

MISKOLCI EGYETEM  
GÉPÉSZMÉRNÖKI KAR

**Rugalmas, szálerősítésű, rétegelt, vékony kompozit forgáshéjak  
érzékenységi vizsgálata és alakoptimalizálása**

Ph.D. ÉRTEKEZÉS

Készítette:  
**Csonka Béla**  
okleveles gépészmérnök

GÉPÉSZMÉRNÖKI TUDOMÁNYOK DOKTORI PROGRAM,  
GÉPÉSZMÉRNÖKI ALAPTUDOMÁNYOK ALPROGRAM, SZILÁRD TESTEK MECHANIKÁJA  
RÉSZPROGRAM

DOKTORI PROGRAM VEZETŐ:  
**Dr. Páczelt István**  
AZ MTA RENDES TAGJA, A MŰSZAKI TUDOMÁNY DOKTORA

Témavezető:  
**Dr. Kozák Imre**  
MTA levelező tagja

Miskolc, 1999

# Tartalomjegyzék

<b>1. Bevezetés .....</b>	<b>4</b>
1. 1. Tudományos előzmények.....	4
1. 2. Az értekezés kutatási célkitűzése.....	9
1. 3. Vizsgálati módszerek .....	10
<b>2. Alkalmazott jelölések.....</b>	<b>11</b>
<b>3. Forgáshéjak alakváltozásának kinematikai egyenletei.....</b>	<b>16</b>
<b>4. A szálerősítésű kompozit rétegek anyagegyenlete.....</b>	<b>20</b>
4. 1. Egy réteg anyagegyenlete.....	20
4. 2. Tönkremeneteli kritériumok.....	25
<b>5. Magasabb rendű modell a nyírási alakváltozás figyelembevételére.....</b>	<b>28</b>
5. 1. Az elmozdulásmező.....	28
5. 2. A végeelem geometriai jellemzői.....	30
5. 3. Az elmozdulásmező közelítése.....	33
5. 4. Alakváltozási energia, variációs elv, egyensúlyi egyenlet.....	35
<b>6. Érzékenységi vizsgálat.....</b>	<b>38</b>
6. 1. Az alapösszefüggések tervezési paraméter szerinti deriváltja.....	38
6.2. A térfogat érzékenysége.....	40
6.3. Az elmozdulásmező érzékenysége.....	40
6.4. A feszültségek érzékenysége.....	42
6.5. Az alakváltozási energia érzékenysége.....	42
6.6. Spline-ok használata.....	43
6.7. A tönkremeneteli kritériumok érzékenysége.....	44

<b>7. Optimalizálás.....</b>	<b>45</b>
7. 1. A célfüggvény.....	45
7. 2. Az optimalizálási feltételek.....	45
7. 3. Az optimalizálási feladat megfogalmazása, megoldási módszerek....	46
<b>8. Összefoglalás.....</b>	<b>48</b>
<b>9. Példák.....</b>	<b>50</b>
9. 1. 1. példa. Forgáshéj számítása.....	50
9. 2. 2. példa. A kapcsolt csavarási feladat.....	51
9. 3. 3. példa. Nemforgásszimmetrikus feladat.....	52
9. 4. 4. példa. Érzékenységi vizsgálat.....	53
9. 5. 5. példa. Alakoptimalizálás.....	56
9. 6. A számítási eredmények értékelése.....	59
<b>Függelék A.....</b>	<b>60</b>
<b>Függelék B.....</b>	<b>63</b>
<b>Függelék C.....</b>	<b>65</b>
<b>Irodalom.....</b>	<b>80</b>

# 1. Bevezetés

## 1. 1. Tudományos előzmények

A szálerősítésű, rétegelt kompozit forgáshéjak ipari felhasználása - kedvező mechanikai tulajdonságaiknak és kis tömegüknek köszönhetően - jelentősen megnövekedett. A hatékony ipari alkalmazások felvetik a szükségességét olyan mechanikai és numerikus modellek kidolgozásának, melyek a szálerősítésű kompozit rétegekből álló forgáshéj mechanikai viselkedését jól közelítik, ezáltal a forgáshéjknál jelentkező mechanikai problémákra jó megoldásokat adnak. Az elmúlt években számos publikáció foglalkozott ezzel a problémával, az 1991-93 években megjelent dolgozatokat összefoglalóan ismerteti [1].

Rétegelt kompozit szerkezetek építőeleme a szálerősítésű réteg, amely mátrix anyagból és ebben elhelyezett szálakból áll. A szálak hosszának megfelelően megkülönböztethetők rövid és hosszú szálú kompozitok. Rövid szálak esetén a szálazás iránya általában véletlenszerű. A továbbiakban csak hosszú szálú kompozitokat vizsgálunk, azzal a feltételezéssel, hogy a szálazás iránya jól meghatározott, és a rétegen belül állandó.

Ha egy kompozit réteg anyagtulajdonságait pontról pontra vizsgáljuk, ezekben ugrásokat, szakadásokat találunk. Annak érdekében, hogy a kontinuummechanika eszközeit és módszereit tudjuk alkalmazni, szükséges a réteg anyagának homogenizálása, ami a feszültség-alakváltozás kapcsolat magasabb, makroszintű vizsgálatát követeli meg, azaz olyan méretű kontinuumelemek figyelembevételét, amelyekhez képest a mikroszerkezeti méretek (szálak vastagsága, távolsága) elhanyagolhatóan kicsik. A fenti okokból következően az itt alkalmazott módszerek eredményei nem adhatnak elfogadható eredményeket a rétegeket alkotó anyagok (szálak, mátrixanyagok) határfelületén kialakuló viszonyokra, de az egész szerkezet viselkedésének meghatározásához elegendő információt szolgáltatnak. A homogenizálás történhet az ún. keverési szabályok alapján, vagy az egyes anyagok mechanikai jellemzőinek ismeretében, a térfogatok arányában ([2], [3], [4], [5]), vagy a

rétegelt kompozit lemezen végzett kísérletekkel ([6]), de minden esetben lineáris kapcsolatot feltételezve az anyagegyenletekben szereplő alakváltozás és feszültségi jellemzők között.

A homogenizálás eredményeképpen a rétegekre jellemző lineáris anyagegyenletek tulajdonságai eltérnek a mechanikai vizsgálatok jelentős részében használt izotrop anyagmodellen alapuló feszültség-alakváltozás kapcsolattól. Az anyagjellemzőket a rétegen belül állandónak tételezzük fel (homogenizálás), értékük azonban a tér különböző irányaiban változik. Mégis az egyes irányokban meglévő szimmetria tulajdonságok és az anyagtulajdonságok kitüntetett irányainak megfelelően megválasztott koordináta-rendszerek lehetővé teszik az egymástól független anyagtulajdonságok számának csökkentését.

A kompozitokban a mátrixanyag és a szálak anyagának mechanikai tulajdonságai lényegesen eltérnek, ennek következtében a homogenizált anyagjellemzők egyik főiránya megegyezik a szálak irányával. Másik, a vizsgálatok szempontjából lényeges következmény, hogy a rugalmassági és a csúsztató rugalmassági modulus aránya - az izotrop anyagokkal összevetve - nagy. Ez utóbbi következmény azt eredményezi, hogy a nyírás hatása is sokkal jelentősebb ([7]).

Több, egymástól eltérő tulajdonságú kompozit rétegből álló héjszerkezet vizsgálatához szükséges a héjelméletek szokásos feltételezésein túlmenően egy kiegészítő feltételezés is, vagyis az, hogy a rétegek egymástól nem válnak el (delamináció) és két réteg pontjai - melyek a terheletlen állapotban érintkeznek - az alakváltozás során is együtt mozognak. Ez utóbbi feltételezés teszi lehetővé, hogy a feladat változóit a középfelületre redukáljuk. A kiegészítő feltétel hiányában az ismeretlenek száma a rétegek számának arányában jelentősen növekedne ([8]).

A rétegelt kompozit szerkezet sajátosságait szem előtt tartva olyan kinematikai feltételezéseken alapuló héjmodell megfogalmazására van szükség, amely illeszkedik mind a kompozit anyagok jellemzőihez, mind a rétegelt szerkezetek tulajdonságaihoz.

A héjelméletek, így a forgáshéjakra érvényes elmélet alapfeladata olyan egyenletrendszer előállítása a kontinuummechanika háromdimenziós linearizált összefüggéseiből, geometriai, kinematikai és dinamikai feltételezések figyelembevételével, amelynek változói a héj középfelületén értelmezettek.

Az alkalmazott kinematikai feltételezések alapján a héjmodellek első nagy csoportja Kirchhoff-Love-féle (K-L) feltételezésen alapszik ([9],[10],[11]), amely szerint a középfelület normálisai, mint merev egyenesek mozdulnak és fordulnak el, és az alakváltozás után is merőlegesek maradnak a megváltozott középfelületre. Ennek következtében a modell a nyírási energiát nem veszi figyelembe.

A második nagy csoport a Reissner-Mindlin-féle (R-M) feltételezésen alapszik ([12], [13]), amely szerint a középfelület normálisai a középfelülethez képest merev egyenesként elfordulnak. A nyírásból származó alakváltozás és feszültség a normális mentén állandóra adódik, ami ellentétben áll azzal a feltételezéssel, hogy a nyírásból származó alakváltozás és feszültség a lemez vagy héj alsó illetve felső palástján zérus. Ezért a nyírási energia figyelembevételéhez szükséges a nyírási együttható meghatározása ([14], [15]).

Lemezekre Reddy ([16], [17]), Noor és Burton ([18]) állított elő magasabb rendű modelleket (HOST), ahol a normális pontjainak érintő irányú elmozdulását harmadfokú polinomokkal közelítették. Az ismeretlenek számának csökkentésére ad lehetőséget az a dinamikai feltétel, hogy a lemez vagy héj alsó illetve felső palástján a nyírásból származó feszültségnek és ennek következtében a megfelelő alakváltozásnak el kell tűnnie. Ebben az esetben a nyírási együttható meghatározására nincs szükség, a nyírásból származó feszültség eloszlása parabolikus. A fenti alapgondolat általánosítása forgáshéjakra a [19] közlemény, amelyben a meridián irányú elmozdulás közelítése magasabb rendű.

Figyelemre méltó tulajdonsága az ortotrop rétegekből álló forgáshéjaknak, hogy forgásszimmetrikus terhelés esetén a forgásszimmetrikus feladat megoldása nem választható

el a forgáshéj csavarási problémájától. Ennek a ténynek a vizsgálata Sheinman és Weissman [20] nevéhez fűződik.

Az egyes héjmodellek középfelületre redukált mennyiségekkel felírt differenciálegyenlet-rendszerének numerikus megoldására széles körben alkalmazzák a végeelem módszert. Ezért az egyes elméleteket szükséges a numerikus megvalósítások szempontjából is áttekinteni. Az K-L feltételezésen alapuló végeelemes eljárások hátránya, hogy megvalósításuk  $C^1$  folytonos függvények használatát követeli meg, amely lényegesen leszűkíti az alkalmazható approximációs lehetőségek számát. Ez utóbbi feltétel feloldható ([21],[22]), ha a K-L alapfeltevés csak az elemek határán érvényes, de az egyensúlyi egyenlet felírásához szükséges variációs elvben csak a hajlításból és membrán állapotból származó energia szerepel.

A R-M feltételezésen alapuló végeelemes eljárások hátránya, hogy ha a héj vastagsága kicsi, az egyenletrendszer kondíciója jelentős mértékben romlik ([23],[24]). A probléma a magasabb fokszámú lokális approximáció ( $p$  verzió [25],[26]) megvalósításával orvosolható. A  $p$  verzió alkalmazása egyben lehetőséget biztosít a végeelemes számítások hibaanalízisére, a számítások diszkretizációs hibáinak vizsgálatára ([27]).

A rétegelt kompozit anyagokból előállított szerkezetek tervezése során felvetődő igény az anyagok kedvező tulajdonságait a lehető legnagyobb mértékben kiaknázó konstrukciók létrehozása. Ezt a célt szolgálja olyan eszközök kidolgozása, melyek segítségével valamely szempontból optimális, adott feltételeknek eleget tevő szerkezeti kialakítások határozhatók meg. Ebben az esetben a tervező feladata az elérendő cél (célfüggvény) megfogalmazása, és a konstrukciót befolyásoló, változtatható paraméterek (tervezési paraméterek) megválasztása.

Szerkezetek alakoptimalizálása nemlineáris programozási (NLP) feladathoz vezethető. Az NLP megoldására számos algoritmus terjedt el. A továbbiakban az elsőrendű módszerekkel foglalkozunk, amelyek nem csak a célfüggvény és a feltételek, de ezek tervezési

paraméter szerinti deriváltjának (érzékenységének) ismeretét is megkívánják. Az irodalomban ([28],[29],[30],[31],[32]) és a kereskedelmi forgalomban ([33],[34],[35],[36]) is található számos elsőrendű módszert megvalósító megbízható, hatékony programcsomag.

A fent említett optimalizálási eljárások eredményességét és a szükséges számítási kapacitás mennyiségét jelentősen befolyásoló tényező az érzékenységi vizsgálat, azaz az un. érzékenységi gradiens előállítás. A vizsgálat célja, annak meghatározása, hogy a számított mechanikai jellemzők (alakváltozás, elmozdulás, feszültség) mennyire “érzékenyek” a tervezési paraméter változására. Az egyes mechanikai jellemzők érzékenységből, mint a jellemzők tervezési paraméter szerinti parciális deriváltjaiból felépíthető vektor az érzékenységi gradiens. Az optimalizálás során ezen érzékenységi gradiens segítségével állítható elő az az irány, amely mentén az iteratív optimalizálási eljárás adott lépésben az eredmény keresendő.

A legegyszerűbben megvalósítható, de nagy számítás igényű megoldás a globális véges differenciák módszere, ahol az érzékenység a feladat kezdeti helyzetében vett megoldásának és a tervezési paraméterek által megváltoztatott helyzetéhez tartozó megoldásainak összevetéséből határozható meg ([37],[38],[39]). Hasonló eljárás a szemianalitikus megoldás, amikor a számításoknak csak bizonyos részét végzik el véges differenciák módszerével, a többit analitikusan, az összefüggések tervezési paraméter szerinti differenciálásával ([40],[41]). Ez utóbbi eljárás lehetőséget biztosít a csatlakozó szerkezetek módszerének felhasználására, ahol a merevségi mátrix invertálása elkerülhető a csatlakozó szerkezethez tartozó feladat megoldásával ([42],[43]).

Az érzékenység vizsgálat analitikus eljárásai két csoportra oszthatók ([44]):

- diszkrét gradiens módszer,
- diszkretizált gradiens módszer.



Az első esetben az érzékenységi gradiens a diszkrétizált kontinuum modellhez tartozó lineáris egyenletrendszer tervezési paraméter szerinti deriválásával állítható elő. Míg a második esetben mind a célfüggvény, a feltételek, mind a mechanikai peremérték-feladathoz tartozó variációs elv integrálok formájában adott. A tervezési paraméter szerinti materiális derivált bevezetésével az érzékenységi gradiens is integrál alakban állítható elő ([45],[46],[47],[48],[49],[50],[51]).

A szerző a Lisszaboni Műszaki Egyetemen C. A. Mota Soares professzor irányításával magasabb rendű forgáshéjmodellt alkalmazott (a héj vastagsága mentén a pontok meridiángörbe menti érintő irányú elmozdulásának magasabb rendű közelítésével, a Reddy-féle lemezmodell nem teljes körű általánosításával), analitikus differenciáláson alapuló érzékenységi vizsgálatra és tetszőleges, térbeli erőrendszerrel terhelt vékony, rugalmas, rétegelt, kompozit forgáshéjak alakoptimalizálására ([19], [52]).

## **1. 2. Az értekezés kutatási célkitűzései**

Az értekezés fő célkitűzése eljárások kidolgozása tetszőleges, térbeli erőrendszerrel terhelt, rétegelt, szálerősítésű kompozit forgáshéjak valamely szempontból (minimális tömeg, maximális merevség) optimális, bizonyos feltételeknek (adott térfogat, adott maximális feszültség) eleget tevő alakjának meghatározására.

Az e cél érdekében elvégzendő kutatómunka az alábbiakban foglalható össze:

1. Harmadfokú polinomok alkalmazásával - a Reddy-féle, lemezekre megfogalmazott magasabb rendű modell általánosítása forgáshéjakra, ezzel a Reissner-Mindlin-féle elméletben szereplő nyírési együttható kiküszöbölése.

2. A fenti elmozdulásmezőn alapuló vékony, rugalmas, kompozit forgáshéjak statikai vizsgálatára alkalmas, a meridiángörbe mentén a  $p$  verziós alakfüggvényeket, a paralell körök mentén Fourier sorfejtést alkalmazó végeselemes eljárás kidolgozása.
3. Algoritmus kidolgozása a végeselemes eljárás összefüggéseinek illetve a számítások eredményeinek a tervezési paraméterek változása iránti érzékenysége meghatározására.
4. A tervezési paraméterek számának csökkentése spline-ok alkalmazásával.
5. Programrendszer kidolgozása a fenti végeselemes és érzékenységi vizsgálat alapján rugalmas, vékony, rétegelt kompozit forgáshéjak alakoptimalizálására.

A kidolgozott eljárásokat példák szemléltetik.

### **1. 3. A vizsgálatok módszerei**

Az értekezés a kitűzött feladatok megoldására elméleti módszereket alkalmaz. A gondolatmenet kifejtésében felhasználja a kontinuummechanika, a matematikai és kiemelten a numerikus analízis, a variációszámítás és a végeselem-módszer ismert eredményeit.

## 2. Alkalmazott jelölések

$(s, \varphi, z)$	a forgáshéj középfelületén értelmezett természetes koordináta-rendszer
$(r, \varphi, Z)$	globális koordináta-rendszer (hengerkoordináta-rendszer)
$(x_1, x_2, x_3)$	a réteg természetes koordináta-rendszere
$\alpha_k$	a természetes koordináta-rendszer tengelyei és az anyagtulajdonságok kitüntetett iránya által bezárt szög
$\beta_0$	a középfelület normálisainak elfordulása az $\mathbf{e}_\varphi$ tengely körül
$\beta^*, \beta^{**}, \theta^*, \theta^{**}$	a magasabb rendű tagok együtthatói az elmozdulás koordináták z szerinti sorfejtésében
$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$	az alakváltozási tenzor elemeiből képzett vektor (oszlopmátrix)
$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_s, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_\varphi, \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{s\varphi}, \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{sz}, \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{\varphi z}$	az alakváltozási tenzor elemei a természetes koordináta-rendszerben
$\boldsymbol{\varepsilon}_1^+, \boldsymbol{\varepsilon}_2^+, \boldsymbol{\varepsilon}_1^-, \boldsymbol{\varepsilon}_2^-, \boldsymbol{\gamma}_{12}^+$	határértékek a tönkremeneteli kritériumokban
$\phi_i(\xi)$	az $i$ -dik függvény az elmozdulásmező közelítésére
$\varphi$	szögkoordináta a paralellkör mentén
$\gamma$	a középfelület normálisa és az $r$ sugár által bezárt szög
$\eta$	normál irányban a réteghez tartozó, normalizált koordináta
$\Lambda$	gyűrűelem alakváltozási energia
$\nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}$	a Poisson tényezők
$\theta_0$	a középfelület normálisainak elfordulása az $\mathbf{e}_s$ tengely körül
$\hat{\boldsymbol{\sigma}}$	a feszültségi tenzor elemeiből képzett vektor (oszlopmátrix)

$\hat{\sigma}_s, \hat{\sigma}_\varphi, \hat{\tau}_{s\varphi}, \hat{\tau}_{sz}, \hat{\tau}_{\varphi z}$  a feszültségi tenzor nem zérus elemei a természetes koordináta-rendszerben

$\sigma_1^0, \sigma_2^0, \tau_{12}^+, \tau_{13}^+, \tau_{23}^+$  a Hill-Tsai kritériumban szereplő állandók

$\tau$  tervezési paraméter

$\tau_i$  tervezési paraméter, ha az csomóponti mennyiség

$\boldsymbol{\tau}$  a tervezési paraméterek vektora

$\boldsymbol{\tau}^{(k)}$  a tervezési paraméterek vektora a  $k$ -dik iterációban (oszlop mátrix)

$\xi$  az elemhez tartozó, normalizált lokális koordináta a meridiángörbe mentén

$\mathbf{A}$  a kontinuummechanika linearizált elméletében az alakváltozási tenzor

$A(s, z), B(s, z), C(s, z), D(s, z), E(s, z), F(s, z)$  az elmozdulásközelítésében használt függvények

$a^{(k)}$  a lépéshossz a  $k$ -dik iterációban

$\mathbf{B}_n^c(\xi, \eta), \mathbf{B}_n^s(\xi, \eta)$  a módosított alakfüggvények mátrixa

$C_{klmn}$  az anyagjellemzők tenzora

$\mathbf{D}^k$  a  $k$ -dik réteg anyagállandóinak mátrixa a héj természetes koordináta rendszerében

$\mathbf{d}^{(k)}$  a tervezési paraméterek terében kijelölt irány a  $k$ -dik iterációban (oszlop mátrix)

$E_1, E_2, E_3$  a rugalmassági modulusz a kitüntetett irányokban

$\mathbf{e}_s, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$  bázisvektorok a forgáshéj középfelületén, egységvektorok

$F_r, F_z, F_\varphi, M_s, M_\varphi$	a külső erőrendszer középfelületre redukált felületen megoszló vektorkettősének koordinátái
$\mathbf{f}_n$	a tehervektor (oszlop mátrix)
$G_{12}, G_{13}, G_{23}$	a csúsztató rugalmassági modulusz a kitüntetett irányokban
$H_i$	a héj vastagságát meghatározó spline kontroll pontja
$h$	a héj vastagsága
$h_i$	a héj vastagsága az $i$ jelű csomópontban
$\bar{h}^{k-1}, \bar{h}^k$	a $k$ -adik réteget határoló felületek normál irányú koordinátája
$h^{k-1}, h^k$	a $k$ -adik réteget határoló felületek normál irányú koordinátája és a héj vastagságának aránya
$\mathbf{K}_n$	a merevségi mátrix
$L$	a rétegek száma
$M_j$	a meridiángörbét meghatározó spline kontroll pontja
$N$	a Fourier sorfejtésben a tagok száma
$\mathbf{N}(\xi)$	az alakfüggvények mátrixa
$N_f$	a feltételi egyenlőtlenségek száma
$N_i(\xi)$	az $i$ -dik alakfüggvény
$N_p$	a csomópontok száma
$N_t$	a tervezési paraméterek száma
$\mathbf{n}$	a középfelület normálisa (nem egységvektor)
$P_j$	a $j$ -dik Legendre-polinom
$\bar{\mathbf{Q}}$	az anyagtulajdonságok mátrixa az anyagtulajdonságok kitüntetett irányai által kijelölt koordináta-rendszerben

$\mathbf{q}_n$	a csomóponti elmozdulások vektora (oszlop mátrix)
$R_s$	a meridiángörbe görbületi sugara
$R_\varphi$	a meridiángörbére merőleges normálmetszet görbületi sugara
$r$	sugár irányú koordináta
$S_{ij}^r$	a meridiángörbét meghatározó spline együttható mátrixa
$S_{ij}^h$	a héj vastagságát meghatározó spline együttható mátrixa
$s$	ívkoordináta a meridiángörbe mentén
$\mathbf{T}$	transzformációs mátrix a természetes és az anyagtulaj- donságok kitüntetett irányai által kijelölt koordináta- rendszerek között
$T_i$	tervezési paraméter, ha az spline kontroll pont
$\mathbf{t}$	a meridiángörbe érintővektora (nem egységvektor)
$t$	az érintővektor hossza
$U$	a fajlagos alakváltozási energia (térfogategységre)
$u, v, w$	a héj tetszőleges pontjának elmozduláskoordinátái a globális koordináta-rendszerben
$\bar{\mathbf{u}}$	tetszőleges pont elmozdulásvektora
$\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$	a héj tetszőleges pontjának elmozduláskoordinátái a természetes koordinátarendszerben
$\bar{u}_0, \bar{v}_0, \bar{w}_0$	a középfelület pontjainak elmozdulása természetes koordináta- rendszerben
$u_0, v_0, w_0$	a középfelület elmozdulásvektorának koordinátái a globális koordináta-rendszerben

$\mathbf{u}_n$	a Fourier sorfejtésben az n-dik taghoz tartozó ismeretlenek vektora (oszlopmátrix)
$Z$	a héj forgástengelye mentén mért koordináta
$z$	koordináta a középfelület normálisa mentén
$W$	a külső erőrendszer munkája

Operátorok:

$\nabla$	a Hamilton-féle operátor
$\cdot \varepsilon$	jelöli a végeselemes összeszerelést

A szorzások jelölése:

tenzoriális (diadikus) szorzás:  $\circ$

skaláris szorzás:  $\cdot$

vektoriális szorzás:  $\times$

### 3. Forgáshéjak alakváltozásának kinematikai egyenletei

A forgáshéjak szilárdságtanának linearizált elmélete az alábbi feltételezésekkel származtatható: a héj más méreteivel összehasonlítva vékony, az elmozdulások és alakváltozások kicsik, a középfelület normálisainak hossza nem változik az alakváltozás során, és a normálirányú,  $\hat{\sigma}_z$  feszültség elhanyagolható. Az értekezés nem él azzal a feltételezéssel, hogy a középfelület normálisa az alakváltozás során a deformálódott középfelületre normális marad.

