Miskolci Egyetem
Gépészmérnöki és Informatikai Kar
Műszaki Mechanikai Intézet

Heterogén anyagú síkgörbe rudak rezgései és stabilitása

PhD értekezés tézisei

Kiss László Péter

Sályi István Gépészeti Tudományok Doktori Iskola
Tématerület: Gépészeti alaptudományok
Témacsoport: Szilárd testek mechanikája

Doktori Iskola vezető:
Dr. Tisza Miklós
az MTA doktora, egyetemi tanár

Tématerület vezető:
Dr. Páczelt István
az MTA rendes tagja, professor emeritus

Témacsoport vezető:
Dr. Kozák Imre
az MTA rendes tagja, professor emeritus

Témavezető:
Dr. Szeidl György
az MTA doktora, professor emeritus

Miskolc
2015

Kiss László Péter

Heterogén anyagú síkgörbe rudak rezgései és stabilitása

PhD értekezés tézisei

Miskolc
2015

Védési bizottság tagjai

Elnök:

Dr. Jármai Károly	a műszaki tudomány doktora, egyetemi tanár Miskolci Egyetem

Tag és titkár:

Dr. Tóth Balázs	PhD, egyetemi adjunktus Miskolci Egyetem

Tagok:

Dr. Bagi Katalin	az MTA doktora, egyetemi tanár Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Dr. Ecsedi István	Dr. habil, professor emeritus Miskolci Egyetem
Dr. Égert János	Dr. habil, egyetemi tanár Széchenyi István Egyetem

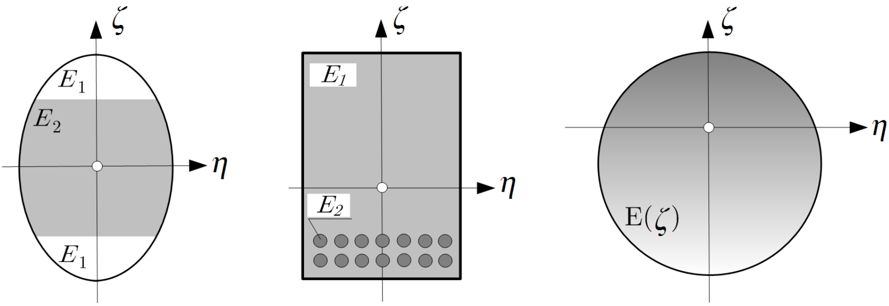
Hivatalos bírálók:

Dr. Kovács Béla	a műszaki tudomány kandidátusa, egyetemi docens Miskolci Egyetem
Dr. Vörös Gábor	az MTA doktora, egyetemi tanár Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

1. Előzmények

Napjainkban igencsak elterjed a görbült középvonalú rudak használata mérnöki alkalmazásokban. Gondoljunk például az ívelt kialakítású hídszerkezetekre, tetőszerkezetekre, vagy a repülőgépek egyes merevítő elemeire. Az ilyen rudak mechanikai viselkedésével már számos kutató foglalkozott. Az újabb és újabb modellek mind pontosabban és általánosabban írják le ezen szerkezeti elemek mechanikai viselkedését, a szerkezetben kialakuló feszültségek eloszlását [1, 2, 3], stabilitását [4, 5, 6], rezgéseit [6, 7, 8].

Ma már nem csak homogén, hanem heterogén, vagy inhomogén anyagú görbe rudak legyártására is egyre gazdaságosabb lehetőség nyílik, elősegítve ezek terjedését. Az ilyen rudak olyan előnyös tulajdonságokkal rendelkezhetnek homogén társaikkal szemben, mint például a kisebb tömeg, magasabb szilárdság, vagy a jobb korrózióállóság. Keresztmetszeti inhomogenitásnak nevezzük azt az esetet, amikor az anyagjellemzők, mint a rugalmassági modulus E, illetve a Poisson tényező ν csak a keresztmetszeti koordinátáktól függenek és a ζ tengelyre vonatkozóan szimmetrikus eloszlásúak. Ez az eloszlás lehet folytonos, vagy szakaszonként állandó. Néhány példát szemléltet az 1. ábra.



1. ábra. Néhány példa keresztmetszeti inhomogenitásra.

A görbe rudak mechanikai viselkedésével a XIX. században kezdtek el foglalkozni. A legelső erő-elmozdulás összefüggést Bresse (1854) írta fel. Winkler volt az első, aki a normálfeszültség-eloszlást meghatározta (1858); Grashof pedig egyensúlyi módszerrel származtatta a nyírófeszültség-eloszlást (1878). Ezen jól ismert eredmények megtalálhatók például az [1, 9] munkákban is.

