

MISKOLCI EGYETEM
GÉPÉSZMÉRNÖKI ÉS INFORMATIKAI KAR



**KÖRHENGERHÉJJAL MEREVÍTETT KÖRLEMEZ
STABILITÁSVIZSGÁLATA**

PhD értekezés tézisei

KÉSZÍTETTE:

Burmeister Dániel
okleveles gépészmérnök

SÁLYI ISTVÁN GÉPÉSZETI TUDOMÁNYOK DOKTORI ISKOLA,
GÉPÉSZETI ALAPTUDOMÁNYOK TÉMATERÜLET,
SZILÁRD TESTEK MECHANIKÁJA TÉMACSOPORT

DOKTORI ISKOLA VEZETŐ:

Dr. Tisza Miklós
az MTA doktora, egyetemi tanár

TÉMACSOPORT VEZETŐ:

Dr. Kozák Imre
az MTA rendes tagja, professor emeritus

TÉMAVEZETŐ:

Dr. Szeidl György
az MTA doktora, professor emeritus

Miskolc
2014

Burmeister Dániel

**KÖRHENGERHÉJJAL MEREVÍTETT KÖRLEMEZ
STABILITÁSVIZSGÁLATA**

PhD értekezés tézisei

Miskolc
2014

Bíráló Bizottság

Elnök:

Dr. Páczelt István DSc, professor emeritus, Miskolci Egyetem

Titkár:

Dr. Kovács Béla CSc, egyetemi docens, Miskolci Egyetem

Tagok:

Dr. Égert János CSc, egyetemi tanár, Széchenyi István Egyetem

Dr. Jármái Károly DSc, egyetemi tanár, Miskolci Egyetem

Dr. Váradi Károly DSc, egyetemi tanár, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Hivatalos bírálók:

Dr. Kovács Ádám PhD, egyetemi docens, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Dr. Hegedűs István DSc, professor emeritus, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

1. Tudományos előzmények

Mérnöki szerkezetek stabilitásának vizsgálata hosszú múltra tekint vissza. Hosszú karcsú rudak kihajlását már Euler is vizsgálta. A lemezek, ezen belül a körlemezek stabilitási problémájával foglalkozó első cikk 1890-ben jelent meg [1]. Azóta számos a kérdéskörrel foglalkozó tanulmány jelent meg. A teljesség igénye nélkül emeljük ki ezek közül a legfontosabbaknak vélt [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8] tanulmányokat.

Egy szerkezet kihajlással szembeni ellenálló képességét többféleképpen növelhetjük. Alkalmazhatunk különféle megtámasztásokat a szerkezet peremein avagy a szerkezeti működést nem gátló és alkalmasan megválasztott közbenső helyen, helyeken. Körlemez esetén a lemez peremén és a középső pontban egyidejűleg alkalmazott megtámasztás, körgyűrű alakú lemeznél pedig a két peremén egyidejűleg működő támaszok alkalmazása lehet ilyen megoldás. Valamelyik támasz helyett vagy amellett még további, koncentrikus támaszokat is beépíthetünk a lemez stabilitásának növelésére. Ezen felül ha olyan megtámasztást alkalmazunk, amely gátolja a lemez elfordulását, akkor a merevítő hatás tovább fokozható.

Thevendran és Wang [9] cikkükben peremein csavar rugóval és/vagy görgősen megtámasztott körgyűrű alakú lemezt vizsgáltak a Rayleigh-Ritz módszer segítségével. A rugómerevség alkalmas megválasztásával a megfogást (a befogást) is természetesen képesek voltak modellezni. Laura és szerzőtársai [10] alatti cikkükben közbenső helyen és a peremén görgős megtámasztású, továbbá a peremén forgás ellen rugalmasan megfogott körlemezt vizsgálnak ugyancsak a Rayleigh-Ritz módszer felhasználásával, tengelyszimmetrikus alakváltozások feltételezése mellett.

Az előbbivel megegyező szerkezet stabilitását vizsgálják Wang és szerzőtársai nem tengelyszimmetrikus alakváltozást is feltételezve a Kirchhoff lemezelmélet alapján [11, 12], majd ezt követően a Mindlin-féle elmélettel számolva [13]. A megtámasztás helyének a stabilitás értelmében vett optimális megválasztása is része a munkájuknak.