A kontinuummechanika linearizált elméletében a kinematikai egyenletek teremtik meg a kapcsolatot az alakváltozásitenzor koordinátái és az elmozdulásvektor koordinátái között ([53]):

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{u} \circ \nabla + \nabla \circ \mathbf{u}) \quad (3.1)$$

ahol a természetes koordináta-rendszerben

$$\nabla = \frac{1}{1 + \frac{z}{R_s}} \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{e}_s + \frac{1}{1 + \frac{z}{R_\varphi}} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z, \quad (3.2)$$

a Hamilton-féle differenciáloperátor

Figyelembe véve azt a feltételezést, hogy a héj más méreteivel összehasonlítva vékony, az alábbi feltételezések tehetők:

$$1 + \frac{z}{R_s} \approx 1 \quad \text{és} \quad 1 + \frac{z}{R_\varphi} \approx 1. \quad (3.3)$$



3.1. táblázat. Az egységvektorok deriváltjai

$\mathbf{e}_i$	$\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial s}$	$\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial \varphi}$	$\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial z}$
$\mathbf{e}_s$	$-\frac{1}{R_s} \mathbf{e}_z$	$\sin \gamma \mathbf{e}_\varphi$	$\mathbf{0}$
$\mathbf{e}_\varphi$	$\mathbf{0}$	$-\sin \gamma \mathbf{e}_s - \cos \gamma \mathbf{e}_z$	$\mathbf{0}$
$\mathbf{e}_z$	$\frac{1}{R_s} \mathbf{e}_s$	$\cos \gamma \mathbf{e}_\varphi$	$\mathbf{0}$

A forgáshéj tetszőleges pontjának elmozdulása a középfelületen értelmezett természetes koordináta-rendszerben (3.1. ábra).

$$\hat{\mathbf{u}} = \hat{u}(s, \varphi, z) \mathbf{e}_s(s, \varphi) + \hat{v}(s, \varphi, z) \mathbf{e}_\varphi(\varphi) + \hat{w}(s, \varphi, z) \mathbf{e}_z(s, \varphi). \quad (3.4)$$

Tekintettel a 3.1 táblázatban összefoglalt szabályokra, az elmozulásmező parciális deriváltjai:

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial s} = \left( \frac{\partial \hat{u}}{\partial s} + \frac{\hat{w}}{R_s} \right) \mathbf{e}_s + \frac{\partial \hat{v}}{\partial s} \mathbf{e}_\varphi + \left( \frac{\partial \hat{w}}{\partial s} - \frac{\hat{u}}{R_s} \right) \mathbf{e}_z, \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial \varphi} = \left( \frac{\partial \hat{u}}{\partial \varphi} - \bar{v} \sin \gamma \right) \mathbf{e}_s + \left( \frac{\partial \hat{v}}{\partial \varphi} + \hat{u} \sin \gamma + \hat{w} \cos \gamma \right) \mathbf{e}_\varphi + \left( \frac{\partial \hat{w}}{\partial \varphi} - \bar{v} \cos \gamma \right) \mathbf{e}_z, \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial z} = \frac{\partial \hat{u}}{\partial z} \mathbf{e}_s + \frac{\partial \hat{v}}{\partial z} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial \hat{w}}{\partial z} \mathbf{e}_z. \quad (3.7)$$

Az alakváltozási tenzormező koordinátáit meghatározó kinematikai egyenletek a fentiek alapján felírhatók ([54]). Pl.:

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_s = \frac{1}{2} \mathbf{e}_s (\hat{\mathbf{u}} \circ \nabla + \nabla \circ \hat{\mathbf{u}}) \mathbf{e}_s, \quad (3.8)$$

melyből a megfelelő szorzások elvégzése után következik:

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_s = \frac{\partial \hat{u}}{\partial s} + \frac{\hat{w}}{R_s}. \quad (3.9)$$

Hasonlóan eljárva a többi keresett kinematikai egyenlet is előállítható:

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_\varphi = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \hat{v}}{\partial \varphi} + \hat{u} \sin \gamma + \hat{w} \cos \gamma \right) \quad (3.10)$$

$$\hat{\gamma}_{s\varphi} = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \hat{u}}{\partial \varphi} - \hat{v} \sin \gamma \right) + \frac{\partial \hat{v}}{\partial s} \quad (3.11)$$

$$\hat{\gamma}_{sz} = \frac{\partial \hat{u}}{\partial z} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial s} - \frac{\hat{u}}{R_s} \quad (3.12)$$

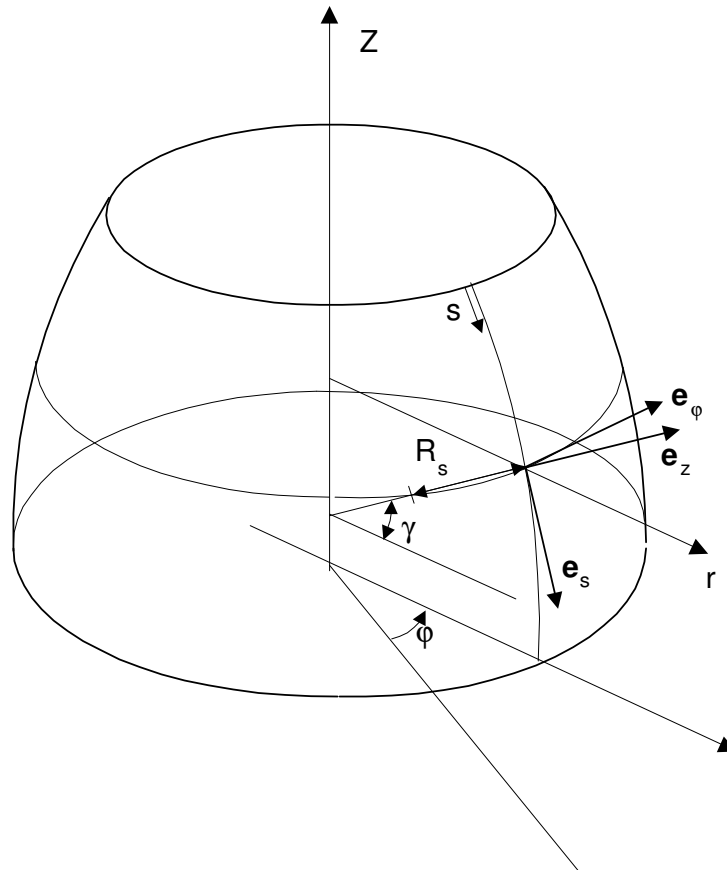
$$\hat{\gamma}_{\varphi z} = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \hat{w}}{\partial \varphi} - \hat{v} \cos \gamma \right) + \frac{\partial \hat{v}}{\partial z} \quad (3.13)$$

A globális és a természetes koordináta-rendszerekben az elmozdulás-koordináták közötti kapcsolat az alábbi:

$$\hat{u}_0 = u_0 \sin \gamma - w_0 \cos \gamma \quad (3.14)$$

$$\hat{w}_0 = u_0 \cos \gamma + w_0 \sin \gamma \quad (3.15)$$

$$\hat{v}_0 = v_0 \quad (3.16)$$



3.1. ábra. A természetes- és a globális-koordináta-rendszerek

## 4. A szálerősítésű kompozit rétegek anyagegyenlete

### 4. 1. Egy réteg anyagegyenlete

Tetszőleges háromtengelyű feszültségi állapotban lévő pont jellemzésére a feszültségi tenzor  $\sigma_{kl}$  kilenc koordinátája, az alakváltozás leírására az alakváltozási tenzor  $\epsilon_{mn}$  kilenc koordinátája használható. A közöttük lévő lineáris kapcsolat a legáltalánosabb formában az alábbi [57]:

$$\sigma_{kl} = \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 C_{klmn} \epsilon_{mn}. \quad (4.1)$$

Ebben az esetben a  $C_{klmn}$  tenzornak 81 független koordinátája lehet. Figyelembe véve, hogy az alakváltozási és a feszültségi tenzor szimmetrikus, az alábbi azonosságok állnak fenn:

$$C_{klmn} = C_{lkmn} \quad \text{és} \quad C_{klmn} = C_{kl nm}, \quad (4.2)$$

vagyis a független változók száma 36.

További lehetőség adódik a független anyagállandók számának csökkentésére a fajlagos alakváltozási energia vizsgálatával. A fajlagos alakváltozási energia:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \sigma_{kl} \epsilon_{kl} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 C_{klmn} \epsilon_{kl} \epsilon_{mn}. \quad (4.3)$$

Képezve a fajlagos alakváltozási energia második deriváltját az alakváltozási tenzor koordinátái szerint:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \epsilon_{kl} \partial \epsilon_{mn}} = C_{klmn}, \quad (4.4)$$

és felhasználva, hogy a parciális deriváltak sorrendje felcserélhető, következik:

$$C_{klmn} = C_{mkl} \quad (4.5)$$

azaz a 36 anyagjellemzőből csak 21 független.

Vizsgálataink körét az un. ortotrop anyagokra szűkítve a feszültség-alakváltozás kapcsolat tovább egyszerűsíthető. Határozzák meg a réteg természetes derékszögű koordináta-rendszerét  $(x_1, x_2, x_3)$  az anyagjellemzők kitüntetett irányai. Szálerősítésű kompozitok esetén, mivel a szálak anyagjellemzői szálirányban lényegesen meghaladják a mátrixanyag jellemzőit, az egyik kitüntetett irány,  $x_1$  egybeesik a szálak irányával. Ebben a rendszerben szimmetriák állnak fenn az  $x_1 - x_2$ , az  $x_2 - x_3$  és az  $x_1 - x_3$  síkokra. Így a független jellemzők száma 9. A 4.1. táblázat foglalja össze az egyes anyag típusokra jellemző anyagállandók mátrixának tulajdonságait.

4.1. táblázat. Az egyes anyag típusokhoz tartozó anyagjellemzők

Anyag típusa Koordináta-rendszer	A nem zérus elemek száma az anyagállandók mátrixában	A független anyagjellemzők száma
anizotrop	36	21
ortotrop nem természetes koord. Rend.	36	9
ortotrop természetes koord. rend.	12	9
izotrop	12	2
ortotrop réteg nem természetes kord. rend.	13	6
ortotrop réteg természetes koord. rend.	7	6
izotrop réteg	7	2

A továbbiakban a feszültségi és az alakváltozási tenzorok koordinátáit vektorokba, az anyagjellemzők tenzorának koordinátáit mátrixba rendezve, a mérnöki konstansok felhasználásával az anyagegyenlet a következő [5]:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\nu_{21} & -\nu_{31} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\nu_{32} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{13}}{E_1} & \frac{-\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

A szimmetria tulajdonságból következik, hogy

$$\frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j}, \quad (4.7)$$

azaz a független anyagjellemzők  $E_1, E_2, E_3, \nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}, G_{12}, G_{13}$  és  $G_{23}$ . Ismeretükben  $\nu_{21}, \nu_{31}$  és  $\nu_{32}$  számítható.

Egy réteg vizsgálata esetén (izotrop lemezek, héjak vizsgálatához hasonlóan) egy geometriai ( $\varepsilon_3 = 0$ ) és egy dinamikai ( $\sigma_3 = 0$ ) (nem ellentmondás mentes) feltételezés felhasználásával és a (4.6) egyenletben szereplő anyagjellemzők mátrixának invertálásával a feszültség-alakváltozás kapcsolat a réteg tetszőleges pontjában a kitüntetett irányok által adott koordináta-rendszerben a következő [5]:

$$\begin{bmatrix} \bar{\sigma}_1 \\ \bar{\sigma}_2 \\ \bar{\tau}_{12} \\ \bar{\tau}_{13} \\ \bar{\tau}_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}_1 \\ \bar{\varepsilon}_2 \\ \bar{\gamma}_{12} \\ \bar{\gamma}_{13} \\ \bar{\gamma}_{23} \end{bmatrix}, \quad (4.8)$$

ha

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_1 \\ \bar{\sigma}_2 \\ \bar{\tau}_{12} \\ \bar{\tau}_{13} \\ \bar{\tau}_{23} \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}_1 \\ \bar{\varepsilon}_2 \\ \bar{\gamma}_{12} \\ \bar{\gamma}_{13} \\ \bar{\gamma}_{23} \end{bmatrix},$$

akkor (4.8) kifejezés tömörebben:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \bar{\mathbf{Q}}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad (4.9)$$

ahol

$$\bar{Q}_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad (4.10)$$

$$\bar{Q}_{12} = \bar{Q}_{21} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad (4.11)$$

$$\bar{Q}_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad (4.12)$$

és

$$\bar{Q}_{12} = G_{12} \quad (4.13)$$

$$\bar{Q}_{44} = G_{13} \quad (4.14)$$

$$\bar{Q}_{55} = G_{23} \quad (4.15)$$

Ha már az anyagállandók mátrixa a réteg természetes koordináta-rendszerében ismert, akkor egy egyszerű transzformációval a rétegre merőleges tengely körül  $\alpha_k$  szöggel elforgatott koordináta-rendszerbe is transzformálható. Az  $\alpha_k$  szöveget a  $k$ -adik rétegben a szálak érintője és a meridiángörbe érintője között mérjük (4.1.ábra). Teremtse meg az alábbi transzformációs mátrix

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs & 0 & 0 \\ s^2 & c^2 & -2cs & 0 & 0 \\ -cs & cs & c^2 - s^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix}, \quad (4.16)$$

melyben

$$c = \cos \alpha_k, \quad s = \sin \alpha_k,$$

a kapcsolatot az alakváltozási tenzor koordinátáiból álló, a réteg kitüntetett irányai által adott koordináta-rendszerében és a forgáshéj természetes koordináta-rendszerében képzett vektorok között, vagyis

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{T} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (4.17)$$

A  $\mathbf{T}$  transzformációs mátrix ortogonális (forgást ír le), azaz  $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^T$  ( $T$  index a transzponáltat jelöli).

Így a forgáshéj természetes koordináta-rendszerében az anyagegyenlet a következő:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{T} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{D}^k \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad (4.18)$$

ahol

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \hat{\varepsilon}_s \\ \hat{\varepsilon}_\varphi \\ \hat{\gamma}_{s\varphi} \\ \hat{\gamma}_{sz} \\ \hat{\gamma}_{\varphi z} \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_s \\ \hat{\sigma}_\varphi \\ \hat{\tau}_{s\varphi} \\ \hat{\tau}_{sz} \\ \hat{\tau}_{\varphi z} \end{bmatrix}.$$

A fenti egyenletben szereplő  $\mathbf{D}$  mátrix nem zérus elemei:

$$D_{11} = \bar{Q}_{11}c^4 + \bar{Q}_{22}s^4 + 2(\bar{Q}_{12} + 2\bar{Q}_{33})s^2c^2 \quad (4.19)$$

$$D_{12} = D_{21} = (\bar{Q}_{11} + \bar{Q}_{22} - 4\bar{Q}_{66})s^2c^2 + \bar{Q}_{12}(c^4 + s^4) \quad (4.20)$$

$$D_{22} = \bar{Q}_{11}s^4 + \bar{Q}_{22}c^4 + 2(\bar{Q}_{12} + 2\bar{Q}_{33})s^2c^2 \quad (4.21)$$

$$D_{13} = D_{31} = (\bar{Q}_{11} - \bar{Q}_{12} - 2\bar{Q}_{33})c^3s - (\bar{Q}_{22} - \bar{Q}_{12} - 2\bar{Q}_{33})s^3c \quad (4.22)$$

$$D_{23} = D_{32} = (\bar{Q}_{11} - \bar{Q}_{12} - 2\bar{Q}_{33})s^3c - (\bar{Q}_{22} - \bar{Q}_{12} - 2\bar{Q}_{33})c^3s \quad (4.23)$$

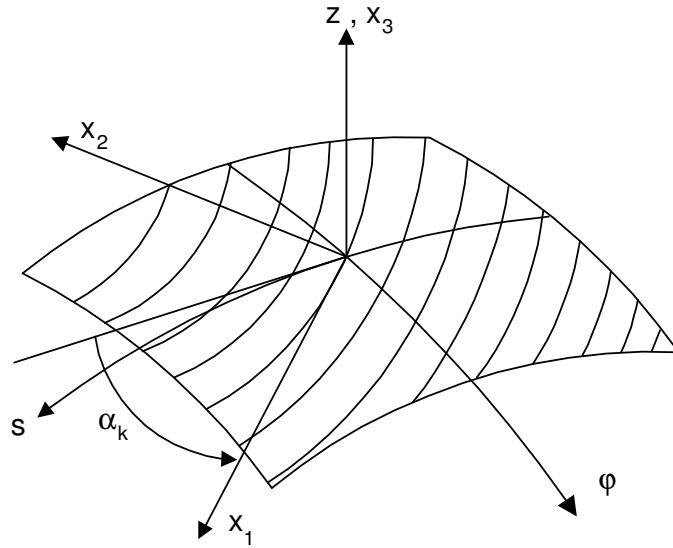
$$D_{33} = (\bar{Q}_{11} + \bar{Q}_{22} - 2\bar{Q}_{12} - 2\bar{Q}_{33})s^2c^2 + \bar{Q}_{33}(s^4 + c^4) \quad (4.24)$$

$$D_{44} = \bar{Q}_{44}c^2 + \bar{Q}_{55}s^2 \quad (4.25)$$

$$D_{45} = D_{54} = (\bar{Q}_{44} - \bar{Q}_{55})sc \quad (4.26)$$

$$D_{55} = \bar{Q}_{44}s^2 + \bar{Q}_{55}c^2 \quad (4.27)$$





4.1. ábra. A szálak irányának értelmezése

## 4. 2. Tönkremeneteli kritériumok

Az egyes optimalizálási feladatokban feltételi egyenletként szerepelhet, hogy a szerkezet elbírja a terheléseket, ezért fontos olyan tönkremeneteli kritériumokat találni, amelyek jól jellemzik az egyes kompozitok viselkedését ([2],[4]).

A rétegelt, szálerősítésű kompozitok terhelhetőségének meghatározása az anyagjellemzőkhöz hasonló módon a réteg természetes koordináta-rendszerében történik. Természetesen ezek a jellemző mennyiségek is iránytól függőek (szálak irányában és arra merőlegesen), de értékeik különbözhetnek húzás és nyomás esetén.

### 4. 2. 1. A maximális feszültség

Ez a feltétel a réteg tönkremenetelét a réteg természetes koordináta-rendszerében a kitüntetett irányokban egyszerű kísérletekkel meghatározott feszültségi határokkal adja meg.

Vagyis a réteg terhelése a határérték alatt van, amikor a homogenizált anyagtulajdonságok segítségével számított feszültségekre igazak az alábbi egyenlőtlenségek:

$$\begin{aligned}
 \sigma_1^- &< \sigma_1 < \sigma_1^+ \\
 \sigma_2^- &< \sigma_2 < \sigma_2^+ \\
 |\tau_{12}| &< \tau_{12}^+ \\
 |\tau_{13}| &< \tau_{13}^+ \\
 |\tau_{23}| &< \tau_{23}^+
 \end{aligned}
 \tag{4.28}$$

ahol az  $x_1$  és  $x_2$  irányban  $\sigma_1^-$  és  $\sigma_2^-$  a nyomáshoz,  $\sigma_1^+$  és  $\sigma_2^+$  a húzáshoz tartozó értékek. A  $\tau_{12}^+$ ,  $\tau_{13}^+$  és  $\tau_{23}^+$  a csúsztatófeszültségek maximális értéke.

#### 4. 2. 2. A maximális alakváltozás

A kritérium azon a feltételezésen alapszik, hogy a réteg tönkremegy, ha a nyúlások vagy a szögtorzulások elérnek egy előre meghatározott értéket, azaz a terhelés nem érte el a kritikus értéket, ha a következő egyenlőtlenségek teljesülnek:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_1^- &< \varepsilon_1 < \varepsilon_1^+ \\
 \varepsilon_2^- &< \varepsilon_2 < \varepsilon_2^+ \\
 |\gamma_{12}| &< \gamma_{12}^+ \\
 |\gamma_{13}| &< \gamma_{13}^+ \\
 |\gamma_{23}| &< \gamma_{23}^+
 \end{aligned}
 \tag{4.29}$$

ahol az  $x_1$  és  $x_2$  irányokban a  $\varepsilon_1^-$ ,  $\varepsilon_2^-$ ,  $\varepsilon_1^+$  és  $\varepsilon_2^+$  a nyomáshoz illetve a húzáshoz tartozó megengedett maximális nyúlások,  $\gamma_{12}^+$ ,  $\gamma_{13}^+$  és  $\gamma_{23}^+$  a megengedett maximális szögtorzulások.

#### 4. 2. 3. Kvadratikus feltételek

A fentiekben bemutatott feltételek nem tartalmazznak olyan elemeket, melyek figyelembe veszik az egyes feszültség, vagy alakváltozási komponensek egymásra hatását. Hill [58] javasolta a Mises feltétel olyan bővítését, amely lehetővé teszi ennek alkalmazását ortotrop rétegek esetén is.

Háromdimenziós feszültségi állapothoz az anizotropia főtengelyeinek rendszerében a tönkremeneteli felület (folyási felület) az alábbi:

$$A(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + B(\sigma_1 - \sigma_3)^2 + C(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + 2D\tau_{12}^2 + 2E\tau_{13}^2 + 2F\tau_{23}^2 - 1 = 0, \quad (4.30)$$

ahol  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  és  $F$  kísérleti úton meghatározható értékek. A fenti gondolatmenet alkalmazása ortotrop rétegekre a rétegelt kompozitok esetében leggyakrabban használt feltétel, a Hill-Tsai kritérium [59]:

$$G = \frac{\sigma_1^2}{(\sigma_1^0)^2} - \frac{\sigma_1\sigma_2}{(\sigma_1^0)^2} + \frac{\sigma_2^2}{(\sigma_2^0)^2} + \frac{\tau_{12}^2}{(\tau_{12}^+)^2} + \frac{\tau_{13}^2}{(\tau_{13}^+)^2} + \frac{\tau_{23}^2}{(\tau_{23}^+)^2} - 1 \leq 0 \quad (4.31)$$

melyben  $\sigma_i^0$  vagy  $\sigma_i^+$ , vagy  $\sigma_i^-$  ( $i=1,2$ ) az igénybevételnek (húzás, nyomás) megfelelően.

## 5. Magasabb rendű modell a nyírási alakváltozás figyelembevételére

### 5.1. Az elmozdulásmező

A héj tetszőleges pontjának elmozdulását a középfelületen értelmezett természetes koordinátarendszerben közelítsük az alábbi módon:

$$\hat{u}(s, \varphi, z) = \hat{u}_0(s, \varphi) + \beta_0(s, \varphi)z + \beta^*(s, \varphi)z^2 + \beta^{**}(s, \varphi)z^3, \quad (5.1)$$

$$\hat{v}(s, \varphi, z) = \hat{v}_0(s, \varphi) + \theta_0(s, \varphi)z + \theta^*(s, \varphi)z^2 + \theta^{**}(s, \varphi)z^3, \quad (5.2)$$

$$\hat{w}(s, \varphi) = \hat{w}_0(s, \varphi), \quad (5.3)$$

ahol  $\hat{u}_0$ ,  $\hat{v}_0$  és  $\hat{w}_0$  jelöli a középfelület elmozdulását,  $\beta_0$  és  $\theta_0$  a középfelület normálisának elfordulása az  $s$  és  $\varphi$  tengelyek körül.  $\beta^*$ ,  $\beta^{**}$ ,  $\theta^*$  és  $\theta^{**}$  a magasabb rendű tagok az elmozdulás sorfejtésében.

Abból a tényből, hogy a héj palástján a csúsztató feszültségeknek el kell tűnniük, következik, hogy a megfelelő szögtorzulások értéke is zérus itt, vagyis ha

$$z = \pm \frac{h}{2}, \text{ akkor } \hat{\gamma}_{sz} = \hat{\gamma}_{z\varphi} = 0.$$

A fenti feltételeket az (3.12)-(3.13) kinematikai egyenletekbe helyettesítve az elmozdulásmező magasabb rendű tagjai ( $\beta^*$ ,  $\beta^{**}$ ,  $\theta^*$  és  $\theta^{**}$ ) kifejezhetők:

$$\beta^* = \frac{4}{24R_s^2 - h^2} \left( 2\beta_0 R_s - \frac{\partial \hat{w}_0}{\partial s} + \hat{u}_0 \right), \quad (5.4)$$

$$\beta^{**} = \frac{4}{(24R_s^2 - h^2)h^2} \left[ (h^2 - 8R_s^2)\beta_0 - 8\frac{\partial \hat{w}_0}{\partial s} R_s^2 + 8R_s \hat{u}_0 \right], \quad (5.5)$$

$$\theta^* = \frac{4 \cos \gamma}{24r^2 - h^2 \cos^2 \gamma} \left( \hat{v}_0 \cos \gamma + 2r\theta_0 - \frac{\partial \hat{w}_0}{\partial \varphi} \right), \quad (5.6)$$

$$\theta^{**} = \frac{4}{(24r^2 - h^2 \cos^2 \gamma)h^2} \left[ (h^2 \cos^2 \gamma - 8r^2)\theta_0 - 8r \frac{\partial \hat{w}_0}{\partial \varphi} + 8r\hat{v}_0 \cos \gamma \right]. \quad (5.7)$$

Így az elmozdulásmező közelítése a következő alakot ölti:

$$\hat{u}(s, \varphi, z) = A(s, z) \hat{u}_0(s, \varphi) + B(s, z) \beta_0(s, \varphi) + C(s, z) \frac{\partial \hat{w}_0(s, \varphi)}{\partial s}, \quad (5.8)$$

$$\hat{v}(s, \varphi, z) = D(s, z) \hat{v}_0(s, \varphi) + E(s, z) \theta_0(s, \varphi) + F(s, z) \frac{\partial \hat{w}_0(s, \varphi)}{\partial \varphi}, \quad (5.9)$$

$$\hat{w}(s, \varphi) = \hat{w}_0(s, \varphi), \quad (5.10)$$

melyben

$$A(s, z) = 1 + \frac{4z^2}{24R_s^2 - h^2} + \frac{32R_s z^3}{(24R_s^2 - h^2)h^2}, \quad (5.11)$$

$$B(s, z) = z + \frac{8R_s z^2}{24R_s^2 - h^2} - \frac{4(8R_s^2 - h^2)z^3}{(24R_s^2 - h^2)h^2}, \quad (5.12)$$

$$C(s, z) = -\frac{4R_s z^2}{24R_s^2 - h^2} - \frac{32R_s^2 z^3}{(24R_s^2 - h^2)h^2}, \quad (5.13)$$

$$D(s, z) = 1 + \frac{4z^2 \cos^2 \gamma}{24r^2 - h^2 \cos^2 \gamma} + \frac{32rz^3 \cos \gamma}{(24r^2 - h^2 \cos^2 \gamma)h^2}, \quad (5.14)$$

$$E(s, z) = z + \frac{8rz^2 \cos \gamma}{24r^2 - h^2 \cos^2 \gamma} - \frac{4(h^2 \cos^2 \gamma + 8r^2)z^3}{(24r^2 - h^2 \cos^2 \gamma)h^2}, \quad (5.15)$$

$$F(s, z) = -\frac{4z^2 \cos \gamma}{24r^2 - h^2 \cos^2 \gamma} - \frac{32rz^3}{(24r^2 - h^2 \cos^2 \gamma)h^2}. \quad (5.16)$$

A fenti összefüggésekben  $A = 1$ ,  $B = z$ ,  $C = 0$ ,  $D = 1$ ,  $E = z$  és  $F = 0$  helyettesítéssel az R-M modell adódik.

A (3.14)-(3.16) felhasználásával felírhatók a héj egy tetszőleges pontjának elmozdulás koordinátái a globális koordináta-rendszerben:

$$u(s, \varphi, z) = u_0(s, \varphi) + C \frac{\partial u_0(s, \varphi)}{\partial s} \sin \gamma \cos \gamma + C \frac{\partial w_0(s, \varphi)}{\partial s} \sin^2 \gamma + B \beta_0(s, \varphi) \sin \gamma \quad (5.17)$$

$$w(s, \varphi, z) = w_0(s, \varphi) - C \frac{\partial u_0(s, \varphi)}{\partial s} \cos^2 \gamma - C \frac{\partial w_0(s, \varphi)}{\partial s} \sin \gamma \cos \gamma - B \beta_0(s, \varphi) \cos \gamma \quad (5.18)$$

$$v(s, \varphi, z) = D v_0(s, \varphi) + F \frac{\partial u_0(s, \varphi)}{\partial s} \cos \gamma + F \frac{\partial w_0(s, \varphi)}{\partial s} \sin \gamma + E \theta_0(s, \varphi) \quad (5.19)$$

## 5. 2. A végeelem geometriai jellemzői

Forgáshéjak végeelemes szerkezeti vizsgálatához szükséges a szerkezet felosztása csomópontjaiknál csatlakozó gyűrű elemekre (5.1. ábra). A vizsgálatok során a forgásszimmetriából következően elegendő a meridiángörbe geometriai viszonyait elemezni. A geometriát a meridiángörbén lévő csomópontok helyzete határozza meg. A forgásszimmetrikus héjelem geometriai jellemzőinek meghatározása az [55] alapján a rétegek figyelembevételével az alábbi módon történik.

