pere, B.: *Investigation of contact wearing problems with* hp-*version of the finite element method*, *Thermal Stresses '99*, Proc. of the Third Internat. Congress on Thermal Stresses, Cracow, Poland, 1999, 81-84.