Sűrűn bordázott lemez vizsgálata oly módon is végezhető, hogy a merevítések hatását a lemez felületén átlagoljuk, és ortotrop anyagmodellt alkalmazunk, melynek elméleti háttéréről bővebben Troitsky [14] alatti művében olvashatunk. A merevítésnek ily módon való figyelembevételével Simitses és szerzőtársa [15], valamint Srinivasan és szerzőtársa [16] alatti cikkükben foglalkoztak, melyben sugárirányban és koncentrikusan elhelyezett sűrű merevítéssel ellátott körgyűrű illetve körlemez alakú lemez stabilitása és szabadrezgései kerültek bemutatásra. Kumelj és szerzőtársa pedig olyan ortotrop körgyűrű alakú lemez stabilitását vizsgálták, melynek külső és belső peremén is a lemez síkjában működő megoszló terhelés működött [17].

Alkalmazhatunk kevés számú diszkrét merevítéseket lemezeken. Körlemez pereme mentén elhelyezett görbe rúd mint merevítő elem hatását a stabili-

tásra Phillips és szerzőtársa cikke [18] vizsgálta. Turvey [19] alatti cikkében hasonlóan merevített körlemez esetén kísérleti eredményekről is beszámol, de stabilitási kérdésekkel nem foglalkozik. A szerző és munkatársai egy másik tanulmánya az átmérője mentén merevített körlemez egyes feladatait vizsgálja, de stabilitási kérdésekkel ez a cikk sem foglalkozik [20]. Irie és szerzőtársai pedig több sugárirányú merevítést tartalmazó körgyűrű alakú lemez stabilitását és szabadrezgéseit vizsgálta [21].

Bareeva és Lizarev koncentrikus körgyűrű alakú merevítésnek a lemez síkfeszültségi állapotra gyakorolt hatását vették figyelembe [22], míg Rossettos és szerzőtársa a merevítésnek az elfordulás elleni merevségét vették figyelembe tengelyszimmetrikus [23] és nem tengelyszimmetrikus [24] kihajlási alakok esetén, viszont a merevítés síkfeszültségi állapotra gyakorolt hatását figyelmen kívül hagyták. Az idézett cikkek egyszerűsítéseit Frostig és Simitses [25, 26] alatti tanulmányai már nem tartalmazzák. Az idézett művek tengelyszimmetrikus és nem tengelyszimmetrikus alakváltozás esetére is megadják a megoldást. A koncentrikus körgyűrű alakú merevítést síkgörbe rudakkal modellezték.

Szilasy István egyetemi doktori értekezésében [27] és egy későbbi cikkében [28] is foglalkozott a külső peremén körhengerhéjjal merevített körlemez egyes stabilitási feladataival. Szilassy a Frostig és Simitses [25, 26] által vizsgált feladattal szemben körhengerhéjat és nem pedig síkgörbe rudat alkalmaz merevítő elemként. Maga a héj csak a körlemez külső peremen jelenik meg – érdemes megjegyezni, hogy az idézett szerzők nem ismerik Szilassy eredményeit aki két feladatot vizsgált. Az első feladat tömör körlemezhez kötődött, a második feladat, pedig lyukas körlemez egy peremértékfeladata volt. A szerző feltételezte, hogy (i) a lemez síkjában működő terhelés merev és tengelyszimmetrikus (ii) a körlemez és a körhengerhéj alakváltozás ugyancsak tengelyszimmetrikus. A szerző a körlemez esetén a szögelfordulásra felírt differenciálegyenlet megoldását, a körhengerhéj esetén pedig vékony héjak elméletén alapuló megoldást használta fel.

2. Célkitűzések

A Tudományos előzmények című szakasz alapján tömör indokolással az alábbi célkitűzéseket fogalmazom meg.