A meridiángörbe a csomópontok globális koordináta-rendszerben felírt koordinátái segítségével:

$$\mathbf{r}(\xi) = \sum_{i=1}^3 N_i(\xi) r_i \mathbf{e}_r + \sum_{i=1}^3 N_i(\xi) Z_i \mathbf{e}_z \quad (5.20)$$

ahol  $N_i$  az izoparametrikus elemek esetén alkalmazott ([56]) alakfüggvényeket jelenti:

$$N_1 = \frac{\xi(\xi-1)}{2}, \quad N_2 = 1 - \xi^2, \quad N_3 = \frac{\xi(\xi+1)}{2}, \quad (5.21)$$

és  $\xi$  ( $-1 \leq \xi \leq 1$ ) az elem lokális koordinátája a meridián mentén.

A héj vastagságának közelítésére szintén a fenti alakfüggvényeket alkalmazva adódik:

$$h(\xi) = \sum_{i=1}^3 N_i(\xi) h_i \quad (5.22)$$

A meridiángörbe érintője és normálisa:

$$\mathbf{t} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} r_i \mathbf{e}_r + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} Z_i \mathbf{e}_z, \quad (5.23)$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{t} \times \mathbf{e}_\varphi = -\sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} Z_i \mathbf{e}_r + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} r_i \mathbf{e}_z. \quad (5.24)$$

A meridiángörbe normálisának vetületeiből a  $\gamma$  szög sinusa és cosinusa is meghatározható:

$$\sin \gamma = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} r_i, \quad (5.25)$$

$$\cos \gamma = -\frac{1}{t} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} Z_i, \quad (5.26)$$

ahol

$$t = \sqrt{\left( \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} r_i \right)^2 + \left( \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} Z_i \right)^2}.$$

A  $\bar{h}^{k-1}$  és a  $\bar{h}^k$  normálkoordinátájú felületekkel határolt  $k$ -dik réteg tetszőleges pontjának koordinátái a globális koordinátarendszerben:

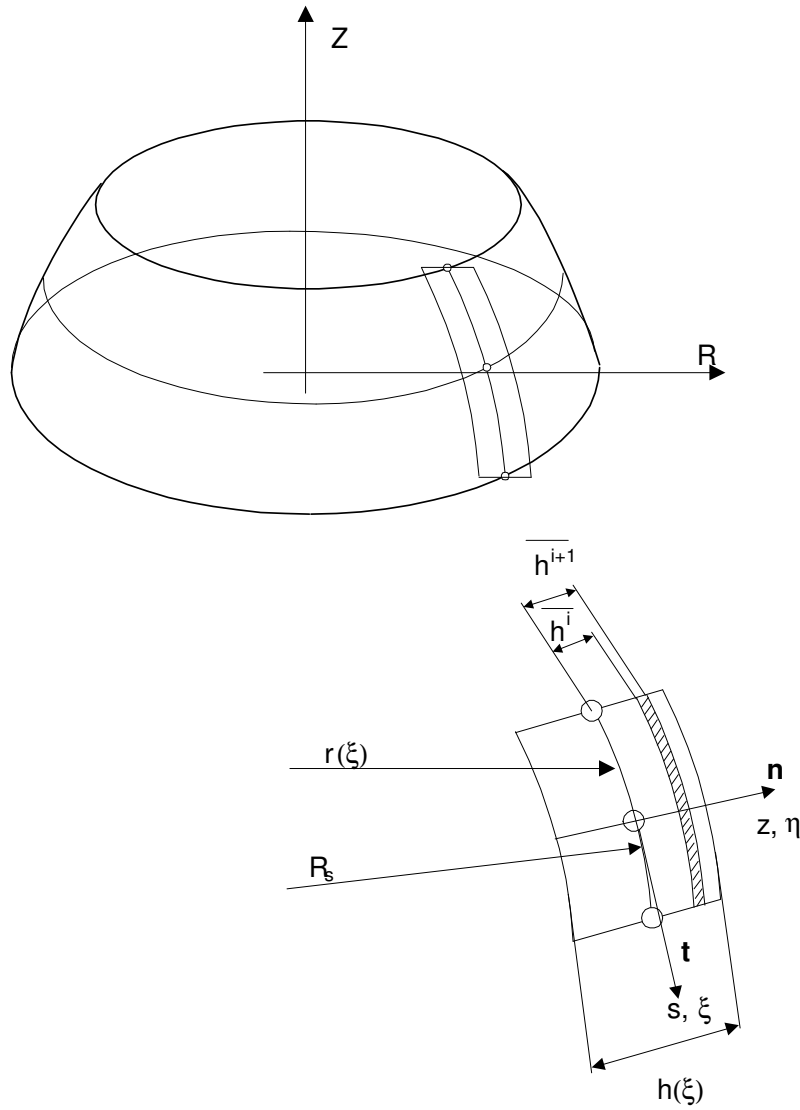
$$r(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^3 N_i(\xi) r_i - \frac{\sum_{i=1}^3 N_i(\xi) h_i}{t} \left[ \frac{h^k + h^{k-1}}{2} + \eta \frac{h^k - h^{k-1}}{2} \right] \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} Z_i \quad (5.27)$$

$$Z(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^3 N_i(\xi) Z_i + \frac{\sum_{i=1}^3 N_i(\xi) h_i}{t} \left[ \frac{h^k + h^{k-1}}{2} + \eta \frac{h^k - h^{k-1}}{2} \right] \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} r_i \quad (5.28)$$

ahol

$$h^{k-1} = \frac{\bar{h}^{k-1}}{\sum_{i=1}^3 N_i(\xi) h_i} \quad \text{és} \quad h^k = \frac{\bar{h}^k}{\sum_{i=1}^3 N_i(\xi) h_i}, \quad (5.29)$$

és  $\eta$  ( $-1 \leq \eta \leq 1$ ) az elem lokális koordinátája a rétegben normál irányban.



5.1. ábra. A gyűrűelem geometriai jellemzői

A globális koordináták és az elem normalizált koordinátái közötti leképezés Jacobi mátrixa a meridián görbén ( $\eta = 0$ ),

$$\mathbf{J}^k(\xi) = \begin{bmatrix} t \sin \gamma & -t \cos \gamma \\ \frac{h^k - h^{k-1}}{2} \cos \gamma \sum_{i=1}^3 N_i(\xi) h_i & \frac{h^k - h^{k-1}}{2} \sin \gamma \sum_{i=1}^3 N_i(\xi) h_i \end{bmatrix}, \quad (5.30)$$



ennek determinánsa,

$$\det(\mathbf{J}^k) = t \frac{h^k - h^{k-1}}{2} \sum_{i=1}^3 N_i(\xi) h_i. \quad (5.31)$$

Az elem  $h^{k-1}$  és  $h^k$  felületek által határolt réteg normalizált koordinátái és a forgáshéj középfelületén értelmezett koordináták közötti összefüggés a következő:

$$s = t \xi \quad (5.32)$$

$$z = \left[ \frac{h^k + h^{k-1}}{2} + \eta \frac{h^k - h^{k-1}}{2} \right] \sum_{i=1}^3 N_i(\xi) h_i \quad (5.33)$$

Az elem csomópontjának koordinátái segítségével az elem mentén állandó görbületi sugara meghatározható ( $R_s$ ) (lásd Függelék A).

### 5. 3. Az elmozdulásmező közelítése

Az elmozdulásmező leírását a végeelemes közelítés és a Fourier-sorfejtés összekapcsolt használata jellemzi. A paralel irányú elmozdulások közelítésére alkalmazott Fourier-sorok trigonometrikus függvényeinek ortogonális tulajdonságai révén a háromdimenziós feladat szétesik egymástól függetlenül megoldható egyenletrendszerek sorozatára.

A forgáshéj középfelületén értelmezett radiális irányú elmozduláskoordináták közelítése a paralel körök mentén:

$$u_0(s, \varphi) = \sum_n (u_n^c(s) \cos n\varphi + u_n^s(s) \sin n\varphi) \quad (5.34)$$

Hasonlóan közelítve a sor  $n$ -dik tagjához tartozó ismeretlenek vektora (a három elmozduláskoordináta, valamint  $\beta_0$  és  $\theta_0$ ) a globális  $(R, Z)$  koordináta-rendszerben:

$$\mathbf{u}_{0n}^T = [u_n^c \quad u_n^s \quad v_n^c \quad v_n^s \quad w_n^c \quad w_n^s \quad \beta_n^c \quad \beta_n^s \quad \theta_n^c \quad \theta_n^s], \quad (5.35)$$

ahol a  $c$  és  $s$  index jelöli, hogy az ismeretlen a Fourier-sorfejtésben, mely trigonometrikus taghoz tartozik.

Az elmozdulásmező  $u_n^c$  koordinátájának a közelítése a meridiángörbe mentén a  $p$  verziós végeleemes technikának megfelelően:

$$u_n^c = \sum_{i=1}^{p+1} \phi_i(\xi) u_{n|i}^c . \quad (5.36)$$

ahol  $p$  ( $p \geq 1$ ) a közelítés fokszámát határozza meg,  $\phi_i(\xi)$  az alakfüggvény (lásd függelék B), és  $u_{n|i}^c$  az  $i$ -edik alakfüggvény együtthatója.

A fentiekhez hasonlóan a (5.35) vektor minden eleme előállítható. Tömören felírva a vektor elemeinek közelítését:

$$\mathbf{u}_n(\xi) = \mathbf{N}(\xi) \mathbf{q}_n . \quad (5.37)$$

melyben

$$\mathbf{q}_n^T = \left[ u_{n|1}^c \quad u_{n|1}^s \quad v_{n|1}^c \quad v_{n|1}^s \quad w_{n|1}^c \quad w_{n|1}^s \quad \beta_{n|1}^c \quad \beta_{n|1}^s \quad \theta_{n|1}^c \quad \theta_{n|1}^s \quad \cdots \quad u_{n|p+1}^c \cdots \theta_{n|p+1}^s \right]$$

Az ismeretlenek fenti approximációját az (5.17)-(5.19) elmozdulásmezőbe helyettesítve felírhatók a (3.9)-(3.13) kinematikai egyenletek. A szükséges matematikai átalakítások elvégzésére szimbolikus manipulátor ([60]) segítségével történt. A levezetett egyenleteket vektor-mátrix formalizmussal felírva:

$$\hat{\mathbf{e}}(\xi, \eta, \varphi) = \sum_{n=0}^N (\hat{\mathbf{e}}_n^c(\xi, \eta) \cos n\varphi + \hat{\mathbf{e}}_n^s(\xi, \eta) \sin n\varphi) \quad (5.38)$$

ahol

$$\hat{\mathbf{e}}_n^c(\xi, \eta) = \mathbf{B}_n^c(\xi, \eta) \mathbf{q}_n \quad (5.39)$$

$$\hat{\mathbf{e}}_n^s(\xi, \eta) = \mathbf{B}_n^s(\xi, \eta) \mathbf{q}_n \quad (5.40)$$

melyben szereplő  $\mathbf{B}_n^c(\xi, \eta)$  és  $\mathbf{B}_n^s(\xi, \eta)$  mátrixok részletes ismertetése a függelék C-ben található. A szimbolikus manipulátor alkalmazásával mód nyílt arra, hogy az előállított összefüggések közvetlenül C programnyelven íródjanak, és így program kódba illeszthetők

([61],[62]).

## 5. 4. Alakváltozási energia, variációs elv, egyensúlyi egyenlet

### 5. 4. 1 Alakváltozási energia

Az egyensúlyi egyenlet előállításához szükséges a forgáshéj alakváltozási energiájának és a külső erőrendszer munkájának a meghatározása. Az  $L$  rétegből álló gyűrű elem alakváltozási energiája a (4.18.)-at is felhasználva:

$$\Lambda = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^L \int_0^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \hat{\boldsymbol{\epsilon}} \mathbf{D}^k \hat{\boldsymbol{\epsilon}} \det(\mathbf{J}^k) d\xi d\eta d\varphi. \quad (5.41)$$

A fenti kifejezésbe behelyettesítve az (5.38), (5.39) és az (5.40) egyenletet, felhasználva a trigonometrikus függvények ortogonális tulajdonságait az alakváltozási energia a következő:

$$\Lambda = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N \mathbf{q}_n^T \mathbf{K}_n \mathbf{q}_n \quad (5.42)$$

ahol  $\mathbf{K}_n$  a Fourier-sor  $n$ -dik tagjához tartozó merevségi mátrix:

$$\mathbf{K}_n = \delta_n^c \sum_{k=1}^L \int_0^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_n^{cT} \mathbf{D}^k \mathbf{B}_n^c \det(\mathbf{J}^k) rd\xi d\eta + \delta_n^s \sum_{k=1}^L \int_0^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_n^{sT} \mathbf{D}^k \mathbf{B}_n^s \det(\mathbf{J}^k) rd\xi d\eta, \quad (5.43)$$

melyben

$$\delta_n^c = \begin{cases} 2\pi & \text{ha } n = 0 \\ \pi & \text{ha } n \neq 0 \end{cases}, \quad \delta_n^s = \begin{cases} 0 & \text{ha } n = 0 \\ \pi & \text{ha } n \neq 0 \end{cases}.$$

A merevségi mátrix elemeinek numerikus előállítása érdekében az integrálások Gauss-féle kvadratúra segítségével történnek.

Külön figyelmet érdekel az  $n = 0$  eset, ez forgásszimmetrikus alakváltozást és ezzel - az ortotrop rétegek tulajdonságának köszönhetően - összekapcsolt csavarási feladatot jelenti.

Az (5.43) kifejezés második tagja zérus, ekkor a  $s$  indexű mennyiségek nem hordoznak fizikai tartalmat, ezért a hozzájuk tartozó sorokat és oszlopokat eliminálni kell.

#### 5. 4. 2. A külső erők munkája

Feltételezzük, hogy a külső terhelés középfelületre redukált vektorkettőse ismert. Ha a (5.11)-(5.16) összefüggésekben a  $z$ -ben magasabb rendű tagokat elhanyagoljuk, figyelembe véve, hogy a héj más méreteivel összehasonlítva vékony, azaz az elmozdulás mező közelítésében  $A = 1$ ,  $B = z$ ,  $C = 0$ ,  $D = 1$ ,  $E = z$  és  $F = 0$ , akkor a külső erőrendszer munkája a középfelületen felírt mennyiségekkel egy elemen a következő:

$$W = \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} (u_0 F_r + w_0 F_z + v_0 F_\varphi + \beta_0 M_\varphi + \theta_0 M_s) r t d\varphi d\xi, \quad (5.44)$$

ahol  $F_r(s, \varphi)$ ,  $F_z(s, \varphi)$ ,  $F_\varphi(s, \varphi)$ ,  $M_\varphi(s, \varphi)$  és  $M_s(s, \varphi)$  a külső erőrendszer közép-felületre redukált vektorkettősenek koordinátái.

Feltételezzük, hogy a külső erőrendszer redukált vektorkettőse is Fourier-sorba fejthető a  $\varphi$  koordináta mentén

$$F_r(s, \varphi) = \sum_{n=0}^N (F_{r|n}^c \cos n\varphi + F_{r|n}^s \sin n\varphi). \quad (5.45)$$

Az amplitúdóknál az  $n$  index jelöli az  $n$ -dik tagot. Tömör formában a külső erők munkájára következő összefüggés adódik:

$$W = \mathbf{q}_n^T \mathbf{f}_n, \quad (5.46)$$

ahol

$$\mathbf{f}_n^T = \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T(\xi) \left[ \begin{array}{cccccc} \delta_n^c F_{r|n}^c & \delta_n^s F_{r|n}^s & \delta_n^c F_{\varphi|n}^c & \delta_n^s F_{\varphi|n}^s & \delta_n^c F_{Z|n}^c & \delta_n^s F_{Z|n}^s \\ \delta_n^c M_{\varphi|n}^c & \delta_n^s M_{\varphi|n}^s & \delta_n^c M_{s|n}^c & \delta_n^s M_{s|n}^s \end{array} \right] r t d\xi \quad (5.47)$$

#### 5. 4. 3. Az egyensúlyi egyenlet

A szerkezet teljes potenciális energiája az alakváltozási energia és a külső erők munkájának ismeretében felírható:

$$\Pi_p^\Sigma = \Lambda^\Sigma - W^\Sigma. \quad (5.48)$$

A diszkrétizált mennyiségeket helyettesítésével a végelelemes összeszerelés után a fenti funkcionál az alábbi alakot ölti:

$$\Pi_p^\Sigma = \sum_{n=0}^N \left( \frac{1}{2} \mathbf{q}_n^{\Sigma T} \mathbf{K}_n^\Sigma \mathbf{q}_n^\Sigma - \mathbf{q}_n^{\Sigma T} \mathbf{f}_n^\Sigma \right). \quad (5.49)$$

Felhasználva a funkcionál szélsőértékének szükséges feltételét, az egyensúlyi egyenleteknek sorozata adódik, melynek  $n$ -dik tagja:

$$\mathbf{K}_n^\Sigma \mathbf{q}_n^\Sigma = \mathbf{f}_n^\Sigma. \quad (5.50)$$

#### 5. 4. 4. A peremfeltételekről

Az (5.11)-(5.16) összefüggésekben a  $z$ -ben magasabb rendű tagokat elhanyagolva ( $A=1$ ,  $B=z$ ,  $C=0$ ,  $D=1$ ,  $E=z$  és  $F=0$ ) a peremfeltételek az R-M héjmodellhez hasonlóan kezelhetők ([54]). A peremen vagy a külső erőrendszer vektorkettősének koordinátáira, vagy az elmozduláskoordinátákra lehet előírást tenni. A leggyakoribb esetek:

1. Szabad perem:  $F_r = F_z = F_\varphi = M_\varphi = M_s = 0$ ,
2. Befalazás:  $u_0 = w_0 = v_0 = \beta_0 = \theta_0 = 0$ ,
3. Csukló:  $u_0 = v_0 = w_0 = \theta_0 = M_\varphi = M_s = 0$ .

## 6. Érzékenységi vizsgálat

A hatékony optimalizálási módszerek megkívánják a célfüggvény és az alkalmazott feltételek érzékenységének, vagy az un. érzékenységi gradiensnek a meghatározását a tervezési paraméter változásakor, vagyis a célfüggvény és a feltételek tervezési paraméterek szerinti parciális deriváltjainak számítását.

Diszkrét gradiens esetén a mechanikai rendszer diszkrétizált modelljéhez tartozó egyenletrendszert kell a tervezési paraméterek, jelen esetben a héj csomópontbeli vastagsága illetve a csomópontok sugár irányú koordinátái szerint differenciálni.

### 6. 1. A végelem geometriai jellemzőinek tervezési paraméter szerinti deriváltjai

A továbbiakban vizsgáljuk meg néhány, elemre vonatkozó alapösszefüggés deriváltját, ha a tervezési paraméter a csomópont  $r_j$  sugár koordinátája. A  $j$  index a csomópont lokális, elemen belüli számozására utal.

A héj  $k$ -dik rétegében egy tetszőleges pont koordinátái a (5.27)-(5.28) szerint adóttak.

Ezek deriváltjai:

$$\frac{\partial r}{\partial r_j} = N_j(\xi) + \frac{\partial t}{\partial r_j} \frac{\sum_{i=1}^3 N_i(\xi) h_i}{t^2} \left[ \frac{h^k + h^{k-1}}{2} + \eta \frac{h^k - h^{k-1}}{2} \right] \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} Z_i, \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial r_j} = \frac{\sum_{i=1}^3 N_i(\xi) h_i}{t} \left[ \frac{h^k + h^{k-1}}{2} + \eta \frac{h^k - h^{k-1}}{2} \right] \frac{\partial N_j}{\partial \xi} + \quad (6.2)$$

$$- \frac{\partial t}{\partial r_j} \frac{\sum_{i=1}^3 N_i(\xi) h_i}{t^2} \left[ \frac{h^k + h^{k-1}}{2} + \eta \frac{h^k - h^{k-1}}{2} \right] \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} r_i,$$

ahol az érintő vektor hosszának változása:

$$\frac{\partial t}{\partial r_j} = \frac{N_j(\xi) \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} r_i}{t}. \quad (6.3)$$

Hasonlóan a meridiángörbe normálisainak vetületeiből a  $\gamma$  szög sinusának és cosinusának differenciáljai:

$$\frac{\partial \sin \gamma}{\partial r_j} = \frac{1}{t} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} - \frac{\partial t}{\partial r_j} \frac{1}{t^2} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} r_i, \quad (6.4)$$

$$\frac{\partial \cos \gamma}{\partial r_j} = \frac{\partial t}{\partial r_j} \frac{1}{t^2} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} Z_i. \quad (6.5)$$

A globális koordináták és az elem normalizált koordinátái közötti leképezés Jacobi mátrixának determinánása:

$$\frac{\partial \det(\mathbf{J}^k)}{\partial r_j} = \frac{\partial t}{\partial r_j} \frac{h^k - h^{k-1}}{2} \sum_{i=1}^3 N_i(\xi) h_i. \quad (6.6)$$

Abban az esetben, ha a tervezési paraméter a héj vastagsága  $h_i$  az  $i$  jelű csomópontban, a fenti mennyiségek differenciáljai:

$$\frac{\partial h}{\partial h_j} = N_j(\xi) \quad (6.7)$$

$$\frac{\partial r}{\partial h_j} = -\frac{N_j(\xi)}{t} \left[ \frac{h^k + h^{k-1}}{2} + \eta \frac{h^k - h^{k-1}}{2} \right] \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} Z_i, \quad (6.8)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial h_j} = \frac{N_j(\xi)}{t} \left[ \frac{h^k + h^{k-1}}{2} + \eta \frac{h^k - h^{k-1}}{2} \right] \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} r_i, \quad (6.9)$$

$$\frac{\partial \det(\mathbf{J})}{\partial h_j} = t \frac{h^k - h^{k-1}}{2} N_j(\xi). \quad (6.10)$$

## 6. 2. A térfogat érzékenysége

A héj térfogata az egyes elemek térfogatának összegzésével számítható, azaz:

$$V^\Sigma = \sum_{e=1}^M \sum_{k=1}^L \left[ 2\pi \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 r \det(\mathbf{J}^k) d\xi d\eta \right]^e, \quad (6.11)$$

ahol  $M$  az elemek száma.

A továbbiakban a tervezési paramétert  $\tau_i$ -val jelöljük, adott esetben helyére vagy az  $i$ -dik csomópont sugár koordinátáját, vagy a csomópontban a héj vastagságát kell érteni. Az  $I$  index a csomópont globális sorszáma utal. A héj térfogatának érzékenysége:

$$\frac{\partial V^\Sigma}{\partial \tau_i} = \sum_e \sum_{k=1}^L 2\pi \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[ \frac{\partial r}{\partial \tau_i} \det(\mathbf{J}^k) + r \frac{\partial \det(\mathbf{J}^k)}{\partial \tau_i} \right]^e d\xi d\eta. \quad (6.12)$$

Az összegzést azokra az elemekre kell elvégezni, amelyek tartalmazzák azt a csomópontot, melyekhez a tervezési paraméter tartozik. Az  $i$  index felveszi mindazon értékeket, amelyek a globális rendszerben  $I$ -vel jelölt ponthoz a lokális számozásban tartoznak.

## 6. 3. Az elmozdulásmező érzékenysége

Az elmozdulásmező vizsgálatához az egyensúlyi egyenletek sorozatának minden tagját differenciálni kell a tervezési paraméterek szerint. Az  $n$ -dik tag esetén:

$$\frac{\partial \mathbf{K}_n^\Sigma}{\partial \tau_i} \mathbf{q}_n^\Sigma + \mathbf{K}_n^\Sigma \frac{\partial \mathbf{q}_n^\Sigma}{\partial \tau_i} = \frac{\partial \mathbf{f}_n^\Sigma}{\partial \tau_i}. \quad (6.13)$$

A fenti összefüggésből az elmozdulásmező deriváltja a

$$\mathbf{K}_n^\Sigma \frac{\partial \mathbf{q}_n^\Sigma}{\partial \tau_i} = \mathbf{f}_n^*, \quad (6.14)$$

lineáris egyenletrendszer megoldásával számítható, ahol

$$\mathbf{f}_n^* = \frac{\partial \mathbf{f}_n^\Sigma}{\partial \tau_i} - \frac{\partial \mathbf{K}_n^\Sigma}{\partial \tau_i} \mathbf{q}_n^\Sigma. \quad (6.15)$$



Az (6.15) kifejezés jobb oldalán álló tagok előállítására az elemek szintjén, az alábbi módon történik:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{K}_n}{\partial \tau_i} = & \delta^c \sum_{k=1}^L \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[ \frac{\partial \mathbf{B}_n^{cT}}{\partial \tau_i} \mathbf{D}^k \mathbf{B}_n^c r \det(\mathbf{J}^k) + \mathbf{B}_n^{cT} \mathbf{D}^k \frac{\partial \mathbf{B}_n^c}{\partial \tau_i} r \det(\mathbf{J}^k) + \right. \\
& \left. + \mathbf{B}_n^{cT} \mathbf{D}^k \mathbf{B}_n^c \frac{\partial r}{\partial \tau_i} \det(\mathbf{J}^k) + \mathbf{B}_n^{cT} \mathbf{D}^k \mathbf{B}_n^c r \frac{\partial \det(\mathbf{J}^k)}{\partial \tau_i} \right] + \\
& + \delta^s \sum_{k=1}^L \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[ \frac{\partial \mathbf{B}_n^{sT}}{\partial \tau_i} \mathbf{D}^k \mathbf{B}_n^s r \det(\mathbf{J}^k) + \mathbf{B}_n^{sT} \mathbf{D}^k \frac{\partial \mathbf{B}_n^s}{\partial \tau_i} r \det(\mathbf{J}^k) + \right. \\
& \left. + \mathbf{B}_n^{sT} \mathbf{D}^k \mathbf{B}_n^s \frac{\partial r}{\partial \tau_i} \det(\mathbf{J}^k) + \mathbf{B}_n^{sT} \mathbf{D}^k \mathbf{B}_n^s r \frac{\partial \det(\mathbf{J}^k)}{\partial \tau_i} \right].
\end{aligned} \tag{6.16}$$

A differenciálás után a mátrix összeszerelése a merevségi mátrixhoz hasonlóan történik. Természtésen azokhoz az elemekhez tartozó részek, amelyek nem tartalmazzák azt a csomópontot, amelyben a tervezési paraméter értelmezett, zérusok. A  $\frac{\partial \mathbf{B}_n^c}{\partial \tau_i}$  és a  $\frac{\partial \mathbf{B}_n^s}{\partial \tau_i}$  mátrixok a függelék C-ben megtalálhatók mindkét esetre, ha  $\tau_i$  a csomóponti vastagság illetve a csomópont sugár koordinátája.