Az érdeklődés még ma is élénk az ilyen szerkezeti elemek iránt. Folyamatosan születnek új modellek, amelyek változatos terhelési esetekben, különböző geometriákra és akár nem homogén anyagokra is alkalmazhatók. Példaként említhető Ascione és Fraternali [10] cikke, amelyben a szerzők végeselemes technikával vizsgálják a normál- és nyírófeszültségek eloszlását tökéletesen kapcsolt, rétegzett rudakban: minden egyes szelvényt Timoshenko rúdként kezelnek. Segura and Armengaud [11] egyszerű analitikus megoldásokat dolgozott ki a feszültségek meghatározására kompozit rudakban: a normálfeszültség-eloszlás a keresztmetszet felett hiperbolikus függvénye a rúderőnek és a hajlítónyomatéknak egyaránt. A szerzők további eredménye, hogy kiterjesztették a Bredt-képletet kompozit görbe rudakra. Baksa és Ecsedi [12] egyenes tengelyű, keresztmetszeti inhomogenitású rudakkal foglalkoznak, amennyiben az igénybevétel tiszta hajlítás. Kozák és Szeidl az [1] könyvükben formulákat vezetnek le egyenes tengelyű, keresztmetszeti inhomogenitású rudakra és egyúttal homogén anyagú görbe rudakat is vizsgálnak. Az áttekintett irodalom alapján keresztmetszeti inhomogenitású görbe rudakban a feszültségek eloszlásával még nem foglalkoztak.

Egy másik, szintén népszerű terület a stabilitásvizsgálat. Euler 1757-ben publikálta közismert képletét, amely az egyenes középvonalú, nyomott rudak kihajlásához tartozó kritikus erőt adja meg. Görbe rudakkal jóval később kezdtek el foglalkozni. A korai irodalmi munkák nem vették figyelembe a középvonal hosszváltozását – lásd pl. Hurlbrink [13] cikkét. Chwalla és Kollbrunner [14] megmutatta, hogy a nyúlásnak jelentős befolyása lehet a kritikus terhelésre. Az 1950-es éveket követően a témába vágó vizsgálatok felgyorsultak. Szeidl a PhD értekezésében [6] körívalakú rudak kritikus terhelését határozza meg, amennyiben ismert az iránytartó teher Fourier-sora. DaDeppo és Schmidt [15] függőleges koncentrált erővel terhelt körívalakú rudak kritikus terhelésére közöl formulát. A szerzők megmutatják, hogy a vizsgálatok során célszerű bizonyos másodrendű tagokat megtartani.

Lapos körívalakú rudak viselkedését vizsgálva Pi, Bradford et al. [4, 16] rámutatott, hogy fontos a stabilitásvesztés előtti deformációk hatását is figyelembe venni, mivel ellenkező esetben a modell veszélyesen túlbecsülheti a megengedhető terhelést. A szerzők az elmúlt években homogén, lineárisan rugalmas anyagú rudak stabilitását tanulmányozták alaposan az általuk kidolgozott analitikus modellel, amelyben nemlinearitás a forgásmezőn keresztül jelenik meg. A modell kiértékelése számos esetben megtörtént: megoszló, koncentrált terhelésekre; különböző szimmetrikus és nemszimmetrikus, akár rugalmas támaszelrendezésekre. Bateni és Eslami [5] ugyanazokat a kinematikai feltevéseket használják, mint a [4] cikk szerzői. Az eltérés, hogy ez utóbbi munka funkcionálisan gradiens anyagú rudakra alkalmazható.

A görbe rudak rezgései az 1920-as években kerültek az előtérbe. Den Hartog volt az első (1928), aki a szabadrezgéseket vizsgálta. Korai, ám jelentős eredmények találhatók még például a [17, 18] munkákban – a szerzők mind nyúlásmentes középvonalat teteleztek fel.

Szeidl a PhD értekezésében [6] azt vizsgálja, hogyan befolyásolja a középvonal hosszváltozása a szabadrezgések sajátfrekvenciáit, ha konstans radiális erő a körívalakú rúd terhelése. A szerző a Green-féle függvénymátrix használatával éri el az eredményeit. Ennek segítségével a vonatkozó peremérték-feladatot

Fredholm integrálegyenletekkel helyettesíti. Kang et al. [19] a sajátfrekvenciák számításához a Timoshenko elméletet használják és nem hanyagolják el sem a keresztmetszet elfordulásából adódó hatásokat a tehetetlenségi erőrendszer tekintetében, sem pedig a nyírási deformációkat. Tüfekçi és Arpaci [7] egzakt, analitikus megoldási módszert mutat be a sajátfrekvenciák meghatározására. Figyelembe veszik a középvonal nyúlásának hatását, a nyírási deformációkat és a forgásból adódó inerciaerőket egyaránt. Kovács [8] rétegzett rudakat vizsgál. A rétegek közötti kapcsolat lehet tökéletes, de akár el is csúszhatnak egymáshoz képest.

Van még néhány további irodalmi forrás, amelyek a Green függvényt használják dinamikai feladatok megoldására. Szeidl et al. [20] csuklós, illetve befogott görbe rudak szabadrezgéseinek sajátfrekvenciáit határozzák meg ezzel a technikával. Kelemen [21] kiterjeszti az előbbi modellt. A sajátfrekvenciákat, mint konstans, radiális megoszló terhelés függvényét adja meg. Li et al. [22] időben harmonikus, koncentrált erővel terhelt egyenes, Timoshenko rudak rezgéseit vizsgálják.