A tehervektor értékeinek differenciálásánál figyelembe kell venni a külső erőrendszer függését a tervezési paramétereiktől,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{f}_n^T}{\partial \tau} = & \int_{-1}^1 \left\{ \mathbf{N}^T(\xi) \left[ \delta_n^c \frac{\partial F_{rln}^c}{\partial \tau_i} \quad \delta_n^s \frac{\partial F_{rln}^s}{\partial \tau_i} \quad \delta_n^c \frac{\partial F_{\phi ln}^c}{\partial \tau_i} \quad \delta_n^s \frac{\partial F_{\phi ln}^s}{\partial \tau_i} \quad \delta_n^c \frac{\partial F_{Zln}^c}{\partial \tau_i} \quad \delta_n^s \frac{\partial F_{Zln}^s}{\partial \tau_i} \right. \right. \\
& \left. \left. \delta_n^c \frac{\partial M_{\phi ln}^c}{\partial \tau_i} \quad \delta_n^s \frac{\partial M_{\phi ln}^s}{\partial \tau_i} \quad \delta_n^c \frac{\partial M_{sln}^c}{\partial \tau_i} \quad \delta_n^s \frac{\partial M_{sln}^s}{\partial \tau_i} \right] r t + \right. \\
& \left[ \delta_n^c F_{rln}^c \quad \delta_n^s F_{rln}^s \quad \delta_n^c F_{\phi ln}^c \quad \delta_n^s F_{\phi ln}^s \quad \delta_n^c F_{Zln}^c \quad \delta_n^s F_{Zln}^s \right. \\
& \left. \delta_n^c M_{\phi ln}^c \quad \delta_n^s M_{\phi ln}^s \quad \delta_n^c M_{sln}^c \quad \delta_n^s M_{sln}^s \right] \left( \frac{\partial r}{\partial \tau_i} t + r \frac{\partial t}{\partial \tau_i} \right) \Big\} d\xi.
\end{aligned} \tag{6.17}$$

#### 5. 4. A feszültségek érzékenysége

A feszültségi tenzor koordinátáinak Fourier-együtthatói az  $n$ -dik tag esetén a héj természetes koordináta-rendszerében a  $k$ -dik réteg tetszőleges pontjában:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_n^c(\xi, \eta) = \mathbf{D}^k \mathbf{B}_n^c(\xi, \eta) \mathbf{q}_n, \quad (6.18)$$

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_n^s(\xi, \eta) = \mathbf{D}^k \mathbf{B}_n^s(\xi, \eta) \mathbf{q}_n. \quad (6.19)$$

Az elmozdulásmező érzékenységének a birtokában a fenti összefüggéseket differenciálva a feszültségek érzékenysége az alábbi módon számítható:

$$\frac{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}_n^c}{\partial \tau_l} = \mathbf{D}^k \frac{\partial \mathbf{B}_n^c}{\partial \tau_l} \mathbf{q}_n + \mathbf{D}^k \mathbf{B}_n^c \frac{\partial \mathbf{q}_n}{\partial \tau_l}, \quad (6.20)$$

$$\frac{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}_n^s}{\partial \tau_l} = \mathbf{D}^k \frac{\partial \mathbf{B}_n^s}{\partial \tau_l} \mathbf{q}_n + \mathbf{D}^k \mathbf{B}_n^s \frac{\partial \mathbf{q}_n}{\partial \tau_l}, \quad (6.21)$$

ahol a  $\mathbf{D}^k \frac{\partial \mathbf{B}_n^c}{\partial \tau_l} \mathbf{q}_n$  és a  $\mathbf{D}^k \frac{\partial \mathbf{B}_n^s}{\partial \tau_l} \mathbf{q}_n$  kifejezések csak akkor különböznek zérustól, ha a

csomópont, amelyhez a tervezési paraméter tartozik, csomópontja az adott elemnek, amelyen a feszültség számítása történik.

#### 6. 5. Az alakváltozási energia érzékenysége

Az elem (5.42) szerinti alakváltozási energiájának érzékenysége a tervezési paraméterek szerinti deriválással állítható elő:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \tau_l} = \sum_{n=0}^N \left[ \mathbf{q}_n^{\Sigma T} \mathbf{K}_n^{\Sigma} \frac{\partial \mathbf{q}_n^{\Sigma}}{\partial \tau_l} + \frac{1}{2} \mathbf{q}_n^{\Sigma T} \frac{\partial \mathbf{K}_n^{\Sigma}}{\partial \tau_l} \mathbf{q}_n^{\Sigma} \right]. \quad (6.22)$$

Felhasználva az egyensúlyi egyenlet differenciálásával előállított (6.13) kifejezést az alábbi összefüggés adódik:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \tau_l} = \sum_{n=0}^N \left( \mathbf{q}_n^{\Sigma T} \frac{\partial \mathbf{f}_n^{\Sigma}}{\partial \tau_l} - \frac{1}{2} \mathbf{q}_n^{\Sigma T} \frac{\partial \mathbf{K}_n^{\Sigma}}{\partial \tau_l} \mathbf{q}_n^{\Sigma} \right). \quad (6.23)$$

## 6. 6. Spline-ok használata

Spline-ok segítségével mind a forgáshéj meridiángörbéje, mind a meridiángörbe menti vastagságeloszlás felírható. Így az optimalizálási feladatban szereplő tervezési paraméterek száma jelentősen csökkenthető, mert a csomópontok koordinátái vagy csomóponti vastagságok helyett elegendő a kontrollpontokat felhasználni. A csomópontok sugár koordinátái tetszőleges spline (a legelterjedtebb a B vagy Bezier spline) esetén a kontrollpontokat felhasználva ( $M_j$  vagy  $H_j$ ) az alábbi formában adható meg ([63],[64]):

$$r_l = \sum_{j=1}^{Z_r} S_{lj}^r M_j . \quad (6.24)$$

A csomóponti vastagságok:

$$h_l = \sum_{j=1}^{Z_h} S_{lj}^h H_j , \quad (6.25)$$

ahol  $S_{lj}^r$  és  $S_{lj}^h$  a spline-ok együttható mátrixai.

A spline valamely kontrollpontjait használva, mint tervezési paramétert az egyes mechanikai jellemzők érzékenysége vizsgálható. A tervezési paramétert  $T_j$ -vel jelölve (vagy a sugár koordinátákat vagy a vastagságot meghatározó spline kontrollpontjait) az elmozdulásmező érzékenysége:

$$\frac{\partial \mathbf{q}_n^\Sigma}{\partial T_j} = \sum_{l=1}^{N_p} \frac{\partial \mathbf{q}_n^\Sigma}{\partial \tau_l} \frac{\partial \tau_l}{T_j} = \sum_{l=1}^{N_p} \frac{\partial \mathbf{q}_n^\Sigma}{\partial \tau_l} S_{lj} , \quad (6.26)$$

ahol  $S_{lj}$  a tervezési paraméter megválasztásától függően  $S_{lj}^r$  vagy  $S_{lj}^h$ .

A fenti gondolatmenetet felhasználva (6.14) lineáris egyenletrendszerből az elmozdulásmező spline kontrollpont szerinti érzékenysége az alábbi egyenletrendszer megoldásával számítható:

$$\mathbf{K}_n^\Sigma \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial T_j} = \sum_{l=1}^{N_p} S_{lj} \left( \frac{\partial \mathbf{q}_n^\Sigma}{\partial \tau_l} - \frac{\partial \mathbf{K}_n^\Sigma}{\partial \tau_l} \mathbf{q}_n^\Sigma \right) . \quad (6.27)$$

Az elmozdulásmező érzékenységeinek birtokában a feszültségek spline kontrollpont szerinti érzékenysége is meghatározható:

$$\frac{\partial \hat{\sigma}_n^c}{\partial \Gamma_j} = \sum_{l=1}^{N_p} S_{lj} \mathbf{D}^k \frac{\partial \mathbf{B}_n^c}{\partial \tau_l} \mathbf{q}_n + \mathbf{D}^k \mathbf{B}_n^c \frac{\partial \mathbf{q}_n}{\partial \Gamma_j}, \quad (6.28)$$

$$\frac{\partial \hat{\sigma}_n^s}{\partial \Gamma_j} = \sum_{l=1}^{N_p} S_{lj} \mathbf{D}^k \frac{\partial \mathbf{B}_n^s}{\partial \tau_l} \mathbf{q}_n + \mathbf{D}^k \mathbf{B}_n^s \frac{\partial \mathbf{q}_n}{\partial \Gamma_j}, \quad (6.29)$$

### 6. 7. A tönkremeneteli kritérium érzékenysége

A feszültségek érzékenységeinek a meghatározása után a tönkremeneteli kritérium érzékenysége is számítható. Első lépésben a  $\mathbf{T}$  transzformációs mátrix segítségével a feszültségeket a réteg anyagtulajdonságainak főirányai által meghatározott koordináta-rendszerbe kell transzformálni, majd ezen értékekkel a Hill-Tsai kritérium érzékenysége:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \Gamma_j} = & \frac{2\sigma_1 - \sigma_2}{(\sigma_1^0)^2} \frac{\partial \sigma_1}{\partial \Gamma_j} + \left[ \frac{2\sigma_2}{(\sigma_2^0)^2} - \frac{\sigma_1}{(\sigma_1^0)^2} \right] \frac{\partial \sigma_2}{\partial \Gamma_j} + \frac{2\tau_{12}}{(\tau_{12}^+)^2} \frac{\partial \tau_{12}}{\partial \Gamma_j} + \\ & \frac{2\tau_{13}}{(\tau_{13}^+)^2} \frac{\partial \tau_{13}}{\partial \Gamma_j} + \frac{2\tau_{23}}{(\tau_{23}^+)^2} \frac{\partial \tau_{23}}{\partial \Gamma_j}. \end{aligned} \quad (6.30)$$

## **7. Optimalizálás**

### **7. 1. A célfüggvény**

A tervező számára az optimalizálási feladathoz szükséges egy kiválasztott skalár jellemző, amely alapján az egyes tervváltozatok összevethetők és numerikusan értékelhetők. Az optimalizálás sikerének elengedhetetlen feltétele, hogy a kiválasztott jellemző függjön a tervezési paramétereiktől, vagyis a tervezési paraméterek megváltoztatása hasson a kiválasztott jellemző értékére.

A tervezési folyamat célja a tervezési paraméterek értékének olyan megválasztása, hogy a kiválasztott jellemző a "legjobb" legyen. A kiválasztott jellemzőt  $f$  célfüggvénynek nevezzük. A továbbiakban a célfüggvényt mindig minimalizáljuk. Ha a feladat maximálás, akkor a célfüggvény az ellentettjével ( $-f$ ) helyettesíthető.

Az elkészült programrendszerben a célfüggvény a forgáshéj térfogata, vagy az alakváltozási energia lehet.

### **7. 2. Az optimalizálási feltételek**

A tervezendő szerkezettel szemben megfogalmazhatók olyan kritériumok, amelyeket vagy a szerkezet geometriájának, vagy terhelés alatt a mechanikai jellemzőknek teljesíteniük kell. A kritériumok két csoportra oszthatók. Az első csoport a határfeltételek, ami azt jelenti, hogy a tervezési paraméterek értékei csak egy előre meghatározott tartományon belül változhatnak.

A feltételek másik csoportját azok a kritériumok képezik, melyek a szerkezet mechanikai tulajdonságaira vonatkoznak, és csak a szerkezeti vizsgálatok elvégzése után értékelhetők ki. A programrendszerben ez a feltétel az, hogy az elmozdulások nem lehetnek nagyobbak egy adott értéknél.

A szerkezet tönkremenetelének megelőzésére Hill-Tsai kritérium került alkalmazásra.

### 7. 3. Az optimalizálási feladat megfogalmazása, megoldási módszerek

#### 7. 3. 1. Az általánosított optimalizálási feladat

Jelölje a  $\boldsymbol{\tau}^T = [\tau_1, \dots, \tau_{N_t}]$  az  $N_t$  tervezési paraméterből előállított vektort, és  $g_j(\boldsymbol{\tau})$   $j = 1 \dots N_f$  az  $N_f$  darab feltételi egyenlet. Ekkor az optimalizálási feladat:

$$\min f(\boldsymbol{\tau}) \quad (7.1)$$

$$g_j(\boldsymbol{\tau}) \leq 0 \quad j = 1 \dots N_f \quad (7.2)$$

$$\tau_i^a \leq \tau_i \leq \tau_i^f \quad i = 1 \dots N_i \quad (7.3)$$

A fenti feladat megoldására számos algoritmust dolgoztak ki ([65],[66]). Általános esetben, amikor sem a célfüggvény, sem a feltételek nemlineárisak, ezek az algoritmusok iteratív eljárások.

#### 7. 3. 2. Megoldási módszerek

Szekvenciális lineáris programozás esetén a nemlineáris feladatot a  $k$ -dik lépésben a tervezési paraméter szerint sorbafejtve és a magasabb rendű tagokat elhagyva lineáris programozási feladat adódik, amely feladat a simplex módszerrel ([67],[68]) megoldható.

A következőkben tárgyalt elsőrendű optimalizáló eljárások általánosított algoritmusai az alábbiakban foglalható össze:

1. A kezdeti paraméterek megválasztása  $\boldsymbol{\tau}^{(0)}$ .
2. A tervezési paraméterek terében egy irány ( $\mathbf{d}^k$ ) meghatározása, amely mentén a célfüggvény értéke csökken. Ez általában megkívánja a célfüggvény értékét és ezek tervezési paraméterek szerinti deriváltjait, a feltételek értékeit és ezek deriváltjait.

3. Az  $a^{(k)}$  lépéshossz meghatározását a  $\mathbf{d}^{(k)}$  irányú egyenes mentén.

4. A tervezési paraméterek számítása a következő lépéshez:

$$\boldsymbol{\tau}^{(k+1)} = \boldsymbol{\tau}^{(k)} + a^{(k)} \mathbf{d}^{(k)} \quad (7.4)$$

5. Konvergencia vizsgálata, ha nem teljesül,  $k=k+1$  és vissza a 2. lépéshez.

Az algoritmus 2. pontjában szereplő irány meghatározásának legegyszerűbb módja, ha azt a célfüggvény gradienséből származtatjuk, ez a gradiens módszer. Az irány számításához az előző lépés eredményeit felhasználja a konjugált gradiens módszer ([31]).

A feladat megoldására alkalmazható a szekvenciális kvadratikus programozás is. Ebben az esetben minden iterációs lépésben egy kvadratikus programozási feladatot kell megoldani ([69]).

A 3. pontban említett lépéshossz meghatározása egy egyváltozós optimalizálási feladat, melynek megoldására számos eljárás ismert. A leggyakrabban használt módszerek: polinom illesztés, az egyenlő intervallumok módszere és az arany metszés.

Az elkészült programrendszer a VMA Engineering által kifejlesztett programcsomagot ([34]) alkalmazza. A programcsomagban rendelkezésre álló eszközök közül (szekvenciális lineáris, kvadratikus programozás, és a módosított lehetséges irányok módszere) a példák megoldása során az un. módosított lehetséges irányok módszere bizonyult a legcélravezetőbbnek.

## 8. Összefoglalás

Az értekezés célkitűzése egy olyan magasabb rendű modell kidolgozása volt a vastagság mentén rétegelt, szálerősítésű, vékony, rugalmas kompozit forgáshéjakra, amely figyelembe veszi a középfelület normálisán lévő pontok normálisra merőleges elmozdulás koordinátáinak nemlineáris eloszlását. A gondolatmenet az alakváltozás linearizált elméletét és a rugalmas testek lineáris anyagegyenletét tételezi fel. Az elmozdulás- és alakváltozásmezőt leíró egyenletek előállítására és a differenciálások elvégzése szimbolikus manipulátor segítségével történt. Az előállított egyenletek szolgálnak alapjául a kifejlesztett, forgáshéj elemeket alkalmazó végesesemes kódnak, amely a geometria leírására elemenként három csomópontot alkalmaz és képes térbeli erőrendszerrel terhelt forgáshéjak statikai vizsgálatára. A kód tartalmazza az analitikus differenciálással előállított összefüggéseken alapuló, a tervezési paraméterek változásához tartozó érzékenységi vizsgálatok eljárásait is.

A értekezésben kidolgozott új tudományos eredmények a vékony, rugalmas forgáshéjak linearizált szilárdságtani elméletének feltételezésével a következők:

1. A lemezekre megfogalmazott magasabb rendű Reddy-féle modell általánosítása forgáshéjakra (a héj vastagsága mentén a pontok érintő irányú elmozdulásnak harmadfokú polinommal való közelítése). Az elmozdulásmezőben szereplő ismeretlenek számát az a dinamikai feltétel csökkenti, hogy a héj alsó és felső palástján a nyírásból származó csúsztató feszültség és alakváltozás zérus. A harmadfokú polinom alkalmazása kiküszöböli a Reissner-Mindlin-féle elméletben szereplő nyírási együttható alkalmazásának szükségességét.
2. A fenti elmozdulásmezőn alapuló, tetszőleges térbeli erőrendszerrel terhelt, szálerősítésű, rétegelt, vékony kompozit forgáshéjak statikai vizsgálatára alkalmas végesesemes eljárás kidolgozása. Az eljárás az elmozdulásmező közelítésére a



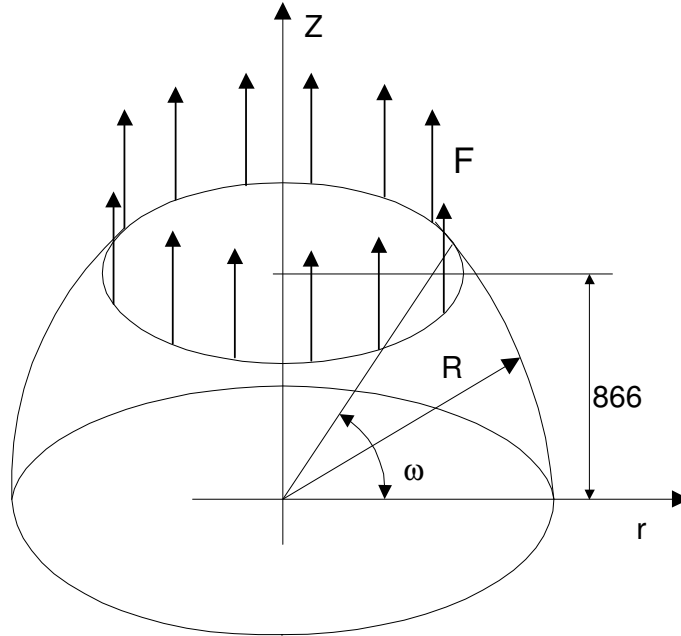
meridiángörbe mentén  $p$  verziós alakfüggvényeket, a paralell körök mentén Fourier-sorfejtést alkalmaz.

3. Algoritmus kidolgozása a végeelemes eljárás összefüggéseinek a tervezési paraméterek változásai iránti érzékenysége meghatározására szimbolikus manipulátort alkalmazásával.
4. Az egyes mechanikai jellemzőknek a spline-ok vezérpontjai változása iránti érzékenységének előállítása, ha a meridiángörge és a vastagság eloszlásának leírása spline-okkal történik. Ezzel a tervezési paraméterek számának jelentős csökkentése valósítható meg.
5. Programrendszer kifejlesztése a fenti végeelemes eljárás és érzékenységi vizsgálat alapján tetszőleges térbeli erőrendszerrel terhelt szálerősítésű, rétegelt, vékony kompozit forgáshéjak alakoptimalizálásra.

A kifejlesztett modell, végeelemes eljárás és algoritmus alapján kifejlesztett programrendszer alkalmazását a 9. fejezetben numerikus példákkal szemlélteti.

## 9. Példák

### 9. 1. 1. példa. Forgáshéj számítása



9.1. ábra Az 1. példa geometriája és terhelése

A 9.1. ábra három rétegű kompozit héj geometriáját és terhelését szemlélteti. A geometriát 11 csomópont, 5 végelem írja le.

Az anyagjellemzők:  $E_1=25 \text{ GPa}$ ,  $E_2=1 \text{ GPa}$ ,  $G_{12}=G_{13}=0.5 \text{ GPa}$ ,  $G_{23}=0.1 \text{ GPa}$ ,  $\nu_{12}=0.25$

A geometriai adatok:  $R=1000 \text{ mm}$ ,  $h=10 \text{ mm}$ ,  $\omega = 60^\circ$ . A rétegek:[0/90/0].

A terhelés:  $F=500 \text{ kN/m}$

A peremfeltétel: a  $Z=0$  helyen befalazás ( $u_0=v_0=w_0=\beta_0=\theta_0=0$ ),

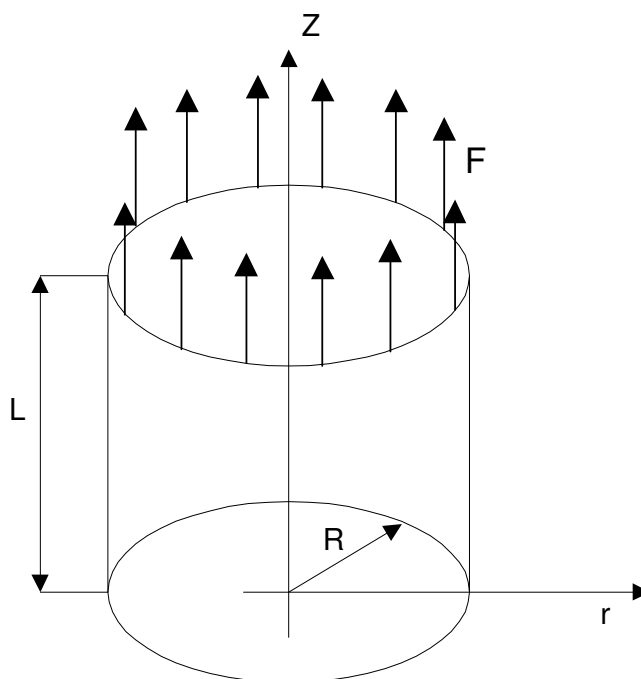
a  $Z=866 \text{ mm}$  helyen szabad perem, a 9.1. ábra szerint adott terheléssel.

A megoldás során az elmozdulásmezőt approximáló függvények fokszáma ( $p$ ) 1-től 8-ig változott. A 9.1. táblázat tartalmazza a felső paralell kör pontjainak axiális elmozdulás koordinátáját ( $w_0$ ) különböző  $p$  értékek esetén. A táblázat tartalmazza a R-M és az értekezésben bemutatott héjmodellel számított eredményeket.

9.1. táblázat

$w_0$ [mm]								
$p$	1	2	3	4	5	6	7	8
Jelen modell	44.43	70.60	74.95	78.05	79.84	81.13	81.35	81.75
R-M	33.91	68.06	73.34	75.77	78.09	79.10	79.40	79.42

**9. 2. 2. példa. A kapcsolt csavarási feladat**



9.2. ábra. A 2. példa geometriája és terhelése

A 9.2. ábrán látható, egyetlen rétegből álló henger geometriai adatai a következők:

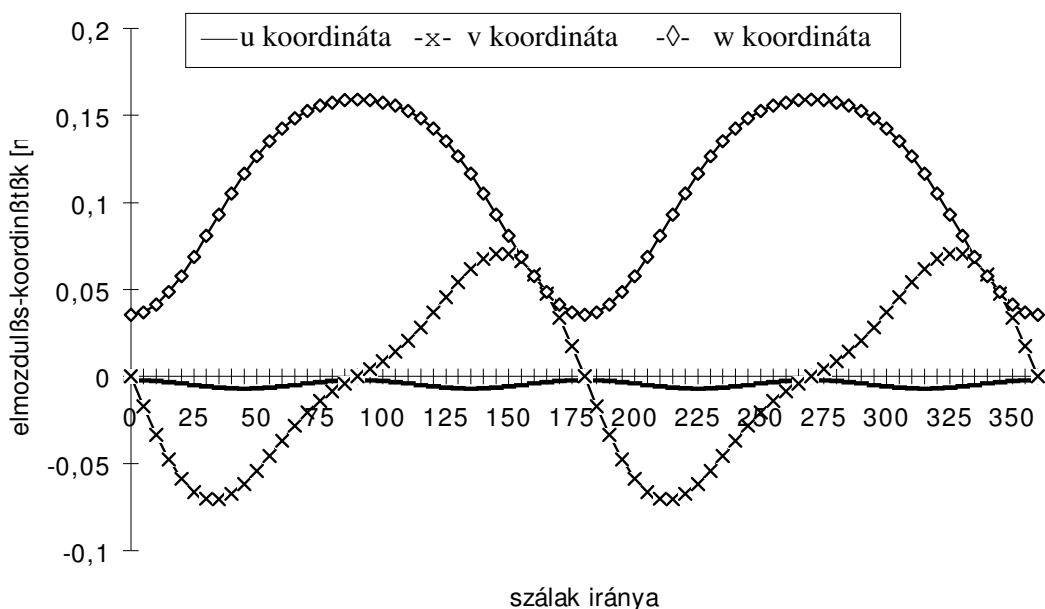
$L= 1000 \text{ mm}$ ,  $R= 250 \text{ mm}$ ,  $h= 5 \text{ mm}$ . Az erő:  $F= 6366 \text{ N/m}$ .

A kompozit héj anyagjellemzői:  $E_1 = 36 \text{ GPa}$ ,  $E_2 = 8 \text{ GPa}$ ,  $G_{12}= 4.4 \text{ GPa}$ ,  $G_{13}= 4 \text{ GPa}$ ,  $G_{23}= 4.4 \text{ GPa}$ ,  $\nu_{12}= 0.25$ .

Az alkalmazott peremfeltételek: a  $Z= 0$  helyen  $v_0 = w_0 = 0$ ,

a  $Z=L$  helyen szabad perem adott terheléssel.

A szálak irányát a feladat megoldása során  $0^0$  és  $360^0$  között változtatjuk. A számítások elvégzésére a geometriát 5 lineáris ( $p=1$ ) elem írja le. A 9.3. ábrán a  $Z=L$  koordinátájú pontok egyes elmozdulás koordinátái láthatók szálak irányának a függvényében.

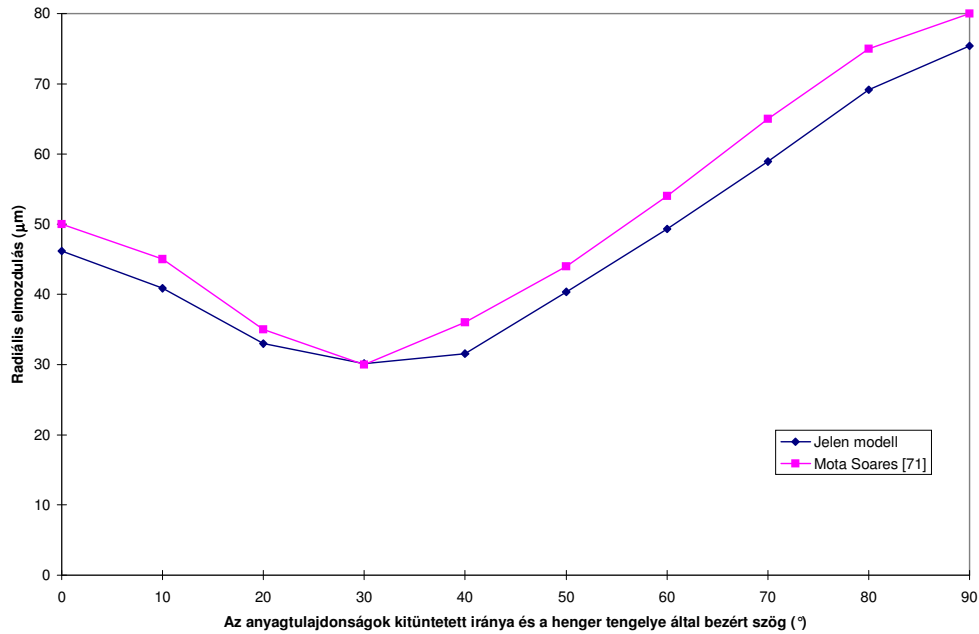


9.3. ábra. Az  $Z=L$  koordinátájú pontok elmozdulás-koordinátái a szálirány függvényében

### 9. 3. 3. példa. Nemforgásszimmetrikus terhelés

Vízszintes tengelyű folyadékkal (sűrűség:  $9800 \text{ N/m}^3$ ) töltött rétegelt kompozit tartály vizsgálatát ismerteti a [72] irodalom a diszkrét Kirschhoff hipotézisen alapuló háromszögelemek alkalmazásával, a geometria leírására 1920 elemet használtak és 5616 szabadságfokú feladatot oldottak meg. A tartály 2.5 m hosszú, 0.25 m sugarú henger. Az anyagtulajdonságok  $E_1=36 \text{ GPa}$ ,  $E_2=8 \text{ GPa}$ ,  $G_{12}=G_{13}=4.4 \text{ GPa}$ ,  $G_{23}=4 \text{ GPa}$ ,  $\nu_{12}=0.25$

A rétegrend  $[\alpha/\alpha/\alpha/\alpha/\alpha/\alpha/\alpha/\alpha/\alpha/\alpha/\alpha]$ . A számítások során az anyagtulajdonságok kitüntetett iránya ( $\alpha$ ) és a henger tengely által bezárt szög különböző értékei mellett a középső keresztmetszet alsó pontjának elmozdulását szemlélteti a 9.4. ábra. A feladatot 5 ( $p=8$ ) elem alkalmazásával oldottuk meg, az eredményeket a 9.4. ábra szemlélteti.



9.4. ábra. A tartály középső keretmetszetének legnagyobb radiális elmozdulása az anyagtulajdonságok kitüntetett iránya és a henger tengelye által bezárt szög különböző értékei mellett.

#### 9. 4. 4. példa. Érzékenységi vizsgálat

A 9.5. ábrán látható a feladat geometriája és a terhelés.

A peremfeltételek:  $Z=L$  helyen befalazás ( $u_0=v_0=w_0=\beta_0=\theta_0=0$ ),

$Z=0$  helyen szabad perem adott radiális terheléssel.

A Love-Kirchhoff feltételezéssel a feladatnak zárt alakú megoldása ismert:

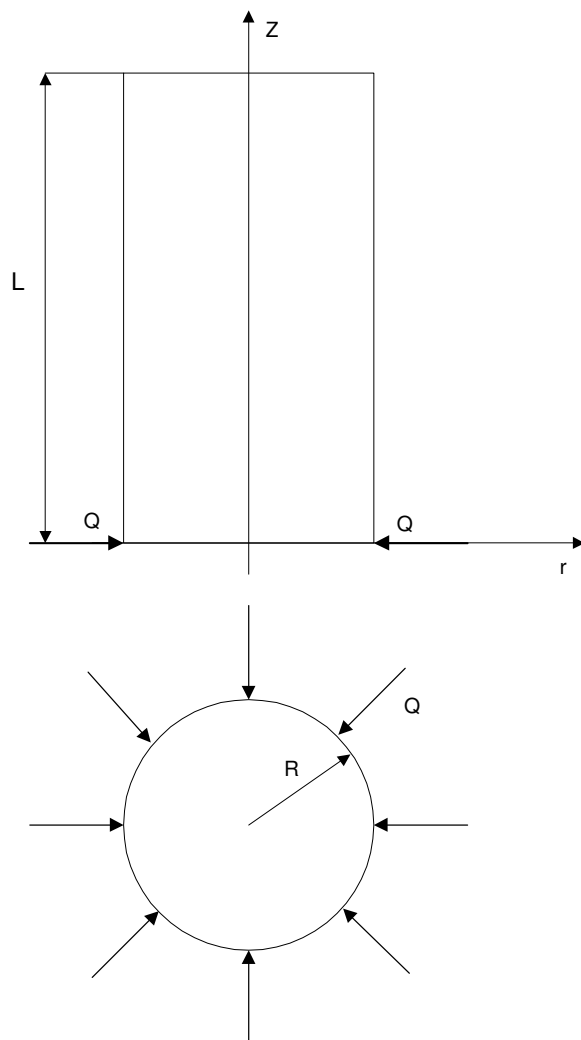
$$u_0 = -\frac{Q}{2\mu^2 D} e^{-\mu z} \cos \mu z, \quad (9.1)$$

ahol

$$\mu = \left[ \frac{3(1-\nu^2)}{R^2 h^2} \right]^{\frac{1}{4}} \quad (9.2)$$

és

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (9.3)$$

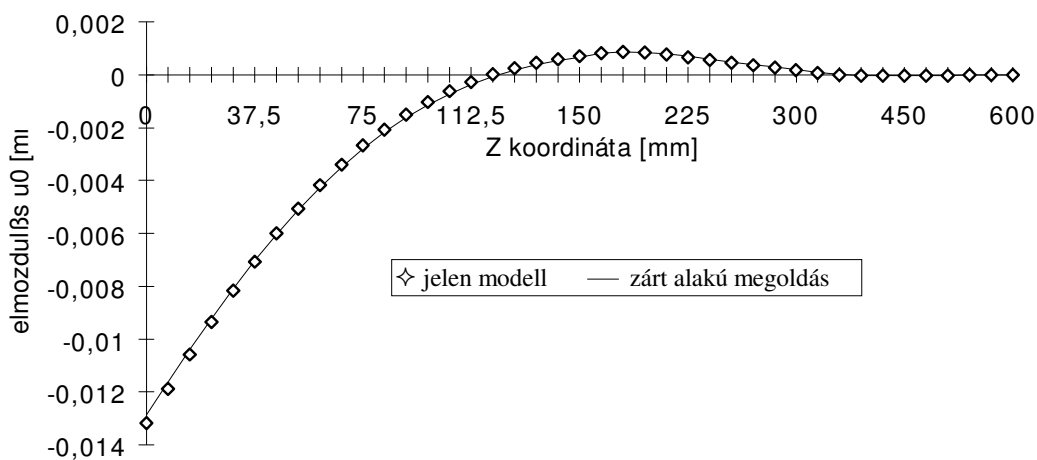


9.5. ábra. A 3. példa geometriája

A geometriai adatok, a terhelés és az anyagjellemzők:

$R= 1000 \text{ mm}$ ,  $h= 10 \text{ mm}$ ,  $L= 600 \text{ mm}$ ,  $Q= 80 \text{ N}$ ,  $E= 200 \text{ GPa}$ ,  $\nu= 0.3$ .

A számítások során 25 parabolikus ( $p=2$ ) elemet alkalmaztunk. A 9.6. ábra a zártalakú és a jelen modell segítségével számított radiális elmozdulásokat ( $u_r$ ) mutatja a henger hossz tengelye mentén.



6. ábra. A radiális elmozdulás a héj hossz tengelye mentén

9.

A radiális elmozdulás érzékenysége a héj vastagságának változására a (9.1)-(9.3) összefüggések h szerinti differenciálásával előállíthatók:

$$\frac{\partial u_0}{\partial h} = \left( \frac{\cos(\mu z)}{\mu^3 D} + \frac{z \sin(\mu z)}{2\mu^2 D} + \frac{z \cos(\mu z)}{2\mu^2 D} \right) Q e^{-\mu z} \mu' + \frac{Q}{2\mu^2 D^2} e^{\mu z} \cos(\mu z) D', \quad (9.4)$$

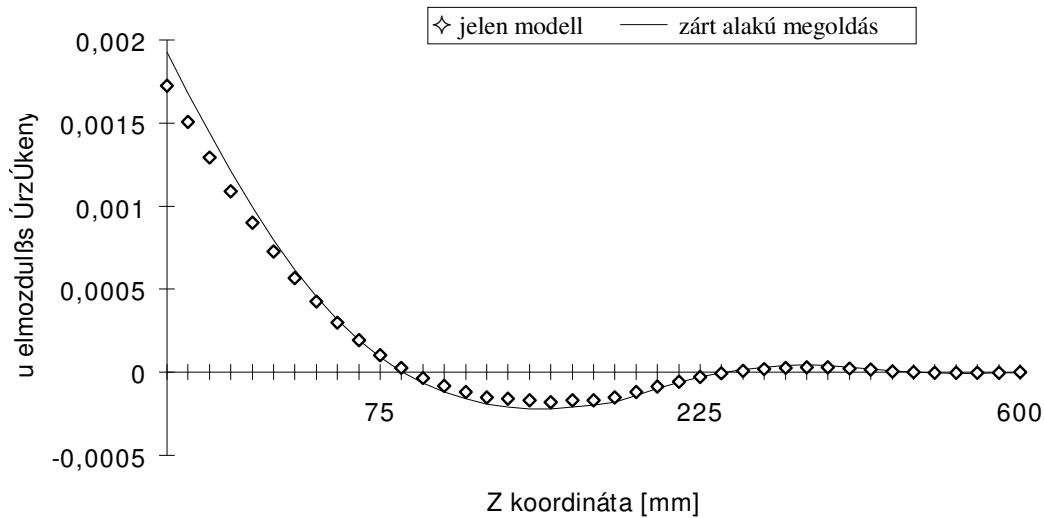
ahol

$$\mu' = \frac{3Eh^2}{12(1-\nu^2)} \quad (9.5)$$

és

$$D' = \frac{\sqrt[4]{3}}{2} \frac{1-\nu^2}{\left( \frac{1-\nu^2}{R^2 h^2} \right)^{\frac{3}{4}} R^2 h^3} \quad (9.6)$$

A 9.7. ábrán látható az értekezésben leírt módon számított és a zárt alakban előállított képlet szerinti érzékenység a hossz tengely mentén.



9.

7. ábra. A radiális elmozdulás érzékenysége a héj vastagságának változására

### 9. 5. 5. példa. Alakoptimalizálás

A feladat geometriája megegyezik a 9.1. ábrán látható elrendezéssel, azzal a különbséggel, hogy a két rétegből álló héjat  $p = 10 \text{ MPa}$  belső nyomás terheli.

Az anyagjellemzők:  $E_1=36 \text{ GPa}$ ,  $E_2=8 \text{ GPa}$ ,  $G_{12}=G_{13}=4.4 \text{ GPa}$ ,  $G_{23}=4 \text{ GPa}$ ,  $\nu_{12}=0.25$

A geometriai adatok:  $R=500 \text{ mm}$ ,  $h=10 \text{ mm}$ ,  $\omega = 45^\circ$ . A rétegek:  $[0/90]$ .

A peremfeltétel: a  $Z=0$  helyen  $v_0=w_0=0$ ,

a  $Z=353 \text{ mm}$  helyen szabad terheletlen perem.

A geometriát 25 végeelem írja le, az elmozdulásmezőt másodfokú függvények közelítik ( $p=2$ ).

A feladat megoldása során a tervezési paraméterek számának csökkentése érdekében harmadfokú Bezier-spline-okat alkalmaztunk a forgáshéj meridiángörbéjének illetve e görbe mentén a vastagság leírására. A meridiángörbe esetén a spline-ok középső két vezérpontjának



radiális koordinátái, illetve a vastagság esetén a négy vezérpont vastagsági értéke a tervezési paraméterek.

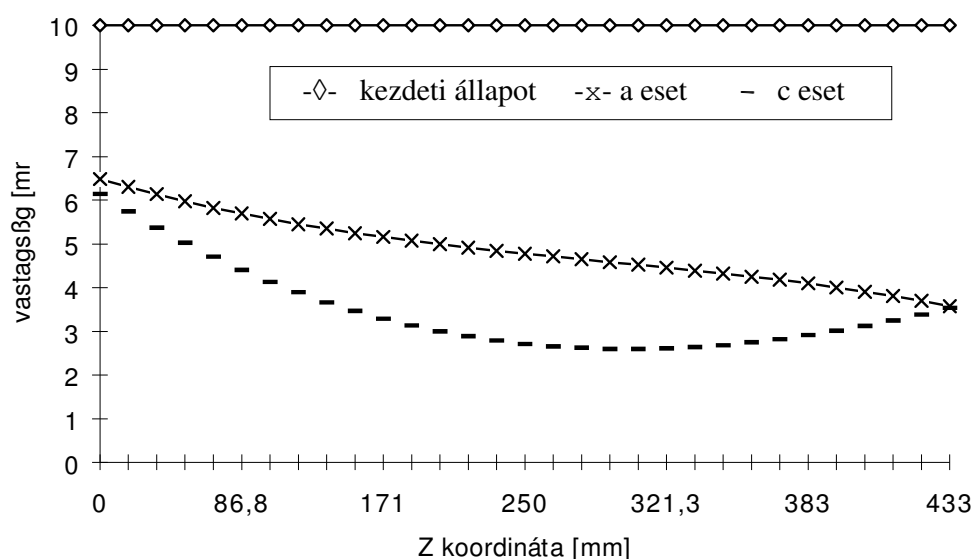
A számításokat három esetben végeztük el:

- a, a héj vastagságát változtatjuk,
- b, a héj meridiánmetszetét leíró görbét változtatjuk,
- c, mind a vastagságot, mind a meridiánmetszetet leíró görbét változtatjuk.

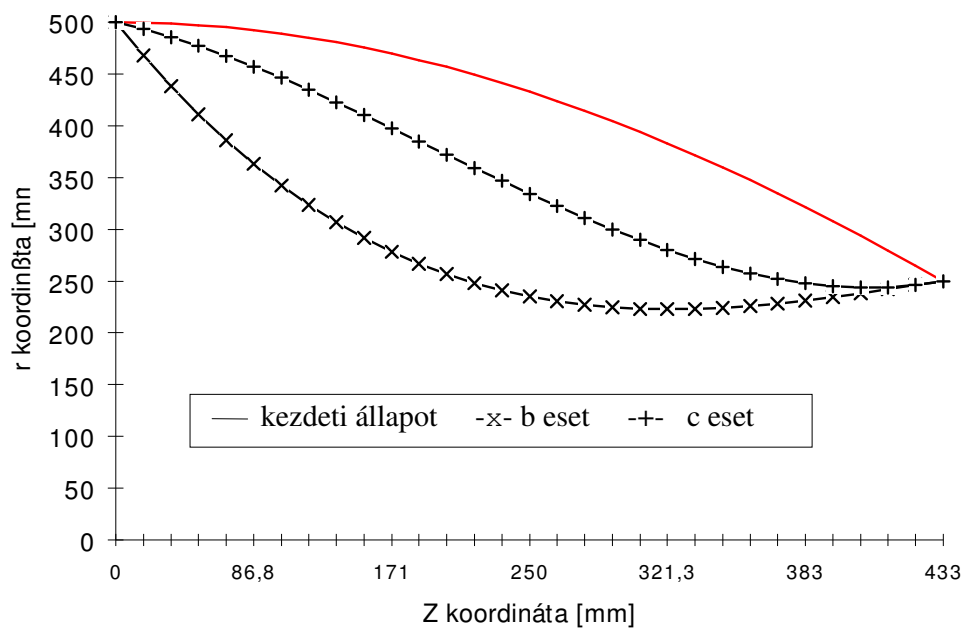
Az optimalizálás célfüggvénye a héj térfogata. A feltétel a Hill-Tsai- kritérium az integrálás elvégzéséhez használt Gauss-pontokban. A tönkremeneteli kritériumban szereplő paraméterek:

$$\sigma_1^0 = \sigma_2^0 = 100 \text{ MPa}, \quad \tau_{12}^+ = \tau_{13}^+ = \tau_{23}^+ = 50 \text{ MPa}$$

A számított eredmények a 9.8., 9.9. ábrán és a 9.2. táblázatban láthatók.



9.8 ábra. A héj vastagságának eloszlása a Z tengely mentén



9.9. ábra. A héj középfelületének alakja

9.2. táblázat. Az optimalizálás során elért térfogatok

	Térfogat [m <sup>3</sup> ]	Az eredmények összehasonlítása a b esethez viszonyítva [%]
Kezdeti állapot	13.6	-
a	6.7	39.1
b	11.0	100.0
c	4.2	61.8

## 9. 6. A számítási eredmények értékelése

A fenti számítások szemléltetik a kidolgozott egyenletek és algoritmusok hatékonyságát és alkalmazhatóságát.

Az 1. példa demonstrálja azt, hogy a  $p$  verziós elemek alkalmazásával viszonylag durva felosztás mellett is magasabb  $p$  esetén a feladat kielégítő pontossággal oldható meg.

A 2. példa érzékelteti az anizotrop kompozit héjak azon tulajdonságát, hogy a forgásszimmetrikus terheléshez tartozó megoldásnál a csavarási feladat nem választható külön. Az anizotrópia, vagyis a szálak irányának változása jelentős befolyással van erre a kapcsolódásra, ez megfigyelhető a 9.3. ábrán.

A 3. példa a modell alkalmazását mutatja be nemforgásszimmetrikus terhelés esetén. Az irodalomban megtalálható számítási eredményekkel összevetve megállapítható, hogy lényegesen kisebb numerikus feladat megoldásával a más módon számított eredmény jól közelíthető.

A 4. példa az érzékenységi vizsgálat eredményeinek összehasonlításához a Love-Kirchhoff feltételezésen alapuló zárt alakú megoldással vethető össze a számított eredmény. A számított és a zárt megoldások jó egyezést mutatnak, kis eltérés csak a terhelés helyének közvetlen környékén figyelhető meg. A zárt alakú megoldásból differenciálással kifejezhető a megoldás érzékenysége a vastagság változtatására. Ez az érzékenység és a jelen modell segítségével számított érzékenység is meglehetősen közeli eredményt szolgáltat.

A 5. példa mutatja be a modell alkalmazását alakoptimalizálási feladat megoldására. A Bezier spline-ok alkalmazásával a tervezési paraméterek száma lecsökkenthető azzal a korlátozással, hogy csak olyan megoldások jöhetnek szóba, melyek leírhatók a spline-ok segítségével. Az optimalizálás eredményeképpen a vastagság és a meridiángörbe együttes változtatásával érhető el a legnagyobb térfogat csökkenés, 62.8% a meridiángörbe változtatásával elért eredményhez képest.

## Függelék A

Az elem görbületi sugara meghatározható, ha a három csomópontra egy kört illesztünk:

$$(r_1 - r)^2 + (Z_1 - Z)^2 = R_s^2$$

$$(r_2 - r)^2 + (Z_2 - Z)^2 = R_s^2$$

$$(r_3 - r)^2 + (Z_3 - Z)^2 = R_s^2$$

ahol  $r$  és  $Z$  az illesztett kör görbületi sugara.

A Maple szimbolikus manipulátor felhasználásával a fenti egyenletrendszer megoldható. A kapott eredmény:

$$R_s := -\frac{1}{2} \sqrt{r_3^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + r_2^2 - 2 r_3 r_2 - 2 Z_2 Z_3} \left( 4 r_2 r_3 r_1^2 + 2 Z_1^2 r_1^2 - 2 Z_2^2 r_1 r_3 - 2 Z_3^2 r_1 r_2 - 2 r_2^2 Z_1 Z_3 - 2 r_3^2 Z_1 Z_2 + Z_2^2 r_1^2 + Z_3^2 r_1^2 + r_2^2 Z_1^2 + r_3^2 Z_1^2 + Z_2^2 r_3^2 + r_2^2 Z_3^2 + 4 Z_2 r_1 r_3 Z_1 + 4 Z_3 r_1 r_2 Z_1 + Z_2^2 Z_3^2 + Z_2^2 Z_1^2 + Z_3^2 Z_1^2 + r_2^2 r_3^2 + 4 Z_2 Z_1^2 Z_3 - 2 Z_2 Z_1 Z_3^2 - 2 Z_3 Z_1 Z_2^2 + r_1^4 + Z_1^4 - 2 r_1^2 Z_2 Z_1 - 2 r_1^2 Z_3 Z_1 - 2 r_1 r_3 Z_1^2 - 2 Z_1^3 Z_2 + r_1^2 r_3^2 - 2 r_1^3 r_3 - 2 Z_1^3 Z_3 + r_2^2 r_1^2 - 2 r_2 r_1^3 - 2 r_2^2 r_1 r_3 - 2 r_2 r_3^2 r_1 - 2 r_2 r_1 Z_1^2 \right)^{1/2} / (Z_2 r_1 - Z_3 r_1 - r_2 Z_1 + r_3 Z_1 - Z_2 r_3 + r_2 Z_3)$$

Az eredmény C nyelvű programsorként is megkapható:

```
Rs = -sqrt(r3*r3+Z2*Z2+Z3*Z3+r2*r2-2.0*r3*r2-2.0*Z2*Z3)*sqrt(4.0*r2*r3*r1*r1+
2.0*Z1*Z1*r1*r1-2.0*Z2*Z2*r1*r3-2.0*Z3*Z3*r1*r2-2.0*r2*r2*Z1*Z3-2.0*r3*r3*Z1*Z2+
Z2*Z2*r1*r1+Z3*Z3*r1*r1+r2*r2*Z1*Z1+ r3*r3*Z1*Z1+Z2*Z2*r3*r3+r2*r2*Z3*Z3+
4.0*Z2*r1*r3*Z1+4.0*Z3*r1*r2*Z1+Z2*Z2*Z3*Z3+Z2*Z2*Z1*Z1+Z3*Z3*Z1*Z1+r2*r2*r
3*r3+4.0*Z2*Z1*Z1*Z3-2.0*Z2*Z1*Z3*Z3-
2.0*Z3*Z1*Z2*Z2+pow(r1,4.0)+pow(Z1,4.0)-2.0*r1*r1*Z2*Z1-2.0*r1*r1*Z3*Z1-
2.0*r1*r3*Z1*Z1-2.0*Z1*Z1*Z1*Z2+r1*r1*r3*r3-2.0*r1*r1*r1*r3-2.0*Z1*Z1*Z1*Z3
+r2*r2*r1*r1-2.0*r2*r1*r1*r1-2.0*r2*r2*r1*r3-2.0*r2*r3*r3*r1-2.0*r2*r1*Z1*Z1)/(Z2*r1-
Z3*r1-r2*Z1+r3*Z1-Z2*r3+r2*Z3)/2;
```