2. Célkitűzések

Az áttekintett irodalom alapján keresztmetszeti inhomogenitású görbe rudakkal kapcsolatban az alábbi célkitűzéseket fogalmazom meg:

1. Célkitűzés: Néhány homogén anyagú síkgörbe rúdra érvényes klasszikus képlet általánosítása. A részleteket is kibontva az alábbi célkitűzésekkel élek:

- Két, homogén görbe rúdra érvényes elemi összefüggés általánosítása keresztmetszeti inhomogenitás esetére. Ezek a képletek a normálfeszültség eloszlását adják meg a rúderő és hajlítónyomaték ismeretében.
- Egy további összefüggés levezetése a nyírófeszültség számítására.
- A nyírási korrekciós tényezőt adó összefüggés származtatása.
- A zárt alakú képletekkel számított megoldások összehasonlítása kereskedelmi végeselemes szoftver számításaival.

2. Célkitűzés: Az áttekintett irodalomban nem találtam eredményeket keresztmetszeti inhomogenitású (lapos) görbe rudak stabilitásvizsgálatára vonatkozóan. Ennek alapján, figyelembe véve a homogén görbe rudakkal kapcsolatos vizsgálatokat, illetve azok eredményeit, az alábbi részcélokat fogalmazom meg:

- Olyan új nemlineáris modell származtatása a virtuális munka elvből, amely nem csak lapos rudakra érvényes. Elvárás, hogy ez pontosabb legyen, mint a [4,23] cikkekben alkalmazott modell. További előnye az új modellnek, hogy figyelembe veszi majd a keresztmetszeti inhomogenitás hatását is.

- Számítások végzése két végén csuklóval megtámasztott, illetve befogott, valamint két végén csuklóval és az elfordulást gátló rugóval megtámasztott keresztmetszeti inhomogenitású síkgörbe rudakra, ha koronaponti függőleges koncentrált erő a terhelés. A számítások célja a kritikus terhelés meghatározása szimmetrikus és antiszimmetrikus kihajlási alak esetén.
- A jellemző stabilitási tartományok és határai megkeresése.
- A kapott eredmények összehasonlítása a homogén rudakkal kapcsolatos egyes irodalmi eredményekkel, valamint az Abaqus végeselemes szoftver számításaival.

3. **Célkitűzés:** Keresztmetszeti inhomogenitású terhelt görbe rudak rezgéseinek vizsgálata. A részleteket is kibontva az alábbi célokat fogalmazom meg:

   - Azon peremérték feladatok levezetése, amelyek megoldásából megállapítható, hogyan befolyásolja a két végén csuklóval megtámasztott csuklós, illetve befogott heterogén síkgörbe rudak sajátfrekvenciáit a koronapontban működő függőleges, koncentrált erő.
   - A vonatkozó Green-féle függvénymátrixok meghatározása, figyelembe véve, hogy a koncentrált erő a szerkezet görbületi középpontjától kifelé (húzás), illetve a középpont felé (nyomás) is irányulhat. (A támaszok hatását is figyelembe véve összesen négy Green-féle függvénymátrixról van szó).
   - További cél a sajátfrekvenciákat adó sajátérték-feladatok (amelyek függenek a terheléstől) visszavezetése homogén Fredholm integrálegyenletekkel meghatározott sajátérték-feladatokra. (Négy homogén integrál egyenletrendszer levezetése a cél).
   - Az utóbbi négy sajátérték-feladat helyettesítése algebrai sajátértékfeladatokkal, illetve az algebrai sajátérték-feladatok numerikus megoldása.
   - A terhelés rezgések sajátfrekvenciáira gyakorolt hatásának vizsgálata (ha a terhelés zérus, visszakapjuk a szabadrezgésekre vonatkozó összefüggéseket).
   - Az eredmények összehasonlítása végeselemes számításokkal, illetve kísérleti eredményekkel.

3. Az elvégzett vizsgálatok

A mechanikai modellek levezetésekor az alábbi fontosabb egyszerűsítő feltevéseket használtam ki:

- keresztmetszeti inhomogenitás esete forog fenn,
- az elmozdulások és alakváltozások kellően kicsik,
- egydimenziósak a rúdmodellek,
- az (E-vel súlyozott) középvonal a saját síkjában marad,
- a síkgörbe rúd állandó keresztmetszetű és állandó a kezdeti görbületi sugár,
- a rúd keresztmetszete szimmetrikus a rúd középvonala által meghatározott síkra nézve,
- érvényes a klasszikus egyrétegű (*single layer*) elmélet,
- a σ_ξ normálfeszültség jóval nagyobb, mint a σ_η és σ_ζ feszültségkomponensek.

A normálfeszültséggel kapcsolatos zárt alakú képletek levezetésekor feltételeztem az Euler-Bernoulli hipotézis helyességét. A modell olyan terheléseknél alkalmazható, amikor az igénybevétel hajlítás és rúderő (a nyírás hatása feltevés szerint ekkor elhanyagolható). Először az egzakt összefüggést vezettem le. További átalakítások eredménye a Grashof (Winkler) formula általánosítása. Eszerint a hajlítónyomaték konstans és hiperbolikus, a rúderő pedig konstans normálfeszültség-eloszlást eredményez a keresztmetszet felett. Ezen felül új eredmény egy másik formula levezetése a normálfeszültségre és a zérusvonal koordinátájára vonatkozóan tiszta hajlítás esetén – mindkét mennyiség függ az anyagi eloszlástól.