Ha a tervezési paraméter a csomópont sugár koordinátája, a differenciálás is elvégezhető.  $\frac{\partial R_s}{\partial r_1} =$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{4}\sqrt{r_3^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + r_2^2 - 2 r_3 r_2 - 2 Z_2 Z_3} \left( 8 r_2 r_3 r_1 + 4 r_1 Z_1^2 - 2 Z_2^2 r_3 \right. \\
& \quad - 2 r_2 Z_3^2 + 2 Z_2^2 r_1 + 2 Z_3^2 r_1 + 4 Z_2 r_3 Z_1 + 4 Z_3 r_2 Z_1 + 4 r_1^3 - 4 r_1 Z_2 Z_1 \\
& \quad - 4 Z_3 r_1 Z_1 - 2 r_3 Z_1^2 + 2 r_3^2 r_1 - 6 r_3 r_1^2 + 2 r_2^2 r_1 - 6 r_2 r_1^2 - 2 r_2^2 r_3 \\
& \quad \left. - 2 r_2 r_3^2 - 2 r_2 Z_1^2 \right) / \left( \left( 4 r_2 r_3 r_1^2 + 2 Z_1^2 r_1^2 - 2 Z_2^2 r_1 r_3 - 2 Z_3^2 r_1 r_2 \right. \right. \\
& \quad - 2 r_2^2 Z_1 Z_3 - 2 r_3^2 Z_1 Z_2 + Z_2^2 r_1^2 + Z_3^2 r_1^2 + r_2^2 Z_1^2 + r_3^2 Z_1^2 + Z_2^2 r_3^2 \\
& \quad + r_2^2 Z_3^2 + 4 Z_2 r_1 r_3 Z_1 + 4 Z_3 r_1 r_2 Z_1 + Z_2^2 Z_3^2 + Z_2^2 Z_1^2 + Z_3^2 Z_1^2 \\
& \quad + r_2^2 r_3^2 + 4 Z_2 Z_1^2 Z_3 - 2 Z_2 Z_1 Z_3^2 - 2 Z_3 Z_1 Z_2^2 + r_1^4 + Z_1^4 - 2 r_1^2 Z_2 Z_1 \\
& \quad - 2 r_1^2 Z_3 Z_1 - 2 r_1 r_3 Z_1^2 - 2 Z_1^3 Z_2 + r_1^2 r_3^2 - 2 r_1^3 r_3 - 2 Z_1^3 Z_3 + r_2^2 r_1^2 \\
& \quad \left. - 2 r_2 r_1^3 - 2 r_2^2 r_1 r_3 - 2 r_2 r_3^2 r_1 - 2 r_2 r_1 Z_1^2 \right)^{1/2} \\
& \quad \left. (Z_2 r_1 - Z_3 r_1 - r_2 Z_1 + r_3 Z_1 - Z_2 r_3 + r_2 Z_3) \right) + \frac{1}{2} \\
& \quad \sqrt{r_3^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + r_2^2 - 2 r_3 r_2 - 2 Z_2 Z_3} \left( 4 r_2 r_3 r_1^2 + 2 Z_1^2 r_1^2 - 2 Z_2^2 r_1 r_3 \right. \\
& \quad - 2 Z_3^2 r_1 r_2 - 2 r_2^2 Z_1 Z_3 - 2 r_3^2 Z_1 Z_2 + Z_2^2 r_1^2 + Z_3^2 r_1^2 + r_2^2 Z_1^2 \\
& \quad + r_3^2 Z_1^2 + Z_2^2 r_3^2 + r_2^2 Z_3^2 + 4 Z_2 r_1 r_3 Z_1 + 4 Z_3 r_1 r_2 Z_1 + Z_2^2 Z_3^2 \\
& \quad + Z_2^2 Z_1^2 + Z_3^2 Z_1^2 + r_2^2 r_3^2 + 4 Z_2 Z_1^2 Z_3 - 2 Z_2 Z_1 Z_3^2 - 2 Z_3 Z_1 Z_2^2 + r_1^4 \\
& \quad + Z_1^4 - 2 r_1^2 Z_2 Z_1 - 2 r_1^2 Z_3 Z_1 - 2 r_1 r_3 Z_1^2 - 2 Z_1^3 Z_2 + r_1^2 r_3^2 - 2 r_1^3 r_3 \\
& \quad \left. - 2 Z_1^3 Z_3 + r_2^2 r_1^2 - 2 r_2 r_1^3 - 2 r_2^2 r_1 r_3 - 2 r_2 r_3^2 r_1 - 2 r_2 r_1 Z_1^2 \right)^{1/2} \\
& \quad \left. (Z_2 - Z_3) / (Z_2 r_1 - Z_3 r_1 - r_2 Z_1 + r_3 Z_1 - Z_2 r_3 + r_2 Z_3) \right)^2
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial R_s}{\partial z_2} = -\frac{1}{4} \frac{\sqrt{\%2} (2r_2 - 2r_3)}{\sqrt{\%3} \%1} - \frac{1}{4} \sqrt{\%3} (4r_3 r_1^2 - 2Z_3^2 r_1 - 4Z_3 r_2 Z_1 + 2r_2 Z_1^2 + 2r_2 Z_3^2 + 4Z_3 r_1 Z_1 + 2r_2 r_3^2 + 2r_2 r_1^2 - 2r_1^3 - 4r_2 r_3 r_1 - 2r_3^2 r_1 - 2r_1 Z_1^2) / (\sqrt{\%2} \%1) + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\%3} \sqrt{\%2} (-Z_1 + Z_3)}{\%1^2}$$

$$\%1 := Z_2 r_1 - Z_3 r_1 - r_2 Z_1 + r_3 Z_1 - Z_2 r_3 + r_2 Z_3$$

$$\begin{aligned} \%2 := & 4r_2 r_3 r_1^2 + 2Z_1^2 r_1^2 - 2Z_2^2 r_1 r_3 - 2Z_3^2 r_1 r_2 - 2r_2^2 Z_1 Z_3 - 2r_3^2 Z_1 Z_2 \\ & + Z_2^2 r_1^2 + Z_3^2 r_1^2 + r_2^2 Z_1^2 + r_3^2 Z_1^2 + Z_2^2 r_3^2 + r_2^2 Z_3^2 + 4Z_2 r_1 r_3 Z_1 \\ & + 4Z_3 r_1 r_2 Z_1 + Z_2^2 Z_3^2 + Z_2^2 Z_1^2 + Z_3^2 Z_1^2 + r_2^2 r_3^2 + 4Z_2 Z_1^2 Z_3 \\ & - 2Z_2 Z_1 Z_3^2 - 2Z_3 Z_1 Z_2^2 + r_1^4 + Z_1^4 - 2r_1^2 Z_2 Z_1 - 2r_1^2 Z_3 Z_1 \\ & - 2r_1 r_3 Z_1^2 - 2Z_1^3 Z_2 + r_1^2 r_3^2 - 2r_1^3 r_3 - 2Z_1^3 Z_3 + r_2^2 r_1^2 - 2r_2 r_1^3 \\ & - 2r_2^2 r_1 r_3 - 2r_2 r_3^2 r_1 - 2r_2 r_1 Z_1^2 \end{aligned}$$

$$\%3 := r_3^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + r_2^2 - 2r_3 r_2 - 2Z_2 Z_3$$

$$\frac{\partial R_s}{\partial z_3} = -\frac{1}{4} \frac{\sqrt{\%2} (2r_3 - 2r_2)}{\sqrt{\%3} \%1} - \frac{1}{4} \sqrt{\%3} (4r_2 r_1^2 - 2Z_2^2 r_1 - 4Z_2 r_3 Z_1 + 2r_3 Z_1^2 + 2Z_2^2 r_3 + 4r_1 Z_2 Z_1 + 2r_2^2 r_3 - 2r_1 Z_1^2 + 2r_3 r_1^2 - 2r_1^3 - 2r_2^2 r_1 - 4r_2 r_3 r_1) / (\sqrt{\%2} \%1) + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\%3} \sqrt{\%2} (Z_1 - Z_2)}{\%1^2}$$

$$\%1 := Z_2 r_1 - Z_3 r_1 - r_2 Z_1 + r_3 Z_1 - Z_2 r_3 + r_2 Z_3$$

$$\begin{aligned} \%2 := & 4r_2 r_3 r_1^2 + 2Z_1^2 r_1^2 - 2Z_2^2 r_1 r_3 - 2Z_3^2 r_1 r_2 - 2r_2^2 Z_1 Z_3 - 2r_3^2 Z_1 Z_2 \\ & + Z_2^2 r_1^2 + Z_3^2 r_1^2 + r_2^2 Z_1^2 + r_3^2 Z_1^2 + Z_2^2 r_3^2 + r_2^2 Z_3^2 + 4Z_2 r_1 r_3 Z_1 \\ & + 4Z_3 r_1 r_2 Z_1 + Z_2^2 Z_3^2 + Z_2^2 Z_1^2 + Z_3^2 Z_1^2 + r_2^2 r_3^2 + 4Z_2 Z_1^2 Z_3 \\ & - 2Z_2 Z_1 Z_3^2 - 2Z_3 Z_1 Z_2^2 + r_1^4 + Z_1^4 - 2r_1^2 Z_2 Z_1 - 2r_1^2 Z_3 Z_1 \\ & - 2r_1 r_3 Z_1^2 - 2Z_1^3 Z_2 + r_1^2 r_3^2 - 2r_1^3 r_3 - 2Z_1^3 Z_3 + r_2^2 r_1^2 - 2r_2 r_1^3 \\ & - 2r_2^2 r_1 r_3 - 2r_2 r_3^2 r_1 - 2r_2 r_1 Z_1^2 \end{aligned}$$

$$\%3 := r_3^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + r_2^2 - 2r_3 r_2 - 2Z_2 Z_3$$

## Függelék B

Az elmozdulámező közelítésére használt függvényeket úgy célszerű megválasztani, hogy deriváltjaik a lehető legnagyobb ortonormáltsággal rendelkezzenek. Ennek a tulajdonságnak köszönhetően az elem merevségi mátrixa jól kondicionált lesz, amely biztosítja a globális egyensúlyi egyenlet pontos megoldhatóságát.

Az első két alakfüggvényt válasszuk meg az alábbi módon:

$$\phi_1(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi) \text{ és } \phi_2 = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (-1 \leq \xi \leq 1).$$

A Legendre polinomok kielégítik az alábbi, Legendre-differenciálegyenletet:

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n-1)y = 0 \quad -1 \leq x \leq 1 \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

A magasabb sorszámú alakfüggvényeket a  $P_j(x)$  Legendre polinomok segítségével állítjuk elő ([70]).

$$\phi_i(\xi) = \sqrt{\frac{2i-3}{2}} \int_{-1}^{\xi} P_{i-2}(x) dx$$

Az így előállított alakfüggvényekre fenn áll,  $\phi_i(\xi = \pm 1) = 0$  ( $i = 3, 4, \dots$ ).

A függvények:

$$\phi_3(\xi) = \frac{3}{2\sqrt{6}}(\xi^2 - 1)$$

$$\phi_4(\xi) = \frac{5}{2\sqrt{10}}(\xi^3 - \xi)$$

$$\phi_5(\xi) = \frac{1}{8\sqrt{14}}(35\xi^4 - 42\xi^2 + 7)$$

$$\phi_6(\xi) = \frac{1}{24\sqrt{2}}(63\xi^5 - 90\xi^3 + 27\xi)$$

$$\phi_7(\xi) = \frac{1}{16\sqrt{22}}(231\xi^6 - 385\xi^4 + 165\xi^2 - 11)$$

$$\phi_8(\xi) = \frac{1}{16\sqrt{26}}(429\xi^7 - 819\xi^5 + 455\xi^3 - 65\xi)$$

$$\phi_9(\xi) = \frac{1}{128\sqrt{30}}(6435\xi^8 - 13860\xi^6 + 9450\xi^4 - 2100\xi^2 + 75)$$



## Függelék C

A Maple szimbolikus manipulátor segítségével előállított  $\mathbf{B}_n^c(\xi, \eta)$  mátrix elemei a következők (jelölése  $\text{bm}[i][j]$ ,  $i=0\dots4$ ,  $j=0\dots10p$ ), ha az ismert mennyiségeket az alábbiak szerint jelöljük:

$$\begin{aligned}rs &= R_s \\co &= \cos \gamma \\si &= \sin \gamma \\z &= \frac{h}{2} \eta \\tau &= n \\dr &= \frac{1}{t} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} r_i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}dA &= \frac{\partial A}{\partial z}, \quad dB = \frac{\partial B}{\partial z}, \quad dC = \frac{\partial C}{\partial z}, \quad dD = \frac{\partial D}{\partial s}, \quad dE = \frac{\partial E}{\partial s}, \quad dF = \frac{\partial F}{\partial s}, \quad dDz = \frac{\partial D}{\partial z}, \quad dEz = \frac{\partial E}{\partial z}, \\dFz &= \frac{\partial F}{\partial z}, \quad ns = \frac{1}{t} \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi}, \quad nss = \frac{1}{t^2} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial \xi^2}\end{aligned}$$

A szimbolikus manipulátor segítségével közvetlenül C nyelvű programsoronként is megkaphatók a mátrix elemeinek számítására szolgáló együtthatók:

$$\begin{aligned}sv &= 576 \cdot r \cdot r \cdot r \cdot r - 48 \cdot r \cdot r \cdot h \cdot h \cdot co \cdot co + h \cdot h \cdot h \cdot h \cdot co \cdot co \cdot co \cdot co; \\dA &= 8 \cdot z / (24 \cdot rs \cdot rs - h \cdot h) + 96 \cdot rs \cdot z \cdot z / ((24 \cdot rs \cdot rs - h \cdot h) \cdot h \cdot h); \\dB &= 1 + 16 \cdot rs \cdot z / (24 \cdot rs \cdot rs - h \cdot h) - 12 \cdot (8 \cdot rs \cdot rs - h \cdot h) \cdot z \cdot z / ((24 \cdot rs \cdot rs - h \cdot h) \cdot h \cdot h); \\dC &= -8 \cdot rs \cdot z / (24 \cdot rs \cdot rs - h \cdot h) - 96 \cdot rs \cdot rs \cdot z \cdot z / ((24 \cdot rs \cdot rs - h \cdot h) \cdot h \cdot h); \\dD &= 32 \cdot z \cdot z \cdot (6 \cdot co \cdot h \cdot h \cdot r \cdot r \cdot si + 24 \cdot r \cdot r \cdot r \cdot z \cdot si + z \cdot co \cdot co \cdot h \cdot h \cdot si \cdot r) / (rs \cdot h \cdot h \cdot sv) - \\& 32 \cdot z \cdot z \cdot (6 \cdot co \cdot co \cdot h \cdot h \cdot r + 24 \cdot r \cdot r \cdot z \cdot co + z \cdot co \cdot co \cdot co \cdot h \cdot h) / (h \cdot h \cdot sv) \cdot dr; \\dE &= 8 \cdot z \cdot z \cdot (32 \cdot z \cdot co \cdot co \cdot r - 24 \cdot r \cdot r \cdot co - co \cdot co \cdot co \cdot h \cdot h) / sv \cdot dr - \\& 8 \cdot z \cdot z \cdot (32 \cdot z \cdot co \cdot r \cdot r \cdot si - 24 \cdot r \cdot r \cdot r \cdot si - co \cdot co \cdot h \cdot h \cdot si \cdot r) / (rs \cdot sv); \\dF &= 4 \cdot z \cdot z \cdot (8 \cdot z \cdot h \cdot h \cdot co \cdot co + 48 \cdot co \cdot h \cdot h \cdot r + 192 \cdot r \cdot r \cdot z) / sv \cdot dr - \\& 4 \cdot z \cdot z \cdot (si \cdot h \cdot h \cdot h \cdot h \cdot co \cdot co + 24 \cdot h \cdot h \cdot r \cdot r \cdot si + 16 \cdot z \cdot h \cdot h \cdot co \cdot si) / (rs \cdot sv); \\dDz &= 8 \cdot z \cdot co \cdot co / (24 \cdot r \cdot r - h \cdot h \cdot co \cdot co) + 96 \cdot r \cdot z \cdot z \cdot co / ((24 \cdot r \cdot r - h \cdot h \cdot co \cdot co) \cdot h \cdot h);\end{aligned}$$

$$dEz=1.+16.*r*z*co/(24.*r*r-h*h*co*co)-12.*(h*h*co*co+8.*r*r)*z*z/((24.*r*r-h*h*co*co)*h*h);$$

$$dFz=8.*z*co/(h*h*co*co-24.*r*r)+96.*r*z*z/((h*h*co*co-24.*r*r)*h*h);$$

A mátrix elemeinek feltöltésére szolgáló ciklus a következő, ha P jelöli a  $p$  verziós elem fokszámát:

```

for(i=0;i<P+1;i++)
{
    bm[0][i*10] =(co/rs-A*co/rs-co/rs/rs)*nj+(A*si+2.*C*si/rs)*ns+C*co*nss;
    bm[0][i*10+1]=0.;
    bm[0][i*10+2]=(si/rs-A*si/rs-C*si/rs/rs)*nj+(2.*C*co/rs-
        *co)*ns+C*si*nss;
    bm[0][i*10+3]=0.;
    bm[0][i*10+4]=0.;
    bm[0][i*10+5]=0.;
    bm[0][i*10+6]=B*ns;
    bm[0][i*10+7]=0.;
    bm[0][i*10+8]=0.;
    bm[0][i*10+9]=0.;

    bm[1][i*10] =(A*si*si+C*si*si/rs+co*co)/r*nj+C*si*co/r*ns-
        tau*tau*F*co/r*nj;
    bm[1][i*10+1]=0.;
    bm[1][i*10+2]=(si*co-A*co*si-C*co*si/rs)/r*nj+C*si*si/r*ns-
        tau*tau*F*si/r*nj;
    bm[1][i*10+3]=0.;
    bm[1][i*10+4]=0.;
    bm[1][i*10+5]=D/r*tau*nj;
    bm[1][i*10+6]=B*si/r*nj;
    bm[1][i*10+7]=0.;
    bm[1][i*10+8]=0.;
    bm[1][i*10+9]=E*tau/r*nj;

    bm[2][i*10] =0.;
    bm[2][i*10+1]=-(F*co*si/r-dF*co-C*si/rs/r-A*si/r-F*si/rs)*tau*nj+
        (F*co+C*co/r)*tau*ns;
    bm[2][i*10+2]=0.;
    bm[2][i*10+3]=-(F*si*si/r-dF*si+A*co/r+C*co/r/rs+F*co/rs)*tau*nj+
        (F*si+C*si/r)*tau*ns;
    bm[2][i*10+4]=(dD-D*si/r)*nj+D*ns;
    bm[2][i*10+5]=0.;
    bm[2][i*10+6]=0.;
    bm[2][i*10+7]=B/r*tau*nj;
    bm[2][i*10+8]=(dE-E*si/r)*nj+E*ns;
    bm[2][i*10+9]=0.;
}

```

```

bm[3][i*10 ]=(si/rs+dC*si/rs+dA*si-A*si/rs-
C*si/rs/rs)*nj+(co+dC*co-C*co/rs)*ns;
bm[3][i*10+1]=0.;
bm[3][i*10+2]=(A*co/rs-co/rs-dC*co/rs-
dA*co+C*co/rs/rs)*nj+(si+dC*si-C*si/rs)*ns;
bm[3][i*10+3]=0.;
bm[3][i*10+4]=0.;
bm[3][i*10+5]=0.;
bm[3][i*10+6]=(dB-B/rs)*nj;
bm[3][i*10+7]=0.;
bm[3][i*10+8]=0.;
bm[3][i*10+9]=0.;

bm[4][i*10 ]=0.;
bm[4][i*10+1]=-(F*co*co/r-co/r-dFz*co)*tau*nj;
bm[4][i*10+2]=0.;
bm[4][i*10+3]=-(F*si*co/r-si/r-dFz*si)*tau*nj;
bm[4][i*10+4]=(dDz-D*co/r)*nj;
bm[4][i*10+5]=0.;
bm[4][i*10+6]=0.;
bm[4][i*10+7]=0.;
bm[4][i*10+8]=(dEz-E*co/r)*nj;
bm[4][i*10+9]=0.;
}

```

A  $\mathbf{B}_n^s(\xi, \eta)$  mátrix elemei hasonlóan:

```

for(i=0;i<P1;i++)
{
bm[0][i*10 ] =0;
bm[0][i*10+1]=(co/rs-A*co/rs-C*co/rs/rs)*nj+(A*si+2.*C*si/rs)*ns+
C*co*nss;
bm[0][i*10+2]=0.;
bm[0][i*10+3]=(si/rs-A*si/rs-C*si/rs/rs)*nj+(2.*C*co/rs-A*co)*ns+
C*si*nss;
bm[0][i*10+4]=0.;
bm[0][i*10+5]=0.;
bm[0][i*10+6]=0.;
bm[0][i*10+7]=B*ns;
bm[0][i*10+8]=0.;
bm[0][i*10+9]=0.;

bm[1][i*10 ]=0.;
bm[1][i*10+1]=(A*si*si+C*si*si/rs+co*co)/r*nj+C*si*co/r*ns-
tau*tau*F*co/r*nj;
bm[1][i*10+2]=0.;
bm[1][i*10+3]=(si*co-A*co*si-C*co*si/rs)/r*nj+C*si*si/r*ns-
tau*tau*F*si/r*nj;
bm[1][i*10+4]=-D/r*tau*nj;
bm[1][i*10+5]=0.;

```

```

bm[1][i*10+6]=0.;
bm[1][i*10+7]=B*si/r*nj;
bm[1][i*10+8]=-E*tau/r*nj;
bm[1][i*10+9]=0.;

bm[2][i*10 ]=(F*co*si/r-dF*co-C*si/rs/r-A*si/r-F*si/rs)*tau*nj-
(F*co+C*co/r)*tau*ns;
bm[2][i*10+1]=0.;
bm[2][i*10+2]=(F*si*si/r-dF*si+A*co/r+C*co/r/rs+F*co/rs)*tau*nj-
(F*si+C*si/r)*tau*ns;
bm[2][i*10+3]=0.;
bm[2][i*10+4]=0.;
bm[2][i*10+5]=(dD-D*si/r)*nj+D*ns;
bm[2][i*10+6]=-B/r*tau*nj;
bm[2][i*10+7]=0.;
bm[2][i*10+8]=0.;
bm[2][i*10+9]=(dE-E*si/r)*nj+E*ns;

bm[3][i*10 ]=0.;
bm[3][i*10+1]=(si/rs+dC*si/rs+dA*si-A*si/rs-C*si/rs/rs)
*nj+(co+dC*co-C*co/rs)*ns;
bm[3][i*10+2]=0.;
bm[3][i*10+3]=(A*co/rs-co/rs-dC*co/rs-dA*co+C*co/rs/rs)
*nj+(si+dC*si-C*si/rs)*ns;
bm[3][i*10+4]=0.;
bm[3][i*10+5]=0.;
bm[3][i*10+6]=0.;
bm[3][i*10+7]=(dB-B/rs)*nj;
bm[3][i*10+8]=0.;
bm[3][i*10+9]=0.;

bm[4][i*10 ]=(F*co*co/r-co/r-dFz*co)*tau*nj;
bm[4][i*10+1]=0.;
bm[4][i*10+2]=(F*si*co/r-si/r-dFz*si)*tau*nj;
bm[4][i*10+3]=0.;
bm[4][i*10+4]=0.;
bm[4][i*10+5]=(dDz-D*co/r)*nj;
bm[4][i*10+6]=0.;
bm[4][i*10+7]=0.;
bm[4][i*10+8]=0.;
bm[4][i*10+9]=(dEz-E*co/r)*nj;

```

}

A  $\frac{\partial \mathbf{B}_n^c}{\partial h_i}$  elemei, a  $\mathbf{B}_n^c(\xi, \eta)$  mátrix elemeinek csomóponti vastagságok szerinti deriváltjai is

előállíthatók a láncszabály alkalmazásával. Az első lépésben a vastagság számítására szolgáló összefüggést differenciáljuk a csomóponti vastagság szerint,

$$dh = \frac{\partial h}{\partial h_i} = N_i(\xi),$$

majd az alábbi jelöléseket felhasználva az együtthatók  $h$  szerinti differenciálásáva

$$\begin{aligned} dz &= \frac{dh}{2} \eta, \quad hA = \frac{\partial A}{\partial h}, \quad hB = \frac{\partial B}{\partial h}, \quad hC = \frac{\partial C}{\partial h}, \quad hD = \frac{\partial D}{\partial h}, \quad hE = \frac{\partial E}{\partial h}, \quad hF = \frac{\partial F}{\partial h}, \quad hdA = \frac{\partial(dA)}{\partial h}, \\ hdB &= \frac{\partial(dB)}{\partial h}, \quad hdC = \frac{\partial(dC)}{\partial h}, \quad hdD = \frac{\partial(dD)}{\partial h}, \quad hdE = \frac{\partial(dE)}{\partial h}, \quad hdF = \frac{\partial(dF)}{\partial h}, \quad hdDz = \frac{\partial(dDz)}{\partial h}, \\ hdEz &= \frac{\partial(dEz)}{\partial h}, \quad hdFz = \frac{\partial(dFz)}{\partial h} \end{aligned}$$

a következő kifejezések adódnak, melyeket közvetlenül C programsorok formájában

állíthatunk elő:

$$hA = (8.0 * z * z / \text{pow}(24.0 * rs * rs - h * h, 2.0) * h + 64.0 * rs * z * z * z / \text{pow}(24.0 * rs * rs - h * h, 2.0) / h - 64.0 * rs * z * z * z / (24.0 * rs * rs - h * h) / (h * h * h)) * dh + (8.0 * z / (24.0 * rs * rs - h * h) + 96.0 * rs * z * z / (24.0 * rs * rs - h * h) / (h * h)) * dz;$$

$$hB = (16.0 * rs * z * z / \text{pow}(24.0 * rs * rs - h * h, 2.0) * h + 8.0 / h * z * z * z / (24.0 * rs * rs - h * h) - 8.0 * (8.0 * rs * rs - h * h) * z * z * z / \text{pow}(24.0 * rs * rs - h * h, 2.0) / h + 8.0 * (8.0 * rs * rs - h * h) * z * z * z / (24.0 * rs * rs - h * h) / (h * h * h)) * dh + (1.0 + 16.0 * rs * z / (24.0 * rs * rs - h * h) - 12.0 * (8.0 * rs * rs - h * h) * z * z / (24.0 * rs * rs - h * h) / (h * h)) * dz;$$

$$hC = dh * (-8.0 * rs * z * z / \text{pow}(24.0 * rs * rs - h * h, 2.0) * h - 64.0 * rs * rs * z * z * z / \text{pow}(24.0 * rs * rs - h * h, 2.0) / h + 64.0 * rs * rs * z * z * z / (24.0 * rs * rs - h * h) / (h * h * h)) + dz * (-8.0 * rs * z / (24.0 * rs * rs - h * h) - 96.0 * rs * rs * z * z / (24.0 * rs * rs - h * h) / (h * h));$$

$$hD = (8.0 * z * z * \text{pow}(co, 4.0) / \text{pow}(24.0 * r * r - h * h * co * co, 2.0) * h + 64.0 * r * z * z * z * co * co * co / \text{pow}(24.0 * r * r - h * h * co * co, 2.0) / h - 64.0 * r * z * z * z * co / (24.0 * r * r - h * h * co * co) / (h * h * h)) * dh + (8.0 * z * co * co / (24.0 * r * r - h * h * co * co) + 96.0 * r * z * z * co / (24.0 * r * r - h * h * co * co) / (h * h)) * dz;$$

$$hE = (16.0 * r * z * z * co * co * co / \text{pow}(24.0 * r * r - h * h * co * co, 2.0) * h - 8.0 / h * co * co * z * z * z / (24.0 * r * r - h * h * co * co) - 8.0 * (h * h * co * co + 8.0 * r * r) * z * z * z / \text{pow}(24.0 * r * r - h * h * co * co, 2.0) / h * co * co + 8.0 * (h * h * co * co + 8.0 * r * r) * z * z * z / (24.0 * r * r - h * h * co * co) / (h * h * h)) * dh + (1.0 + 16.0 * r * z * co / (24.0 * r * r - h * h * co * co) - 12.0 * (h * h * co * co + 8.0 * r * r) * z * z / (24.0 * r * r - h * h * co * co) / (h * h)) * dz;$$

$$hF=(-8.0*z*z*co*co*co/pow(h*h*co*co-24.0*r*r,2.0)*h-64.0*r*z*z*z/pow(h*h*co*co-24.0*r*r,2.0)/h*co*co-64.0*r*z*z*z/(h*h*co*co-24.0*r*r)/(h*h*h))*dh+(8.0*z*co/(h*h*co*co-24.0*r*r)+96.0*r*z*z/(h*h*co*co-24.0*r*r)/(h*h))*dz;$$

$$sv=576.*r*r*r*r-48.*r*r*h*h*co*co+h*h*h*h*co*co*co*co;$$

$$hsv=(-96.0*r*r*h*co*co+4.0*h*h*h*pow(co,4.0))*dh;$$

$$hdA=(16.0*z/pow(24.0*rs*rs-h*h,2.0)*h+192.0*rs*z*z/pow(24.0*rs*rs-h*h,2.0)/h-192.0*rs*z*z/(24.0*rs*rs-h*h)/(h*h*h))*dh+(8.0/(24.0*rs*rs-h*h)+192.0*rs*z/(24.0*rs*rs-h*h)/(h*h))*dz;$$

$$hdB=(32.0*rs*z/pow(24.0*rs*rs-h*h,2.0)*h+24.0/h*z*z/(24.0*rs*rs-h*h)-24.0*(8.0*rs*rs-h*h)*z*z/pow(24.0*rs*rs-h*h,2.0)/h+24.0*(8.0*rs*rs-h*h)*z*z/(24.0*rs*rs-h*h)/(h*h*h))*dh+(16.0*rs/(24.0*rs*rs-h*h)-24.0*(8.0*rs*rs-h*h)*z/(24.0*rs*rs-h*h)/(h*h))*dz;$$

$$hdC=(-16.0*rs*z/pow(24.0*rs*rs-h*h,2.0)*h-192.0*rs*rs*z*z/pow(24.0*rs*rs-h*h,2.0)/h+192.0*rs*rs*z*z/(24.0*rs*rs-h*h)/(h*h*h))*dh+(-8.0*rs/(24.0*rs*rs-h*h)-192.0*rs*rs*z/(24.0*rs*rs-h*h)/(h*h))*dz;$$