A nyírófeszültséget a rúd egy szakaszának egyensúlyát leíró összefüggésből vezettem le, vagyis a kinematikai egyenletek nem teljesülnek maradéktalanul. Az eredmény Grashof egyensúlyi módszerének kiterjesztése keresztmetszeti inhomogenitásra. Az eljárás előnye a viszonylag egyszerű, zárt alakú formula. A nyírási korrekciós tényezőre is levezettem a kapcsolatot.

A stabilitási probléma modellje is az Euler-Bernoulli hipotézisen alapszik. Egyúttal a kinematikai feltevés a forgásokon keresztül másodrendű tagot is tartalmaz. Tekintve, hogy a vizsgált szerkezeti elem alapvetően egy lapos görbe rúd, a tangenciális elmozdulások forgásokra való hatása elhanyagolható. Mivel az előzmények alapján a stabilitásvesztés előtti deformációk jelentősek, ezek hatásával is számoltam. A virtuális munka elvből vezettem le a vonatkozó egyensúlyi egyenleteket, feltételezve, hogy a rúd koncentrált és megoszló erővel terhelt, és két végén eltérő merevségű spirálrugóval van megtámasztva. A kiértékelést arra az esetre végeztem el, amikor a terhelés koronaponti koncentrált erő. Szimmetrikus támaszelrendezés esetén egy egyszerűsített félrúd modellel helyettesítettem a problémát. A középvonal (nemlineáris) axiális nyúlása állandónak vehető a tekintett viszonyok mellett. Ezt is kihasználva olyan negyedrendű, közönséges differenciálegyenlet írja le matematikailag a kitűzött feladatot, amely zárt alakban megoldható. Érdemes megemlíteni, hogy az utóbbi megállapítások érvényesek maradnak az egyes fizikai mennyiségek stabilitásvesztéshez tartozó a növekményeire is.

Szemi-analitikusan kiértékeltem csuklós, befogott és rugalmasan megtámasztott rudakat. Ez érinti többek között a stabilitásvesztés előtti kritikus egyensúlyt is az anyag, a geometria és a terhelés függvényében. Ahogy az az eredményekből kiderül, előfordulhat, hogy nincs stabilitásvesztés, amennyiben viszont van – az esetek többségére ez jellemző – akkor a kihajlott rúd alakja vagy szimmetrikus (ekkor nem zérus a nyúlásnövekmény), vagy antiszimmetrikus (ekkor zérus a nyúlásnövekmény). Meghatároztam a vonatkozó kritikus nyúlásokat, és ezek ismeretében a kritikus terheléseket is kiszámítottam. Kiderült, hogy a nagyon lapos rudaknál nem várható stabilitásvesztés, míg a további esetekben meghatároztam, hogy a két lehetséges kihajlási alakból melyik következik be először adott geometria és anyagjellemzők mellett.

Csuklós rudaknál antiszimmetrikus kihajlási alak várható, míg befogott rudaknál a szimmetrikus alak a domináns. Ha a támaszoknál (zérus) [a végtelenhez tart] a rugómerevség, akkor visszakapjuk a (csuklós) [befogott] rudakra érvényes összefüggéseket. A rudak viselkedésének alaposabb megértéséhez megrajzoltam az elsődleges egyensúlyi utakat is minden egyes jellemző stabilitási tartományra. Kereskedelmi végeselemes szoftverrel végzett számítások és irodalmi forrásokkal való összevetés egyaránt azt jelzi, hogy az eredmények reálisak mindhárom támaszelrendezésre feltéve, hogy a nyílásszög kisebb, mint három radián. Egyszerű számpéldák illusztrálják, hogy a heterogenitásnak jelentős hatása van a megengedhető terhelésre, azaz nem lehet figyelmen kívül hagyni ezt a tulajdonságot.

A rezgéstani vizsgálatoknál a lineáris elméletet és egy, az Euler-Bernoulli hipotézisen alapuló rúdmodellt használtam. További változás az előzőekhez képest, hogy a tangenciális elmozdulások forgásokra való hatását ezúttal megtartottam. Arra a kérdésre kerestem a választ, hogyan hat a sajátfrekvenciákra a koronaponti koncentrált, függőleges irányú terhelés. A koncentrált erővel való terhelés hatására kialakuló egyensúlyt a virtuális munka elvből vezettem le. A koncentrált erő állandó nyúlást okoz a középvonalon. A stabilitásvesztés előtti egyensúlyt közönséges differenciálegyenletek írják le.

Ami a feladat dinamikai részét illeti, a tehetetlenségi erők figyelembevételével harmonikus rezgésekre koncentráltam. A modell egy önadjungált sajátérték-feladatra vezet, ahol a sajátértékek arányosak a sajátfrekvenciák négyzetével. A megoldást külön kellett megkeresni húzó- és nyomóerő esetén.

Zárt alakban meghatároztam a Green-féle függvénymátrixot csuklós és befogott rudakra. A megoldási eljáráshoz szükséges, hogy a közönséges lineáris differenciálegyenletek általános megoldása (alaprendszere) zárt alakban ismert legyen. A Green-féle függvénymátrixok ismeretében mind a négy (egy közönséges differenciálegyenlet-rendszerrel és a vonatkozó homogén peremfeltételekkel meghatározott) sajátérték probléma átalakítható homogén Fredholm integrálegyenletekkel leírható sajátérték-feladatra. Ezek a [6] tanulmányban közölt technikával megoldhatók numerikusan, algebrai sajátérték-feladatra történő visszavezetéssel.