$$hdD=(32.0*z*z*(12.0*co*h*r*r*si+2.0*z*co*co*h*si*r)/rs/(h*h)/sv-64.0*z*z*(6.0*co*h*r*r*si+24.0*r*r*r*z*si+z*co*co*h*h*si*r)/rs/(h*h*h)/sv-32.0*z*z*(12.0*co*co*h*r+2.0*z*co*co*co*h)/(h*h)/sv*dr+64.0*z*z*(6.0*co*co*h*h*r+24.0*r*r*r*z*co+z*co*co*co*h*h)/(h*h*h)/sv*dr)*dh+(64.0*z*(6.0*co*h*h*r*r*si+24.0*r*r*r*z*si+z*co*co*h*h*si*r)/rs/(h*h)/sv+32.0*z*z*(24.0*r*r*r*si+co*co*h*h*si*r)/rs/(h*h)/sv-64.0*z*(6.0*co*co*h*h*r+24.0*r*r*r*z*co+z*co*co*co*h*h)/(h*h)/sv*dr-32.0*z*z*(24.0*r*r*co+co*co*co*h*h)/(h*h)/sv*dr)*dz+(-32.0*z*z*(6.0*co*h*h*r*r*si+24.0*r*r*r*z*si+z*co*co*h*h*si*r)/rs/(h*h)/(sv*sv)+32.0*z*z*(6.0*co*co*h*h*r+24.0*r*r*r*z*co+z*co*co*co*h*h)/(h*h)/(sv*sv)*dr)*dsv;$$

$$hdE=(-16.0*z*z*co*co*co*h/sv*dr+16.0*z*z*co*co*h*si*r/rs/sv)*dh+(16.0*z*(32.0*z*co*co*r-24.0*r*r*co-co*co*co*h*h)/sv*dr+256.0*z*z*co*co*r/sv*dr-16.0*z*(32.0*z*co*r*r*si-24.0*r*r*r*si-co*co*h*h*si*r)/rs/sv-256.0*z*z*co*r*r*si/rs/sv)*dz+(-8.0*z*z*(32.0*z*co*co*r-24.0*r*r*co-co*co*co*h*h)/(sv*sv)*dr+8.0*z*z*(32.0*z*co*r*r*si-24.0*r*r*r*si-co*co*h*h*si*r)/rs/(sv*sv))*dsv;$$

$$hdF=(4.0*z*z*(16.0*z*h*co*co+96.0*co*h*r)/sv*dr-4.0*z*z*(4.0*si*h*h*h*co*co+48.0*h*r*r*si+32.0*z*h*co*si)/rs/sv)*dh+(8.0*z*(8.0*z*h*h*co*co+48.0*co*h*h*r+192.0*r*r*z)/sv*dr+4.0*z*z*(8.0*h*h*co*co+192.0*r*r)/sv*dr-8.0*z*(si*pow(h,4.0)*co*co+24.0*h*h*r*r*si+16.0*z*h*h*co*si)/rs/sv-64.0*z*z*h*h*co*si/rs/sv)*dz+(-4.0*z*z*(8.0*z*h*h*co*co+48.0*co*h*h*r+192.0*r*r*z)/(sv*sv)*dr+4.0*z*z*(si*pow(h,4.0)*co*co+24.0*h*h*r*r*si+16.0*z*h*h*co*si)/rs/(sv*sv))*dsv;$$

$$hdDz=(16.0*z*pow(co,4.0)/pow(24.0*r*r-h*h*co*co,2.0)*h+192.0*r*z*z*co*co*co/pow(24.0*r*r-h*h*co*co,2.0)/h-192.0*r*z*z*co/(24.0*r*r-h$$

$$h^*co^*co)/(h^*h^*h))^*dh+(8.0^*co^*co/(24.0^*r^*r-h^*h^*co^*co)+192.0^*r^*z^*co/(24.0^*r^*r-h^*h^*co^*co)/(h^*h))^*dz;$$

$$hdEz=(32.0^*r^*z^*co^*co^*co/pow(24.0^*r^*r-h^*h^*co^*co,2.0)^*h-24.0/h^*co^*co^*z^*z/(24.0^*r^*r-h^*h^*co^*co)-24.0^*(h^*h^*co^*co+8.0^*r^*r)^*z^*z/pow(24.0^*r^*r-h^*h^*co^*co,2.0)/h^*co^*co+24.0^*(h^*h^*co^*co+8.0^*r^*r)^*z^*z/(24.0^*r^*r-h^*h^*co^*co)/(h^*h^*h))^*dh+(16.0^*r^*co/(24.0^*r^*r-h^*h^*co^*co)-24.0^*(h^*h^*co^*co+8.0^*r^*r)^*z/(24.0^*r^*r-h^*h^*co^*co)/(h^*h))^*dz;$$

$$hdFz=(-16.0^*z^*co^*co^*co/pow(h^*h^*co^*co-24.0^*r^*r,2.0)^*h-192.0^*r^*z^*z/pow(h^*h^*co^*co-24.0^*r^*r,2.0)/h^*co^*co-192.0^*r^*z^*z/(h^*h^*co^*co-24.0^*r^*r)/(h^*h^*h))^*dh+(8.0^*co/(h^*h^*co^*co-24.0^*r^*r)+192.0^*r^*z/(h^*h^*co^*co-24.0^*r^*r)/(h^*h))^*dz;$$

A mátrix elemeit feltöltő ciklus pedig:

```
for(i=0;i<P+1;i++)
{
    bm[0][i*10] =-(hA*co/rs+hC*co/rs/rs)*nj+(hA*si+2.*hC*si/rs)*ns+
        hC*co*nss;
    bm[0][i*10+1]=0.;
    bm[0][i*10+2]=-(hA*si/rs+hC*si/rs/rs)*nj+(2.*hC*co/rs-hA*co)*ns+
        hC*si*nss;
    bm[0][i*10+3]=0.;
    bm[0][i*10+4]=0.;
    bm[0][i*10+5]=0.;
    bm[0][i*10+6]=hB*ns;
    bm[0][i*10+7]=0.;
    bm[0][i*10+8]=0.;
    bm[0][i*10+9]=0.;

    bm[1][i*10] =(hA*si*si+hC*si*si/rs)/r*nj+hC*si*co/r*ns-
        tau*tau*hF*co/r*nj;
    bm[1][i*10+1]=0.;
    bm[1][i*10+2]=-(hA*co*si+hC*co*si/rs)/r*nj+hC*si*si/r*ns-
        tau*tau*hF*si/r*nj;
    bm[1][i*10+3]=0.;
    bm[1][i*10+4]=0.;
    bm[1][i*10+5]=hD/r*tau*nj;
    bm[1][i*10+6]=hB*si/r*nj;
    bm[1][i*10+7]=0.;
    bm[1][i*10+8]=0.;
    bm[1][i*10+9]=hE*tau/r*nj;

    bm[2][i*10] =0.;
    bm[2][i*10+1]=-(hF*co*si/r-hdF*co-hC*si/rs/r-hA*si/r-
        hF*si/rs)*tau*nj+(hF*co+C*co/r)*tau*ns;
    bm[2][i*10+2]=0.;
    bm[2][i*10+3]=-(hF*si*si/r-hdF*si+hA*co/r+hC*co/r/rs+
        hF*co/rs)*tau*nj+ (hF*si+C*si/r)*tau*ns;
```

```

bm[2][i*10+4]=(hdD-hD*si/r)*nj+hD*ns;
bm[2][i*10+5]=0.;
bm[2][i*10+6]=0.;
bm[2][i*10+7]=hB/r*tau*nj;
bm[2][i*10+8]=(hdE-hE*si/r)*nj+hE*ns;
bm[2][i*10+9]=0.;

```

```

bm[3][i*10 ]=(hdC*si/rs+hdA*si-hA*si/rs-hC*si/rs/rs)*nj+(hdC*co-
hC*co/rs)*ns;
bm[3][i*10+1]=0.;
bm[3][i*10+2]=(hA*co/rs-hdC*co/rs-hdA*co+hC*co/rs/rs)*nj+
(hdC*si-hC*si/rs)*ns;
bm[3][i*10+3]=0.;
bm[3][i*10+4]=0.;
bm[3][i*10+5]=0.;
bm[3][i*10+6]=(hdB-hB/rs)*nj;
bm[3][i*10+7]=0.;
bm[3][i*10+8]=0.;
bm[3][i*10+9]=0.;

```

```

bm[4][i*10 ]=0.;
bm[4][i*10+1]=-(hF*co*co/r-hdFz*co)*tau*nj;
bm[4][i*10+2]=0.;
bm[4][i*10+3]=-(hF*si*co/r-hdFz*si)*tau*nj;
bm[4][i*10+4]=(hdDz-hD*co/r)*nj;
bm[4][i*10+5]=0.;
bm[4][i*10+6]=0.;
bm[4][i*10+7]=0.;
bm[4][i*10+8]=(hdEz-hE*co/r)*nj;
bm[4][i*10+9]=0.;

```

}

A  $\frac{\partial \mathbf{B}_n^s}{\partial h_i}$  elemei hasonlón:

for(i=0;i<P+1;i++)

{

```

bm[0][i*10 ]=0;
bm[0][i*10+1]=-(hA*co/rs+hC*co/rs/rs)*nj+(hA*si+2.*hC*si/rs)*
ns+hC*co*nss;
bm[0][i*10+2]=0.;
bm[0][i*10+3]=-(hA*si/rs+hC*si/rs/rs)*nj+(2.*hC*co/rs-hA*co)*ns+
hC*si*nss;
bm[0][i*10+4]=0.;
bm[0][i*10+5]=0.;
bm[0][i*10+6]=0.;
bm[0][i*10+7]=hB*ns;
bm[0][i*10+8]=0.;
bm[0][i*10+9]=0.;

```

```

bm[1][i*10 ]=0.;

```



$bm[1][i^{*}10+1]=(hA^{*}si^{*}si+hC^{*}si^{*}si/rs)/r^{*}nj+hC^{*}si^{*}co/r^{*}ns-$   
 $tau^{*}tau^{*}hF^{*}co/r^{*}nj;$   
 $bm[1][i^{*}10+2]=0.;$   
 $bm[1][i^{*}10+3]=-(hA^{*}co^{*}si+hC^{*}co^{*}si/rs)/r^{*}nj+hC^{*}si^{*}si/r^{*}ns-$   
 $tau^{*}tau^{*}hF^{*}si/r^{*}nj;$   
 $bm[1][i^{*}10+4]=-hD/r^{*}tau^{*}nj;$   
 $bm[1][i^{*}10+5]=0.;$   
 $bm[1][i^{*}10+6]=0.;$   
 $bm[1][i^{*}10+7]=hB^{*}si/r^{*}nj;$   
 $bm[1][i^{*}10+8]=-hE^{*}tau/r^{*}nj;$   
 $bm[1][i^{*}10+9]=0.;$

$bm[2][i^{*}10 ]=(hF^{*}co^{*}si/r-hdF^{*}co-hC^{*}si/rs/r-hA^{*}si/r-$   
 $hF^{*}si/rs)^{*}tau^{*}nj-(hF^{*}co+hC^{*}co/r)^{*}tau^{*}ns;$   
 $bm[2][i^{*}10+1]=0.;$   
 $bm[2][i^{*}10+2]=(hF^{*}si^{*}si/r-hdF^{*}si+hA^{*}co/r+hC^{*}co/r/rs+$   
 $hF^{*}co/rs)^{*}tau^{*}nj-(hF^{*}si+hC^{*}si/r)^{*}tau^{*}ns;$   
 $bm[2][i^{*}10+3]=0.;$   
 $bm[2][i^{*}10+4]=0.;$   
 $bm[2][i^{*}10+5]=(hdD-hD^{*}si/r)^{*}nj+hD^{*}ns;$   
 $bm[2][i^{*}10+6]=-hB/r^{*}tau^{*}nj;$   
 $bm[2][i^{*}10+7]=0.;$   
 $bm[2][i^{*}10+8]=0.;$   
 $bm[2][i^{*}10+9]=(hdE-hE^{*}si/r)^{*}nj+hE^{*}ns;$

$bm[3][i^{*}10 ]=0.;$   
 $bm[3][i^{*}10+1]=(hdC^{*}si/rs+hdA^{*}si-hA^{*}si/rs-$   
 $hC^{*}si/rs/rs)^{*}nj+(hdC^{*}co-hC^{*}co/rs)^{*}ns;$   
 $bm[3][i^{*}10+2]=0.;$   
 $bm[3][i^{*}10+3]=(hA^{*}co/rs-hdC^{*}co/rs-hdA^{*}co+hC^{*}co/rs/rs)^{*}nj$   
 $+(hdC^{*}si-hC^{*}si/rs)^{*}ns;$   
 $bm[3][i^{*}10+4]=0.;$   
 $bm[3][i^{*}10+5]=0.;$   
 $bm[3][i^{*}10+6]=0.;$   
 $bm[3][i^{*}10+7]=(hdB-hB/rs)^{*}nj;$   
 $bm[3][i^{*}10+8]=0.;$   
 $bm[3][i^{*}10+9]=0.;$

$bm[4][i^{*}10 ]=(hF^{*}co^{*}co/r-hdFz^{*}co)^{*}tau^{*}nj;$   
 $bm[4][i^{*}10+1]=0.;$   
 $bm[4][i^{*}10+2]=(hF^{*}si^{*}co/r-hdFz^{*}si)^{*}tau^{*}nj;$   
 $bm[4][i^{*}10+3]=0.;$   
 $bm[4][i^{*}10+4]=0.;$   
 $bm[4][i^{*}10+5]=(hdDz-hD^{*}co/r)^{*}nj;$   
 $bm[4][i^{*}10+6]=0.;$   
 $bm[4][i^{*}10+7]=0.;$   
 $bm[4][i^{*}10+8]=0.;$   
 $bm[4][i^{*}10+9]=(hdEz-hE^{*}co/r)^{*}nj;$

}

A fentiekhez hasonlóan a  $\mathbf{B}_n^c(\xi, \eta)$  mátrix csomóponti radiális koordináták szerinti deriváltja

hasonlóan számítható a már ismert

$$rr = \frac{\partial r}{\partial r_i} = N_i(\xi), \quad rdr = \frac{\partial dr}{\partial r_i} = \frac{1}{t} \frac{\partial N_i(\xi)}{\partial \xi}, \quad rrs = \frac{\partial R_s}{\partial r_i}, \quad ds = \frac{\partial \sin \gamma}{\partial r_i}, \quad dc = \frac{\partial \cos \gamma}{\partial r_i},$$

mennyiségek ismeretében a következő jelöléseket bevezetve:

$$\begin{aligned} rA &= \frac{\partial A}{\partial r}, \quad rB = \frac{\partial B}{\partial r}, \quad rC = \frac{\partial C}{\partial r}, \quad rD = \frac{\partial D}{\partial r}, \quad rE = \frac{\partial E}{\partial r}, \quad rF = \frac{\partial F}{\partial r}, \quad rdA = \frac{\partial(dA)}{\partial r}, \quad rdB = \frac{\partial(dB)}{\partial r}, \\ rdC &= \frac{\partial(dC)}{\partial r}, \quad rdD = \frac{\partial(dD)}{\partial r}, \quad rdE = \frac{\partial(dE)}{\partial r}, \quad rdF = \frac{\partial(dF)}{\partial r}, \quad rdDz = \frac{\partial(dDz)}{\partial r}, \quad rdEz = \frac{\partial(dEz)}{\partial r}, \\ rdFz &= \frac{\partial(dFz)}{\partial r}, \quad rsv = \frac{\partial sv}{\partial r} \end{aligned}$$

Az együtthatók számítása:

$$rA = (-192.0 * z * z / \text{pow}(24.0 * rs * rs - h * h, 2.0) * rs + 32.0 * z * z * z / (24.0 * rs * rs - h * h) / (h * h) - 1536.0 * rs * rs * z * z * z / \text{pow}(24.0 * rs * rs - h * h, 2.0) / (h * h)) * rrs;$$

$$rB = (8.0 * z * z / (24.0 * rs * rs - h * h) - 384.0 * rs * rs * z * z / \text{pow}(24.0 * rs * rs - h * h, 2.0) - 64.0 * rs * z * z * z / (24.0 * rs * rs - h * h) / (h * h) + 192.0 * (8.0 * rs * rs - h * h) * z * z * z / \text{pow}(24.0 * rs * rs - h * h, 2.0) / (h * h) * rs) * rrs;$$

$$rC = (-4.0 * z * z / (24.0 * rs * rs - h * h) + 192.0 * rs * rs * z * z / \text{pow}(24.0 * rs * rs - h * h, 2.0) - 64.0 * rs * z * z * z / (24.0 * rs * rs - h * h) / (h * h) + 1536.0 * rs * rs * rs * z * z * z / \text{pow}(24.0 * rs * rs - h * h, 2.0) / (h * h)) * rrs;$$

$$rD = (-192.0 * z * z * co * co / \text{pow}(24.0 * r * r - h * h * co * co, 2.0) * r + 32.0 * z * z * z * co / (24.0 * r * r - h * h * co * co) / (h * h) - 1536.0 * r * r * z * z * z * co / \text{pow}(24.0 * r * r - h * h * co * co, 2.0) / (h * h)) * rr + (8.0 * z * z * co / (24.0 * r * r - h * h * co * co) + 8.0 * z * z * co * co * co / \text{pow}(24.0 * r * r - h * h * co * co, 2.0) * h * h + 32.0 * r * z * z * z / (24.0 * r * r - h * h * co * co) / (h * h) + 64.0 * r * z * z * z * co * co / \text{pow}(24.0 * r * r - h * h * co * co, 2.0)) * dc;$$

$$rE = (8.0 * z * z * co / (24.0 * r * r - h * h * co * co) - 384.0 * r * r * z * z * co / \text{pow}(24.0 * r * r - h * h * co * co, 2.0) - 64.0 * r * z * z * z / (24.0 * r * r - h * h * co * co) / (h * h) + 192.0 * (h * h * co * co + 8.0 * r * r) * z * z * z / \text{pow}(24.0 * r * r - h * h * co * co, 2.0) / (h * h) * rr + (8.0 * r * z * z / (24.0 * r * r - h * h * co * co) + 16.0 * r * z * z * co * co / \text{pow}(24.0 * r * r - h * h * co * co, 2.0) * h * h - 8.0 * co * z * z * z / (24.0 * r * r - h * h * co * co) - 8.0 * (h * h * co * co + 8.0 * r * r) * z * z * z / \text{pow}(24.0 * r * r - h * h * co * co, 2.0) * co) * dc;$$

$$rF = (192.0 * z * z * co / \text{pow}(h * h * co * co - 24.0 * r * r, 2.0) * r + 32.0 * z * z * z / (h * h * co * co - 24.0 * r * r) / (h * h) + 1536.0 * r * r * z * z * z / \text{pow}(h * h * co * co - 24.0 * r * r, 2.0) / (h * h))$$

$$*rr+(4.0*z^z/(h*h*co*co-24.0*r*r)-8.0*z^z*co*co/pow(h*h*co*co-24.0*r*r,2.0)*h*h-64.0*r*r*z^z/pow(h*h*co*co-24.0*r*r,2.0)*co)*dc;$$

$$rsv=(2304.0*r*r*r-96.0*r*h*h*co*co)*rr+(-96.0*r*r*h*h*co+4.0*pow(h,4.0)*co*co*co)*dc;$$

$$rdA=(-384.0*z/pow(24.0*rs*rs-h*h,2.0)*rs+96.0*z^z/(24.0*rs*rs-h*h)/(h*h)-4608.0*rs*rs*z^z/pow(24.0*rs*rs-h*h,2.0)/(h*h))*rrs;$$

$$rdB=(16.0*z/(24.0*rs*rs-h*h)-768.0*rs*rs*z/pow(24.0*rs*rs-h*h,2.0)-192.0*rs*z^z/(24.0*rs*rs-h*h)/(h*h)+576.0*(8.0*rs*rs-h*h)*z^z/pow(24.0*rs*rs-h*h,2.0)/(h*h)*rs)*rrs;$$

$$rdC=(-8.0*z/(24.0*rs*rs-h*h)+384.0*rs*rs*z/pow(24.0*rs*rs-h*h,2.0)-192.0*rs*z^z/(24.0*rs*rs-h*h)/(h*h)+4608.0*rs*rs*rs*z^z/pow(24.0*rs*rs-h*h,2.0)/(h*h))*rrs;$$

$$rdD=-32.0*z^z*(6.0*co*h*h*r*r*si+24.0*r*r*r*z^z*si+z^z*co*co*h*h*si*r)/(rs*rs)/(h*h)/sv*rrs+(32.0*z^z*(12.0*co*h*h*r*r*si+72.0*r*r*r*z^z*si+z^z*co*co*h*h*si)/rs/(h*h)/sv-32.0*z^z*(6.0*co*co*h*h+48.0*r*r*z^z*co)/(h*h)/sv*dr)*rr+(32.0*z^z*(6.0*h*h*r*r*si+2.0*z^z*co*h*h*si*r)/rs/(h*h)/sv-32.0*z^z*(12.0*co*h*h*r+24.0*r*r*r*z+3.0*z^z*co*co*h*h)/(h*h)/sv*dr)*dc-32.0*z^z*(6.0*co*co*h*h*r+24.0*r*r*r*z^z*co+z^z*co*co*co*h*h)/(h*h)/sv*rdr+32.0*z^z*(6.0*co*h*h*r*r+24.0*r*r*r*z^z*co+z^z*co*co*h*h*r)/rs/(h*h)/sv*ds+(-32.0*z^z*(6.0*co*h*h*r*r*si+24.0*r*r*r*z^z*si+z^z*co*co*h*h*si*r)/rs/(h*h)/(sv*sv)+32.0*z^z*(6.0*co*co*h*h*r+24.0*r*r*r*z^z*co+z^z*co*co*co*h*h)/(h*h)/(sv*sv)*dr)*rsv;$$

$$rdE=8.0*z^z*(32.0*z^z*co*r*r*si-24.0*r*r*r*si-co*co*h*h*si*r)/(rs*rs)/sv*rrs+(8.0*z^z*(32.0*z^z*co*co-48.0*r*co)/sv*dr-8.0*z^z*(64.0*z^z*co*r*si-72.0*r*r*si-co*co*h*h*si)/rs/sv)*rr+(8.0*z^z*(64.0*r*r*z^z*co-24.0*r*r-3.0*co*co*h*h)/sv*dr-8.0*z^z*(32.0*r*r*z^z*si-2.0*co*h*h*r*si)/rs/sv)*dc+8.0*z^z*(32.0*z^z*co*co*r-24.0*r*r*co-co*co*co*h*h)/sv*rdr-8.0*z^z*(32.0*r*r*z^z*co-24.0*r*r-r-co*co*h*h*r)/rs/sv*ds+(-8.0*z^z*(32.0*z^z*co*co*r-24.0*r*r*co-co*co*co*h*h)/(sv*sv)*dr+8.0*z^z*(32.0*z^z*co*r*r*si-24.0*r*r*r*si-co*co*h*h*si*r)/rs/(sv*sv))*rsv;$$

$$rdF=4.0*z^z*(si*pow(h,4.0)*co*co+24.0*h*h*r*r*si+16.0*z^z*h*h*co*si)/(rs*rs)/sv*rrs+(4.0*z^z*(48.0*co*h*h+384.0*r*z)/sv*dr-192.0*z^z*h*h*r*si/rs/sv)*rr+(4.0*z^z*(16.0*z^z*co*h*h+48.0*h*h*r)/sv*dr-4.0*z^z*(2.0*si*pow(h,4.0)*co+16.0*z^z*h*h*si)/rs/sv)*dc+4.0*z^z*(8.0*z^z*co*co*h*h+48.0*co*h*h*r+192.0*r*r*z)/sv*rdr-4.0*z^z*(pow(h,4.0)*co*co+24.0*h*h*r*r+16.0*z^z*co*h*h)/rs/sv*ds+(-4.0*z^z*(8.0*z^z*co*co*h*h+48.0*co*h*h*r+192.0*r*r*z)/(sv*sv)*dr+4.0*z^z*(si*pow(h,4.0)*co*co+24.0*h*h*r*r*si+16.0*z^z*h*h*co*si)/rs/(sv*sv))*rsv;$$

$$rdDz=(-384.0*z^z*co*co/pow(24.0*r*r-co*co*h*h,2.0)*r+96.0*z^z*co/(24.0*r*r-co*co*h*h)/(h*h)-4608.0*r*r*z^z*co/pow(24.0*r*r-co*co*h*h,2.0)/(h*h))*rr+(16.0*z^z*co/(24.0*r*r-co*co*h*h)+16.0*z^z*co*co/pow(24.0*r*r-co*co*h*h,2.0)*h*h+96.0*r*r*z^z/(24.0*r*r-co*co*h*h)/(h*h)+192.0$$

$*r*z*z*co*co/pow(24.0*r*r-co*co*h*h,2.0))*dc;$

$rdEz=(16.0*z*co/(24.0*r*r-co*co*h*h)-768.0*r*r*z*co/pow(24.0*r*r-co*co*h*h,2.0)-192.0*r*z*z/(24.0*r*rco*co*h*h)/(h*h)+576.0*(co*co*h*h+8.0*r*r)*z*z/pow(24.0*r*r-co*co*h*h,2.0)/(h*h)*r+(16.0*r*z/(24.0*r*r-co*co*h*h)+32.0*r*z*co*co/pow(24.0*r*r-co*co*h*h,2.0)*h*h-24.0*co*z*z/(24.0*r*r-co*co*h*h)*24.0*(co*co*h*h+8.0*r*r)*z*z/pow(24.0*r*r-co*co*h*h,2.0)*co)*dc;$

$dFz=8.*z*co/(h*h*co*co-24.*r*r)+96.*r*z*z/((h*h*co*co-24.*r*r)*h*h);$   
 $rdFz=(384.0*z*co/pow(co*co*h*h-24.0*r*r,2.0)*r+96.0*z*z/(co*co*h*h-24.0*r*r)/(h*h)+4608.0*r*r*z*z/pow(co*co*h*h-24.0*r*r,2.0)/(h*h)*r+(8.0*z/(co*co*h*h-24.0*r*r)-16.0*z*co*co/pow(co*co*h*h-24.0*r*r,2.0)*h*h-192.0*r*z*z/pow(co*co*h*h-24.0*r*r,2.0)*co)*dc;$