A rezgéstani vizsgálatoknál figyelmet kellett fordítani a kritikus nyúlásra is, mert amennyiben ezt elérjük, kihajlás következik be. Továbbá, mivel a gyakorlatban rendszerint a terhelés ismert és a modellben a nyúlás a paraméter, a kettő közti egyértelmű kapcsolatot is levezettem.

A szabad- és terhelt rezgésekre érvényes eredményeket kiértékeltem és összehasonlítottam irodalmi adatokkal és végeselemes számításokkal. Ezeken felül, néhány kedves romániai kollégának köszönhetően mérési eredményekkel is össze tudtam vetni a modellt.

Ami az eredményeket illeti, a görbe rúd páros terheletlen sajátfrekvenciáinak és az ugyanolyan hosszúságú és anyagú csuklós megtámasztású egyenes rúd első sajátfrekvenciáinak hányadosa csak a görbe rúd nyílásszögétől függ, míg a páratlan frekvenciák esetén a keresztmetszeti geometriától és az anyagi eloszlástól is.

Csuklós rudaknál a második terhelt és terheletlen frekvenciák hányadosának négyzete igen jó közelítéssel lineárisan (nő) [csökken] a nyúlás-kritikus nyúlás viszonyszámtól, amennyiben az erő (húzóerő) [nyomóerő]. További jellegzetesség, hogy a nyílásszög, az anyag és a geometria nincs hatással erre a kapcsolatra. Befogott rudaknál kevésbé lineáris ez a hányados, és jobban függ a nyílásszögtől is. Az anyagi összetétel frekvenciákra gyakorolt hatását egyszerű számpéldák illusztrálják.

4. Új tudományos eredmények

Az első célkitűzés az volt, hogy egyszerű összefüggéseket vezessek le a keresztmetszeti inhomogenitású görbe rudakban kialakuló felszültségállapot közelítésére oly módon, hogy a klasszikus homogén képleteket általánosítom. Ez magában foglalja a normál és a nyírófeszültség számítását. Ugyanakkor a nyírási korrekciós tényezőt is általánosítottam. A legfontosabb eredményeket foglalja össze röviden az

1. Tézis

1.a. Levezettem egy egzakt és két közelítő összefüggést a normálfeszültség számítására amennyiben a keresztmetszeti inhomogenitású görbe rúd terhelése rúderő és hajlítónyomaték. A két közelítő modell jól ismert, homogén esetre vonatkozó összefüggések általánosításai. Származtattam egy további formulát a nyírófeszültség számítására.

1.b. Ezeken felül a nyírási korrekciós tényezőre is felírtam egy összefüggést.

A feszültségeloszlásokra kapott új képletek eredményeit összehasonlítottam néhány végeselemes számítással. Jó egyezés tapasztalható.

Ami a vonatkozó publikációkat illeti, lásd a (8), (12) és (19) hivatkozásokat. Habár a (12) és (19) esetén a cím megegyezik, az utóbbi jóval részletesebb.

2. Tézis

Keresztmetszeti inhomogenitású síkgörbe rudak rugalmas stabilitását vizsgáltam, amennyiben a rúd terhelése koronaponti koncentrált, függőleges irányú merev erő.

2.a. Levezettem egy új modellt keresztmetszeti inhomogenitású körívalakú rudak stabilitásának vizsgálatára. Ez mind a stabilitásvesztés előtti, mind az azt követő (szimmetrikus, vagy antiszimmetrikus) egyensúlyi helyzetet pontosabban közelíti a korábbi, homogén [4, 24], vagy funkcionálisan gradiens anyagra érvényes [5] irodalmi modelleknél. Bár elhanyagoltam a tangenciális irányú elmozdulások hatását a forgásokra – a [4, 24] cikkek szintén élnek ezzel a feltevéssel – összességében az új modell kevesebb egyszerűsítést alkalmaz, következésképp a kritikus terhelésekre vonatkozó eredmények (összefüggések) pontosabbak, mint a korábbi munkák eredményei.

2.b. Kiértékeltem a modellt (a) két végén csuklóval megtámasztott; (b) két végén befogott; (c) két végén spirálrugóval megtámasztott rudakra. Meghatároztam a lehetséges stabilitási tartományokat (nincs stabilitásvesztés, szimmetrikus/antiszimmetrikus stabilitásvesztés a domináns). A jellemző tartományok határai nem állandóak a λ módosított karcsúsági tényezőben, mint a korábban is említett modelleknél, hanem függenek az m paramétertől is, tehát az E-vel súlyozott inerciasugártól és a görbületi sugártól is.

2.c. Összehasonlításokat végeztem korábbi modellekkel és végeselemes számításokkal. Ezek alapján a modell nem csak szigorúan véve lapos rudaknál közelíti jól a megengedhető terhelést, hanem egészen három radián nyílásszögig. A korábbi modellel szemben kisebbek az eltérések, ha kisebb a nyílásszög.

2.d. A keresztmetszeti inhomogenitásnak jelentős hatása lehet a kritikus terhelésre – ezt az állítást egyszerű számpéldával illusztráltam.

Ami a vonatkozó publikációkat illeti, lásd a (2), (3), (5), (10), (11), (13)-(18) és (20) hivatkozásokat.

3. Tézis

Keresztmetszeti inhomogenitású görbe rudak rezgéseit is vizsgáltam, amennyiben koronaponti koncentrált, függőleges irányú erő a terhelés.

3.a. Olyan önadjungált sajátérték-feladatokat vezettem le, amelyek megoldásával meghatározható hogyan befolyásolja a sajátfrekvenciákat a radiális terhelés. Csuklós és befogott rúdra egyaránt meghatároztam a Green-féle függvénymátrixokat feltéve, hogy a rúd elő van terhelve egy koronaponti koncentrált erővel. Itt figyelembe kellett venni, hogy a közönséges differenciálegyenletek elfajulók.

3.b. A Green-féle függvénymátrixokkal az önadjungált sajátérték-feladatokat homogén Fredholm integrálegyenletekre vezettem vissza, amikből a sajátfrekvenciákat meghatároztam. Ez összesen négy, homogén Fredholm integrálegyenlet-rendszert jelent. Az integrálegyenletek minden olyan merev (konzervatív) terhelésre használhatók, amelyekre nézve állandó a középvonal menti fajlagos nyúlás – ez lehet akár pozitív, akár negatív előjelű mennyiség. A sajátérték-feladatokat algebrai egyenletrendszerrel helyettesítettem és numerikusan megoldottam.

3.c. A második terhelt és terheletlen frekvenciák négyzetének hányadosa jó közelítéssel lineárisan függ a középvonal nyúlása/kritikus nyúlás hányadostól és független a geometriától, valamint az anyagi összetételtől csuklós rudaknál. Befogott esetben ugyanakkor a kapcsolat inkább kvadratikus és a nyílásszögnek érezhető befolyása van az eredményekre. A terhelés-nyúlás kapcsolat ismeretében meghatározható az adott erőhöz tartozó nyúlás értéke és így a terhelt rúd sajátfrekvenciái. Ha zérus a nyúlás, visszakapjuk a szabadrezgésekhez tartozó frekvenciákat.

3.d. A numerikus számítási eredményeket néhány esetben végeselemes számításokkal és kísérleti eredményekkel is összevetettem. Ezek alapján a modell jól közelíti a frekvenciákat.

Ami a vonatkozó publikációkat illeti, lásd az (1), (4), (6), (7), (9), (11) és (20) hivatkozásokat.

5. Az eredmények alkalmazási lehetőségei

Az elért eredmények alkalmazhatók homogén és heterogén anyagú görbe rudakra abból a célból, hogy az áttekintett viszonyok mellett megjósoljuk azok viselkedését (esetleges tönkremenetelét, stabilitásvesztését, rezgéseit). Mivel a szakemberek folyamatosan publikálnak egyre újabb és általánosabb modelleket, lehetőség nyílik egyre pontosabban közelíteni a tényleges viselkedést és így csökkenteni a bizonytalanságokat és költségeket megtakarítani.

Némelyik eredményt, úgy gondolom, lehetne hasznosítani az oktatásban is, mivel manapság a nem homogén anyagú rudak is egyre nagyobb teret nyernek a mérnöki gyakorlatban. Elsősorban a feszültségeloszlásokra levezetett zárt alakú formulákra gondolok itt. Továbbá a stabilitási modellt is be lehetne egyszerűsítve építeni a tantervbe annak érdekében, hogy szélesítse a hallgatók látókörét, illetve tudását a stabilitásvesztés jelenségével kapcsolatban, hiszen a tananyag sokszor csak az Euler-féle nyomott rudakra vizsgálatára korlátozódik.

Ezeken felül a levezetett modellek ún. benchmark célokat is szolgálhatnak további modellek ellenőrzésére.

6. További kutatási feladatok

A levezetett modelleken számos javítást, finomítást és általánosítást lehetne a jövőben végrehajtani. Legegyszerűbben a terhelés és/vagy támaszok alkalmas megváltoztatásával még jobban ki lehetne terjeszteni azt a kört, amelyre nézve a vizsgálatok elvégezhetők lennének – például akár nem szimmetrikus támaszelrendezésre, vagy háromcsuklós ívekre gondolok itt. Megjegyzem, hogy az egyik oldalon csuklóval megtámasztott, a másikon befogott, illetve a két végén csuklóval és az elfordulást gátló rugóval megtámasztott rudakra nézve folyamatban vannak a rezgéstani vizsgálatok.

A stabilitási modell feltevéseit megtartva érdekes kérdés lehet, hogyan változnak a jellemző stabilitási tartományok és kihajlási alakok, amennyiben a rúd nem a koronapontban van terhelve sugárirányú, vagy épp függőleges erővel. A poszt-kritikus, de akár a dinamikai viselkedéssel is érdemes lenne foglalkozni. Lehetne egydimenziós végeselemes modellt is készíteni, ahol véges nyúlások és/vagy forgások jelennének meg.

Ugyanakkor olyan további kérdések is felvetődhetnek, hogyan lehetne az itt bemutatott modellek tapasztalatait felhasználni nem körívalakú rudaknál, nem síkbeli feladatoknál, bimodulusú anyagoknál, nyírási deformációk figyelembevételénél, a rétegek közötti csúszás figyelembevételénél, stb.

Nagy pozitívum lenne kísérletekkel is igazolni az eredmények helyességét. Ehhez kapcsolódóan van egy jelenleg is zajló együttműködés a brassói Transilvania Egyetemmel.