A C nyelvű ciklus az elemek számítására:

```
for(i=0;i<P1;i++)
{
```

```
    bm[0][i*10]=((-co/(rs*rs)+A*co/(rs*rs)+2.0*C*co/(rs*rs*rs))*
        nj-2.0*C*si/(rs*rs)*ns)*rrs+((1/rs-A/rs-C/(rs*rs))*nj+C*nss)*
        dc+(A+2.0*C/rs)*ns*ds+(-co/rs*nj+si*ns)*rA+(-co/(rs*rs)*nj+
        2.0*si/rs*ns+co*nss)*rC;
```

```
    bm[0][i*10+1]=0.;
```

```
    bm[0][i*10+2]=((-si/(rs*rs)+A*si/(rs*rs)+2.0*C*si/(rs*rs*
        rs))*nj-2.0*C*co/(rs*rs)*ns)*rrs+(2.0*C/rs-A)*ns*dc+((1/rs-
        A/rs-C/(rs*rs))*nj+C*nss)*ds+(-si/rs*nj-co*ns)*rA+(-si/
        (rs*rs)*nj+2.0*co/rs*ns+si*nss)*rC;
```

```
    bm[0][i*10+3]=0.;
```

```
    bm[0][i*10+4]=0.;
```

```
    bm[0][i*10+5]=0.;
```

```
    bm[0][i*10+6]=ns*rB;
```

```
    bm[0][i*10+7]=0.;
```

```
    bm[0][i*10+8]=0.;
```

```
    bm[0][i*10+9]=0.;
```

```
    bm[1][i*10 ]=-C*si*si/(rs*rs)/r*nj*rrs+(-(A*si*si+C*si*si/
        rs+co*co)/(r*r)*nj-C*si*co/(r*r)*ns+tau*tau*F*co/(r*r)*nj)*
        rr+(2.0*co/r*nj+C*si/r*ns-tau*tau*F/r*nj)*dc+((2.0*A*si+
        2.0*C*si/rs)/r*nj+C*co/r*ns)*ds+si*si/r*nj*rA+(si*si/rs/
        r*nj+si*co/r*ns)*rC-tau*tau*co/r*nj*rF;
```

```
    bm[1][i*10+1]=0.;
```

```
    bm[1][i*10+2]=C*co*si/(rs*rs)/r*nj*rrs+(-(si*co-A*co*si-
        C*co*si/rs)/(r*r)*nj-C*si*si/(r*r)*ns+tau*tau*F*si/(r*r)*
        nj)*rr+(si-A*si-C*si/rs)/r*nj*dc+((co-A*co-C*co/rs)/r*nj+
        2.0*C*si/r*ns-tau*tau*F/r*nj)*ds-si*co/r*nj*rA+(-co*si/rs
        /r*nj+si*si/r*ns)*rC-tau*tau*si/r*nj*rF;
```

```
    bm[1][i*10+3]=0.;
```

```
    bm[1][i*10+4]=0.;
```

$$\begin{aligned}
bm[1][i^{*10+5}] &= -D/(r^*r)^*tau^*nj^*rr+1/r^*tau^*nj^*rD; \\
bm[1][i^{*10+6}] &= -B^*si/(r^*r)^*nj^*rr+B/r^*nj^*ds+si/r^*nj^*rB; \\
bm[1][i^{*10+7}] &= 0.; \\
bm[1][i^{*10+8}] &= 0.; \\
bm[1][i^{*10+9}] &= -E^*tau/(r^*r)^*nj^*rr+1/r^*tau^*nj^*rE;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
bm[2][i^{*10}] &= 0.; \\
bm[2][i^{*10+1}] &= -(C^*si/(rs^*rs)/r+F^*si/(rs^*rs))^*tau^*nj^*rrs+ \\
&\quad (-F^*co^*si/(r^*r)+C^*si/rs/(r^*r)+A^*si/(r^*r))^*tau^*nj^*C^*co/ \\
&\quad (r^*r)^*tau^*ns)^*rr+(-F^*si/r-dF)^*tau^*nj+(F+C/r)^*tau^*ns)^*dc- \\
&\quad (F^*co/r-C/rs/r-A/r-F/rs)^*tau^*nj^*ds+si/r^*tau^*nj^*rA+(si/rs/r^* \\
&\quad tau^*nj+co/r^*tau^*ns)^*rC+(-co^*si/r-si/rs)^*tau^*nj+co^*tau^*ns)^* \\
&\quad rF+co^*tau^*nj^*rdF; \\
bm[2][i^{*10+2}] &= 0.; \\
bm[2][i^{*10+3}] &= -(C^*co/r/(rs^*rs)-F^*co/(rs^*rs))^*tau^*nj^*rrs+ \\
&\quad (-F^*si^*si/(r^*r)-A^*co/(r^*r)-C^*co/(r^*r)/rs)^*tau^*nj^*C^*si/ \\
&\quad (r^*r)^*tau^*ns)^*rr-(A/r+C/rs/r+F/rs)^*tau^*nj^*dc+(-(2.0^*F^*si/r- \\
&\quad dF)^*tau^*nj+(F+C/r)^*tau^*ns)^*ds-co/r^*tau^*nj^*rA+(-co/r/rs^*tau^* \\
&\quad nj+si/r^*tau^*ns)^*rC+(-si^*si/r+co/rs)^*tau^*nj+si^*tau^*ns)^*rF+ \\
&\quad si^*tau^*nj^*rdF; \\
bm[2][i^{*10+4}] &= D^*si/(r^*r)^*nj^*rr-D/r^*nj^*ds+(-si/r^*nj+ns)^*rD+ \\
&\quad nj^*rdD; \\
bm[2][i^{*10+5}] &= 0.; \\
bm[2][i^{*10+6}] &= 0.; \\
bm[2][i^{*10+7}] &= -B/(r^*r)^*tau^*nj^*rr+1/r^*tau^*nj^*rB; \\
bm[2][i^{*10+8}] &= E^*si/(r^*r)^*nj^*rr-E/r^*nj^*ds+(-si/r^*nj+ns)^*rE+ \\
&\quad nj^*rdE; \\
bm[2][i^{*10+9}] &= 0.;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
bm[3][i^{*10}] &= (-si/(rs^*rs)-dC^*si/(rs^*rs)+A^*si/(rs^*rs)+ \\
&\quad 2.0^*C^*si/(rs^*rs^*rs))^*nj+C^*co/(rs^*rs)^*ns)^*rrs+(1.0+dC-C/rs)^* \\
&\quad ns^*dc+(1/rs+dC/rs+dA-A/rs-C/(rs^*rs))^*nj^*ds-si/rs^*nj^*rA+ \\
&\quad (-si/(rs^*rs)^*nj-co/rs^*ns)^*rC+si^*nj^*rdA+(si/rs^*nj+co^*ns)^*rdC; \\
bm[3][i^{*10+1}] &= 0.; \\
bm[3][i^{*10+2}] &= (-A^*co/(rs^*rs)+co/(rs^*rs)+dC^*co/(rs^*rs)- \\
&\quad 2.0^*C^*co/(rs^*rs^*rs))^*nj+C^*si/(rs^*rs)^*ns)^*rrs+(A/rs-1/rs- \\
&\quad dC/rs-dA+C/(rs^*rs))^*nj^*dc+(1.0+dC-C/rs)^*ns^*ds+co/rs^*nj^*rA+ \\
&\quad (co/(rs^*rs)^*nj-si/rs^*ns)^*rC-co^*nj^*rdA+(-co/rs^*nj+si^*ns)^*rdC; \\
bm[3][i^{*10+3}] &= 0.; \\
bm[3][i^{*10+4}] &= 0.; \\
bm[3][i^{*10+5}] &= 0.; \\
bm[3][i^{*10+6}] &= B/(rs^*rs)^*nj^*rrs-1/rs^*nj^*rB+nj^*rdB; \\
bm[3][i^{*10+7}] &= 0.; \\
bm[3][i^{*10+8}] &= 0.; \\
bm[3][i^{*10+9}] &= 0.;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
bm[4][i^{*10}] &= 0.; \\
bm[4][i^{*10+1}] &= -(F^*co^*co/(r^*r)+co/(r^*r))^*tau^*nj^*rr-(2.0^*F^* \\
&\quad co/r-1/r-dFz)^*tau^*nj^*dc-co^*co/r^*tau^*nj^*rF+co^*tau^*nj^*rdFz; \\
bm[4][i^{*10+2}] &= 0.;
\end{aligned}$$

```

    bm[4][i*10+3]=(-F*co*si/(r*r)+si/(r*r))*tau*nj*rr-F*si/r*
    tau*nj*dc-(F*co/r-1/r-dFz)*tau*nj*ds-co*si/r*tau*nj*rF+si*
    tau*nj*rdFz;
    bm[4][i*10+4]= D*co/(r*r)*nj*rr-D/r*nj*dc-co/r*nj*rD+nj*rdDz;
    bm[4][i*10+5]=0.;
    bm[4][i*10+6]=0.;
    bm[4][i*10+7]=0.;
    bm[4][i*10+8]=E*co/(r*r)*nj*rr-E/r*nj*dc-co/r*nj*rE+nj*rdEz;
    bm[4][i*10+9]=0.;
}
}

```

A  $\frac{\partial \mathbf{B}_n^s}{\partial r_i}$  elemei:

```

for(i=0;i<P1;i++)
{

```

```

    bm[0][i*10] =0;
    bm[0][i*10+1]=(-(A/rs+C/(rs*rs))*nj+C*nss)*dc+(A+2.0*C/rs)*
    ns*ds+(-co/rs*nj+si*ns)*rA+(-co/(rs*rs)*nj+2.0*si/rs*ns+co*nss)*
    rC+(-A*co/(rs*rs)-2.0*C*co/(rs*rs*rs))*nj-2.0*C*si/(rs*rs)
    *ns)*rrs;
    bm[0][i*10+2]=0.;
    bm[0][i*10+3]=(2.0*C/rs-A)*ns*dc+(-(A/rs+C/(rs*rs))*nj+
    C*nss)*ds+ (-si/rs*nj-co*ns)*rA+(-si/(rs*rs)*nj+ 2.0*co/rs*ns+
    si*nss)*rC+(-A*si/(rs*rs)-2.0*C*si/(rs*rs*rs))*nj-
    2.0*C*co/(rs*rs)*ns)*rrs;
    bm[0][i*10+4]=0.;
    bm[0][i*10+5]=0.;
    bm[0][i*10+6]=0.;
    bm[0][i*10+7]= ns*rB;
    bm[0][i*10+8]=0.;
    bm[0][i*10+9]=0.;

```

```

    bm[1][i*10 ]=0.;
    bm[1][i*10+1]= (C*si/r*ns-tau*tau*F/r*nj)*dc+((2.0*A*si+
    2.0*C*si/rs)/r*nj+C*co/r*ns)*ds+si*si/r*nj*rA+(si*si/rs/r*nj+
    si*co/r*ns)*rC-tau*tau*co/r*nj*rF+(-(A*si*si+C*si*si/rs)/ (r*r)*nj-
    C*si*co/(r*r)*ns+tau*tau*F*co/(r*r)*nj)*dr-C*si*si/(rs*rs)/r*nj*rrs;
    bm[1][i*10+2]=0.;
    bm[1][i*10+3]= -(A*si+C*si/rs)/r*nj*dc+(-(A*co+C*co/rs)/r*nj+
    2.0*C*si/r*ns-tau*tau*F/r*nj)*ds-co*si/r*nj*rA+(-co*si/rs/r*nj+
    si*si/r*ns)*rC-tau*tau*si/r*nj*rF+((A*co*si+C*co*si/rs)/(r*r)*nj-
    C*si*si/(r*r)*ns+tau*tau*F*si/(r*r)*nj)*dr+C*co*si/(rs*rs)/r*nj*rrs;
    bm[1][i*10+4]= -1/r*tau*nj*rD+D/(r*r)*tau*nj*dr;
    bm[1][i*10+5]=0.;
    bm[1][i*10+6]=0.;
    bm[1][i*10+7]= B/r*nj*ds+si/r*nj*rB-B*si/(r*r)*nj*dr;

```

```

bm[1][i*10+8]=-1/r*tau*nj*rE+E*tau/(r*r)*nj*dr;
bm[1][i*10+9]=0.;
bm[2][i*10 ]=((F*si/r-dF)*tau*nj-(F+C/r)*tau*ns)*dc+(F*co/r-
C/rs/r-A/r-F/rs)*tau*nj*ds-si/r*tau*nj*rA+(-si/rs/r*tau*nj-
co/r*tau*ns)*rC+((co*si/r-si/rs)*tau*nj-co*tau*ns)*rF+((-
F*co*si/(r*r) +C*si/rs/(r*r)+A*si/(r*r))*tau*nj+C*co/(r*r*tau*
ns)*dr-co*tau*nj*rdF+(C*si/(rs*rs)/r+F*si/(rs*rs))*tau*nj*rrs;
bm[2][i*10+1]=0.;
bm[2][i*10+2]=(A/r+C/rs/r+F/rs)*tau*nj*dc+((2.0*F*si/r-dF)*tau*
nj-(F+C/r)*tau*ns)*ds+co/r*tau*nj*rA+(co/r/rs*tau*nj-
si/r*tau*ns)*rC+((si*si/r+co/rs)*tau*nj-si*tau*ns)*rF+((-
F*si*si/(r*r)-A*co/(r*r)-C*co/(r*r)/rs)*tau*nj+C*si/(r*r)*tau*ns)*dr-
si*tau*nj*rdF+ (-C*co/(rs*rs)-F*co/(rs*rs))*tau*nj*rrs;
bm[2][i*10+3]=0.;
bm[2][i*10+4]=0.;
bm[2][i*10+5]= -D/r*nj*ds+(-si/r*nj+ns)*rD+D*si/(r*r)*nj*dr;
bm[2][i*10+6]= -1/r*tau*nj*rB+B/(r*r)*tau*nj*dr;
bm[2][i*10+7]=0.;
bm[2][i*10+8]=0.;
bm[2][i*10+9]=-E/r*nj*ds+(-si/r*nj+ns)*rE+E*si/(r*r)*nj*dr;
bm[3][i*10 ]=0.;
bm[3][i*10+1]= (dC-C/rs)*ns*dc+(dC/rs+dA-A/rs-C/(rs*rs))*nj*ds-
si/rs*nj*rA+(-si/(rs*rs)*nj-co/rs*ns)*rC+si*nj*rdA+
(si/rs*nj+co*ns)*rdC+((-dC*si/(rs*rs)+A*si/(rs*rs)+
2.0*C*si/(rs*rs*rs))*nj+C*co/(rs*rs)*ns)*rrs;
bm[3][i*10+2]=0.;
bm[3][i*10+3]= (A/rs-dC/rs-dA+C/(rs*rs))*nj*dc+(dC-C/rs)*ns*ds+
co/rs*nj*rA+(co/(rs*rs)*nj-si/rs*ns)*rC-co*nj*rdA+ (-co/rs*nj+
si*ns)*rdC+((-A*co/(rs*rs)+dC*co/(rs*rs)-2.0*C*co/(rs*rs*rs))*nj+
C*si/(rs*rs)*ns)*rrs;
bm[3][i*10+4]=0.;
bm[3][i*10+5]=0.;
bm[3][i*10+6]=0.;
bm[3][i*10+7]= -1/rs*nj*rB+nj*rdB+B/(rs*rs)*nj*rrs;
bm[3][i*10+8]=0.;
bm[3][i*10+9]=0.;
bm[4][i*10 ]= (2.0*F*co/r-dFz)*tau*nj*dc+co*co/r*tau*nj*rF-
F*co*co/(r*r)*tau*nj*dr-co*tau*nj*rdFz;
bm[4][i*10+1]=0.;
bm[4][i*10+2]= F*si/r*tau*nj*dc+(F*co/rdFz)*tau*nj*ds+
si*co/r*tau*nj*rF-F*si*co/(r*r)*tau*nj*dr-si*tau*nj*rdFz;
bm[4][i*10+3]=0.;
bm[4][i*10+4]=0.;
bm[4][i*10+5]= -D/r*nj*dc-co/r*nj*rD+D*co/(r*r)*nj*dr+nj*rdDz;
bm[4][i*10+6]=0.;
bm[4][i*10+7]=0.;
bm[4][i*10+8]=0.;
bm[4][i*10+9]= -E/r*nj*dc-co/r*nj*rE+E*co/(r*r)*nj*dr+nj*rdEz;

```

}

## IRODALOM

- [ 1] J. Mackerle, Finite Element and Boundary Element Library for Composites - A Bibliography (1991-1993), Finite Elements in Analysis and Design, 1994, 17, 155-165.
- [ 2] R. M. Jones, Mechanics of Composite Materials, McGraw-Hill, New York, 1975.
- [ 3] S. W. Tsai, H. T. Hahn, Introduction to Composite Materials, Technomic Publishing Co., Lancaster, PA, 1980.
- [ 4] J. M. Whitney, I. M. Daniel, R. B. Pipes, Experimental Mechanics of Fiber Reinforced Composite Materials, Rev. Ed., Prentice-Hall, Inc., Engelwood Cliffs, New Jersey, 1984.
- [ 5] R. F. Gibson, Principles of Composite Material Mechanics, McGraw-Hill, Singapore, 1994.
- [ 6] G. Fudzi, M. Dzako, Mehanika razrusenya kompozicionnüh materialov, Mir, Moszkva, 1982.
- [ 7] R. L. Actis, B. A. Szabó, Hierarchic Models for Bidirectional Composites, Finite Element Analysis and Design, 1993, 13, 149-168.
- [ 8] F. Gruttmann, W. Wagner, L. Meyer, P. Wriggers, A Nonlinear Composite Shell Element with Continuous Interlaminar Shear Stresses, Computational Mechanics, 1993, 13, 175-188.
- [ 9] M. Dikmen, Theory of Thin Shells, Pitman Books Ltd, London, 1982.
- [10] F. Niordson, Shell Theory, Elsevier Science Pub. Co., Amsterdam, 1985.



- [11] Béda Gy., Kozák I., Rugalmas Testek Mechanikája, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1987.
- [12] E. Reissner, The Effect of Shear Deformation on Bending of Elastic Plates, ASME, Journal of Applied Mechanics, 1945, 12, A69-A77.
- [13] R. D. Mindlin, Influence of Rotary Inertia and Shear Deformation on Flexural Motions of Isotropic Plates, ASME, Journal of Applied Mechanics, 1952, 18, 31/38.
- [14] J. M. Whitney, Shear Correction Factors for Orthotropic Laminated Under Static Load, I. Appl. Mech., 1993, 40, 302-304.
- [15] M. Laitinen, H. Lahtinen, S.-G. Sjolind, Transverse Shear Correction Factors for Laminates in Cylindrical Bending, Commun. Num. Methods in Engng., 1995, 11, 41-47.
- [16] J. N. Reddy, A Simple Higher-Order Theory for Laminated Composite Plates, J. Appl. Mech., 1984, 51, 745-752.
- [17] J. N. Reddy, A Review of Refined Theories of Laminated Composite Plates, Shock and Vibrations Digest, 1990, 22(7), 3-17.
- [18] A. K. Noor, W. S. Burton, Assessment of Shear Deformation Theories for Multylayered Composite Plates, Appl. Mech. Rev., 1989, 42(1), 1-13
- [19] B. Csonka, I. Kozák, C. M. Mota Soares, C. A. Mota Soares, Shape Optimization of Axisymmetric Shells Using a Higher-Order Shear Deformation Theory, Structural Optimization, 1995, 9, 117-127.
- [20] I. Sheinman, S. Weissman, Coupling Between Symmetric and Antisymmetric Modes in Shells of Revolution, Journal of Composite Materials, 1987, 21, 998-1007.
- [21] J. L. Batoz, K. J. Bathe, L. W. Ho, A Study of Three-Node Triangular Plate Bending Elements, Int. J. Num. Methods in Engng., 1980, 15, 1771-1812.
- [22] Bojtár I., Vörös G., A Végeselem-módszer Alkalmazása Lemez- és Héjszerkezetekre, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1986.
- [23] I. Babuska, M. Suri, Locking effects in the finite element approximation of elasticity problems, Numer. Math. 1992, 62, 439-463.
- [24] R. D. Cook, D. S. Malkus, M. E. Plesha, Concepts and Applications of Finite Element Analysis, John Wiley & Sons, Inc., Singapore, 1989.
- [25] B. A. Szabó, G. J. Sharmann, Hierarhic Plate and Shell Models Based on p-Extension, Int. J. Num. Methods in Engng., 1988, 26, 1855-1881.

- [26] B. A. Szabó, I. Babuska, Finite Element Analysis, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1991.
- [27] Páczelt I., A Végeselem-módszer Modellezési Kérdései, Hibaanalízis, Miskolci Egyetemi Kiadó, Miskolc, 1994.
- [28] G. N. Vanderplaats, An Efficient Feasible Directions Algorithm for Design Synthesis, AIAA Journal, 1984, 22, 11, 1633-1640.
- [29] P. B. Thanedar, J. S. Arora, C. H. Tseng, O. K. Lim, G. J. Park, Performance of Some SQP Algorithms on Structural Design Problems, Int. J. Num. Meth. in Engng., 1986, 23, 2187-2203.
- [30] K. Svanberg, The Method of Moving Asymptotes - A New Method for Structural Optimization, Int. J. Num. Meth. in Engng., 1987, 24, 359-373.
- [31] L. A. Schmit, Y. C. Lai, Structural Optimization Based on Preconditioned Conjugate Gradient Analysis Methods, Int. J. Num. Meth. in Engng., 1994, 37, 943-964.
- [32] G. N. Vanderplaats, H. Sugimoto, A General-Purpose Optimization Program For Engineering Design, Computers & Struct., Vol 24, No. 1, pp. 13-21, 1996.
- [33] G. N. Vanderplaats, ADS A Fortran Program for Automated Design Synthesis, Version 2.01, Engineering Design Optimization, Inc., St. Barbara, California, 1987.
- [34] VMA Engineering, Design Optimization Tools, Version 3.0, Vanderpleets, Miura & Associates, Inc., Goleta, CA, 1992.
- [35] A. Osyczka, Computer Aided Multicriterion Optimization System (CAMOS), Software Package in Fortran, International Software Publishers, Krakow, Poland, 1992.
- [36] C. Lawrance, J. L. Zhou, A. L. Tits, CFSQP Version 2.0: A C Code for Solving Constrained Nonlinear Optimization Problems, University of Maryland, College Park, MD 20742.
- [37] E. Hinton, N. V. R. Rao, M. Ozakca, J. Sienz, Optimum Shapes for Axisymmetric Shells, Nonlinear Engineering Computations, Ed. N. Bicanic, D. R. J. Owen, P. Marovic, V. Jovic, A. Mihanovic, Proceedings of NEC-91, Fourth International Conference held 16th-10th September, 1991.
- [38] E. Hinton, N. V. R. Rao, J. Sienz, Finite Element Structural Shape and Thickness Optimization of Axisymmetric shells, Eng. Computations, 1992, 9, 499-527.
- [39] Csonka B., Forgásszimmetrikus Héjak Alakoptimalizálása, Gép, 1993., 10-11., 16-18.

- [40] R. Haftka, Z. Gurdal, Elements of Structural Optimization, Kluwer Academic Press Pub., Dordrecht, 3dr ed., 1993.
- [41] N. Olhoff, J. Rassmussen, E. Lund, A Method of "Exact" Numerical Differentiation for Error Elimination in Finite-Element-Based Semi-Analytical Shape Sensitivity Analysis, Mechanics of Structure and Machines, 1993, 21(1), 1-66.
- [42] C. M. Mota Soares, C. A. Mota Soares, J. I. Barbosa, Sensitivity Analysis and Optimal Design of Thin Shells of Revolution, AIAA Journal, 1994, 32(5), 1034-1042.
- [43] E. J. Haug, K. K. Choi, V. Komkov, Design Sensitivity Analysis of Structural Systems, Academic Press, Orlando, 1986.
- [44] D. Chenais, Discrete Gradient and Discretized Continuum Gradient Methods for Shape Optimization, Mechanics of Structures and Machines, 1994, 22(1), 73-115.
- [45] R. J. Yang, M. E. Botkin, Comparison Between the Variational and Implicit Differentiation Approaches to Shape Design Sensitivities, AIAA Journal, 1986, Vol. 24, No. 6, 1027-1032.
- [46] J. S. Arora, J. B. Cardoso, Variational Principle for shape Design Sensitivity Analysis, AIAA Journal, 1992, Vol. 30, No. 2, 538-547.
- [47] J. S. Arora, T. H. Lee, J. B. Cardoso, Structural Shape Sensitivity Analysis: Relationship Between Material Derivative and Control Volume Approaches, AIAA Journal 1992, Vol. 30, No. 6, 1638-1648.
- [48] J. S. Arora, An Exposition of Material Derivative Approach for Structural Shape Sensitivity Analysis, Comput. Methods Appl. Engng., 1993, 105, 41-62.
- [49] K. K. Choi, K. H. Chang, A Study of Design Velocity Field Computation for Shape Optimal Design, Finite Elements in Anal. and Design, 1994, 15, 317-341.
- [50] Csonka B., Alakoptimalizáláshoz szükséges érzékenység vizsgálata a materiális deriváltak felhasználásával, Gép, 1994., 12., 4-7.
- [51] Csonka B., Sensitivity Analysis Using Material Derivative Approach, microCAD'95 International Computer Science Conference, Section K: Modern Numerical Methods, Miskolc, February 23, 1995
- [52] B. Csonka, Sensitivity Analysis of a Higher-Order Model for Axisymmetric Shells Using a Symbolic Manipulator, Report IDMEC, IST, PROJ. STRD/TPR/592/92, Lisbon, 1993
- [53] Kozák I., Kontinuummechanika, Miskolci Egyetemi Kiadó, Miskolc, 1995.

- [54] Kozák I., Szilárdságtan V., Tankönyvkiadó, Budapest, 1988.
- [55] Páczelt I., A Végeselem-módszer Lineáris Sík, Lemez, Héj és Térbeli Elemei, Miskolci Egyetemi Kiadó, Miskolc, 1994.
- [56] O. C. Zienkiewicz, The Finite Element Method in Engineering Science, 3rd. ed., McGraw-Hill, London, 1977.
- [57] Béda Gy., Kozák I., Verhás J., Kontinuummechanika, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1986.
- [58] R. Hill, A Theory of the Yielding and Plastic Flow of Anisotropic Metals, Proceedings of the Royal Society of London, Series A, 193, 281-297, 1948.
- [59] S. W. Tsai, Strength Theories of Filamentary Structures, Fundamental Aspects of Fiber Reinforced Plastic Composites, Ed. R. T. Schwartz and H. S. Schwartz, 3-11, Chap. 1, Wiley Interscience, New York, 1968.
- [60] N. I. Ioakimidis, Symbolic Computations for Solution of Inverse/Design Problems with Maple, Computers & Struc. 1994, Vol. 53, No 1, pp. 63-68.
- [61] B. W. Char, K. O. Geddes, B. L. Leong, M. B. Monagan, S. W. Watt, Maple V Library Reference Manual, Springer, Berlin, 1991.
- [62] B. W. Char, K. O. Geddes, B. L. Leong, M. B. Monagan, S. W. Watt, First Leaves: A Tutorial Introduction to Maple V. Springer, Berlin, 1992.
- [63] Juhász I., Számítógépi Geometria és Grafika, Miskolci Egyetemi Kiadó, Miskolc, 1993.
- [64] F. Yamaguchi, Curves and Surfaces in Computer Aided Geometric Design, Springer Berlin, 1988.
- [65] G. N. Vanderplaats, Numerical Optimization Techniques for Engineering Design, McGraw-Hill, New York, 1984.
- [66] J. S. Arora, Introduction to Optimum Design, McGraw-Hill, New York, 1989.
- [67] Kósa A. Optimum Számítási Modellek, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1979.
- [68] Nagy T., Matematikai Programozás, Tankönyvkiadó, Budapest, 1989.
- [69] Dormány M., Operációkutatás II., Tankönyvkiadó, Budapest, 1990.
- [70] Farkas M., Speciális Függvények Műszaki-Fizikai Alkalmazásokkal, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1964.

- [72] Mota Soares, C. M., Mota Soares, C. A., Barbosa, J. I. Sensitivity analysis and optimal design of thin shells of revolution, AIAA J. 1993, 32, 1034-1042