7. A jelölt vonatkozó publikációi

Idegen nyelvű folyóiratban közölt cikkek

(1) L. Kiss és Gy. Szeidl: Vibrations of pinned-pinned heterogeneous circular beams subjected to a radial force at the crown point. *Mechanics Based Design of Structures and Machines: An International Journal*, **43**(4), 2015, 424-449.

(2) L. Kiss és Gy. Szeidl: Nonlinear in-plane stability of heterogeneous curved beams under a concentrated radial load at the crown point. *Technische Mechanik*, **35**(1), 2015, 1-30.

(3) L. Kiss és Gy. Szeidl: In-plane stability of fixed-fixed heterogeneous curved beams under a concentrated radial load at the crown point. *Technische Mechanik*, **35**(1), 2015, 31-48.

(4) L. Kiss, Gy. Szeidl, S. Vlase, B. P. Gálfi, P. Dani, I. R. Munteanu, R. D. Ionescu és J. Száva: Vibrations of fixed-fixed heterogeneous curved beams loaded by a central force at the crown point. *International Journal for Engineering Modelling*, **27**(3-4), 2014, 85-100.

(5) L. Kiss: In-plane buckling of rotationally restrained heterogeneous shallow arches subjected to a concentrated force at the crown point. *Journal of Computational and Applied Mechanics*, **9**(2), 2014, 171-199.

Magyar nyelvű folyóiratban közölt cikkek

(6) Kiss L. P.: Heterogén anyagú síkgörbe rúd szabadrezgéseinek sajátfrekvenciái, GÉP, **LXIV**(5), (2013), 16-21.

(7) Kiss L. P. és Szeidl Gy.: Tetőpontjában sugárirányú koncentrált erővel terhelt heterogén anyagú síkgörbe rúd rezgései, *Multidiszciplináris tudományok: A Miskolci Egyetem közleménye*, **3**(1-2), (2013), 67-82.

(8) Kiss L. P.: Heterogén síkgörbe rudak lehetséges mechanikai modellje, *Multidiszciplináris tudományok: A Miskolci Egyetem közleménye*, **2**(1), (2012), 61-76.

Konferencia cikkek konferencia kiadványban (könyvben)

(9) Gy. Szeidl és L. Kiss (Szerk.: S. Vlase): *Vibrations of heterogeneous curved beams subjected to a radial force at the crown point*, Proceedings of the 5th International Conference Computational Mechanics and Virtual Engineering, COMEC 2013, 2013. október 24 - 25, Brassó, Románia, pp. 24-33. ISBN: 978-606-19-0225-5.

(10) Gy. Szeidl és L. Kiss (Szerk.: S. Vlase): *A nonlinear mechanical model for heterogeneous curved beams*, Proceedings of the 4th International Conference on Advanced Composite Materials Engineering, COMAT, 2012. október 18 - 20 Brassó, Románia, Volume 2, pp. 589-596. ISBN 0981730051.

(11) Gy. Szeidl és L. Kiss (Szerk.: S. Vlase): *Vibrations and stability of heterogeneous curved beams*, Proceedings of the 4th International Conference on Computational Mechanics and Virtual Engineering COMEC

2011, 2011. október 20 - 22. Brassó, Románia, pp. 471-476. ISBN 978-973-131-122-7.

(12) L. Kiss és Gy. Szeidl: *Stresses in curved beams made of heterogeneous materials*, microCAD 2011: International Scientific Conference, 2011. 03. 31 - 04. 01., Miskolc, Szekció: Applied Mechanics, pp. 13-18. ISBN 978-963-661-958-9.

Konferencia cikkek CD-n

(13) Gy. Szeidl és L. Kiss: *Stability analysis of pinned-pinned shallow circular beams under a central concentrated load.* microCAD 2014: International Multidisciplinary Scientific Conference, 2014. április 10 - 11, Miskolc, D4 szekció: Mechanical Modelling and Finite Element Simulation, Paper 40., 8p. ISBN 978-963-358-051-6.

(14) L. Kiss: *Stability of heterogeneous curved beams: A nonlinear formulation of the problem.* microCAD 2013: International Scientific Conference, 2013. március 21 - 22, Miskolc, Szekció: Applied Mechanics, Paper 7., 6p. ISBN 978-963-358-018-9.

(15) L. Kiss: *In-plane stability of heterogeneous circular arches*, 8th International Conference of PhD Students, 2012. augusztus 6 - 10, Miskolc, Szekció: Engineering Sciences, Paper 9., 8p. ISBN 978-963-661-994-7.

(16) Gy. Szeidl és L. Kiss: *Stability of heterogeneous shallow arches subjected to a concentrated dead load*, microCAD 2012: International Scientific Conference, 2013. március 29 - 30, Miskolc, Paper 9., 8p. ISBN 978-963-661-773-8.

Konferencia cikkek magyar nyelven

(17) Kiss L., Szeidl Gy.: *Heterogén lapos görbe rudak stabilitásvizsgálata*, OGÉT 2012, XX. Nemzetközi Gépészeti Találkozó, 2012. 04.19-22., Kolozsvár, Románia, pp. 234-237. ISSN 2068-1267.

Teljes terjedelmű cikkek egyedi kiadványokban

(18) Kiss L.: Heterogén anyagú lapos görbe rudak stabilitásvizsgálata. *Diáktudomány: A Miskolci Egyetem Tudományos Diákköri Munkáiból 2011-2012.* (2012), pp. 82-88. ISSN 2062-07-21.

(19) Kiss L.: Stresses in Curved Beams Made of Heterogeneous Materials. *Diáktudomány: A Miskolci Egyetem Tudományos Diákköri Munkáiból 2010-2011.* (2011), pp. 51-56. ISSN 2062-07-21.

Konferencia előadások

(20) KISS L., SZEIDL GY.: Heterogén anyagú síkgörbe rudak szabadrezgéseinek és stabilitásának vizsgálata. XI. Magyar Mechanikai Konferencia. 2011. augusztus 29-31, Miskolc.

Hivatkozások

[1] Kozák I. and Szeidl Gy. *Fejezetek a Szilárdságtanból.* Miskolci Egyetem, 2012.

[2] Csizmadia B. and Nándori E. *Mechanika mérnököknek: Szilárdságtan.* Nemzeti Tankönyvkiadó, 2002.

[3] I. Ecsedi and K. Dluhi. A linear model for the static and dynamic analysis of non-homogeneous curved beams. *Applied Mathematical Modelling*, 29:1211–1231, 2005.

[4] M. A. Bradford, B. Uy, and Y.-L. Pi. In-plane elastic stability of arches under a central concentrated load. *Journal of Engineering Mechanics*, 128(7):710–719, 2002.

[5] M. Bateni and M. R. Eslami. Non-linear in-plane stability analysis of FGM circular shallow arches under central concentrated force. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 60:58–69, 2014.

[6] Szeidl Gy. *A súlyponti szál hosszváltozásának hatása a körívalakú rúd saját síkjában végbemenő szabadrezgéseinek sajátfrekvenciáira.* PhD értekezés, Mechanikai Tanszék, Miskolci Egyetem, 1975.

[7] E. Tüfekçi and A. Arpaci. Exact solution of in-plane vibrations of circular arches with account taken of axial extension, transverse shear and rotatory inertia affects. *Journal of Sound and Vibration*, 209(5):845–856, 1997.

[8] B. Kovács. Vibration analysis of layered curved arch. *Journal of Sound and Vibration*, 332:4223–4240, 2013.

[9] F. P. Beer and E. R. Johnston. *Mechanics of Materials.* Mc Graw Hill, Metric edition, 1987.

[10] L. Ascione and F. Fraternali. A penalty model for the analysis of curved composite beams. *Computers & Structures*, 45(5/6):985–999, 1991.

[11] J. M. Segura and G. Armengaud. Analytical formulation of stresses in curved composite beams. *Archive of Applied Mechanics*, 68:206–213, 1998.

[12] A. Baksa and I. Ecsedi. A note on the pure bending of nonhomogenous prismatic bars. *International Journal of Mechanical Engineering Education*, 37(2):118–129, 2009.

[13] E. Hurlbrink. Berechnung von rohrenartigen Kärpern, die unter ausserem Drucke stehen. *Schiffbau*, 9(14):517–523, 1907-1908.

[14] E. Chwalla and C. F. Kollbrunner. Beiträge zum Knickproblen des Bogenträgers und des Rahmens. *Sthalbau*, 11(10):73–78, May 1938.

[15] D. A. DaDeppo and R. Schmidt. Sidesway buckling of deep crcular arches under a concentrated load. *Journal of Applied Mechanics,ASME*, 36(6):325–327, June 1969.

[16] Y.-L. Pi and N. S. Trahair. Non-linear buckling and postbuckling of elastic arches. *Engineering Structures*, 20(7):571–579, 1998.

[17] E. Volterra and J. D. Morrel. Lowest natural frequency of elastic arc for vibrations outside the plane of initial curvature. *Journal of Applied Mechanics*, 12:624–627, 1961.

[18] S. Timoshenko. *Vibration problems in engineering.* D. Van Nonstrand, 1955.

[19] K. Kang, C. W. Bert, and A. G. Striz. Vibration analysis of shear deformable circular arches by the differential quadrature method. *Journal of Sound and Vibration*, 181(2):353–360, 1995.

[20] G. Szeidl, K. Kelemen, and Á. Szeidl. Natural frequencies of a circular arch – computations by the use of Green functions. *Publications of the University of Miskolc, Series D. Natural Sciences, Mathematics*, 38:117–132, 1998.

[21] K. Kelemen. Vibrations of circular arches subjected to hydrostatic follower loads – computations by the use of the Green functions. *Journal of Computational and Applied Mechanics*, 1(2):167–178, 2000.

[22] X. Y. Li, X. Zhao, and Y. H. Li. Green's functions of the forced vibration of Timoshenko beams with damping effect. *Journal of Sound and Vibration*, 333:1781–1795, 2014.

[23] M. A. Bradford Y. L. Pi. Non-linear in-plane analysis and buckling of pinned-fixed shallow arches subjected to a central concentrated load. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 47:118–131, 2012.

[24] Y. L. Pi, M. A. Bradford, and F. Tin-Loi. Non-linear in-plane buckling of rotationally restrained shallow arches under a central concentrated load. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 43:1–17, 2008.