A stabilitásvizsgálat körlemezre vonatkozó egyenleteinek – tovább tágítva ezzel a megoldható feladatok körét és meghaladva ily módon Szilassy vizsgálatait [27], [28] – a körlemez függőleges elmozdulására felírt alakját célszerű alkalmazni, nem pedig a szögelfordulásmezőre érvényes és az idézett két publikációban felhasznált alakot. Ennek alapján fogalmazható meg az alábbi és részekre bontott

- 1. Célkitűzés:** (a) Határozzuk meg a kritikus terhelést adó zárt alakú nemlineáris egyenlet(ek)et, kihasználva a körlemez és a héj középfelületének metszészvonalán megkövetelt illesztési feltételeket mind kétoldalúan, mind pedig egyoldalúan merevített körlemez esetén. (b) Számítsuk ki a nemlineáris egyenletek numerikus megoldásával a dimenziómentes kritikus terhelést. (c) Tisztázni kell azt is, hogy hogyan befolyásolja a héj magasságának növelése a kritikus teher értékét. (d) Felvetődik a kérdés, hogy helyettesíthető-e a merevítő héj rugalmas támaszokkal, és ha igen, melyek a támaszjellemzők.

Az 1. Célkitűzésben megfogalmazott alapvető feladat – hogyan befolyásolja a merevítő héj a kritikus terhelés értékét – lyukas körlemez esetén is felvethető és felvetendő. Problémaként jelenik meg ugyanakkor, hogy bár van zárt alakú megoldása a lyukas körlemez stabilitási problémájával kapcsolatos differenciálegyenletnek, de az nehezen kezelhető, mivel a megoldásban álló Bessel függvények indexe is függ a keresett sajátértéktől (a kritikus terheléstől). Az utóbbi körülményt is tükrözi az alábbi

- 2. Célkitűzés:** Alkalmas numerikus módszer felhasználásával – érdemes a módszert a tömör körlemez stabilitási feladatán tesztelni – (a) határozzuk meg a dimenziómentes kritikus terhelést a lyukas körlemez különböző megtámasztásaira kétoldalú (egyoldalú) merevítés esetén. (b) A vizsgálatok eredményei alapján tisztázandó, többek között, a belső perem sugara megváltozásának hatása.

Bár a szerkezet külső peremén működő konstans sugárirányú nyomás tengelyszimmetrikus terhelést ad, nincs garancia arra, hogy a szerkezet stabilitásvesztés utáni alakja is tengelyszimmetrikus lesz. Felvetődik ez esetben a kérdés, hogy a tengelyszimmetrikus, avagy a nem tengelyszimmetrikus alakváltozáshoz tartozik-e a legkisebb kritikus teher. A nem tengelyszimmetrikus kihajlási alak feltételezése ugyanakkor igényesebb mechanikai modell kialakítását tételezi fel. Ehhez kötődik a

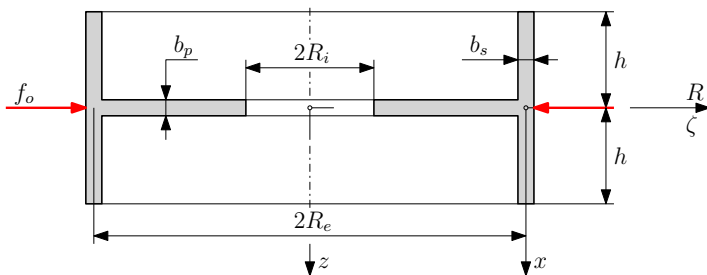
- 3. Célkitűzés:** A Fourier sorfejtés módszerét, valamint alkalmas Galjorkin függvényeket alkalmazva a héjfeladat megoldásában – az utóbbi kérdés kör tekintetében Vlaszov [29] és Jezsó [30] eredményeit is kihasználva – tisztázni kell, hogy hogyan állítható elő a megoldás az egyes Fourier együtthatókra nézve, és hogy milyen perem és illesztési feltételeknek kell, hogy a Fourier együtthatók eleget tegyenek. Ezekre az eredményekre alapozva meghatározható alkalmas numerikus eljárás felhasználásával, hogy mekkora a kritikus teher értéke az összetartozó (azonos Fourier indexű) kihajlási alakok esetén. A számításokat különböző támasz elrendezésekre, valamint kétoldalúan (egyoldalúan) merevített körlemezeire (lyukas körlemezeire) is el kell végezni.

Felvetődik az a kérdés is, hogy miként viselkedik a szerkezet, ha a merevítő körhengerhég nem a lemez külső peremén (tömör körlemez), illetve nem a lemez külső és belső peremén (lyukas körlemez) helyezkedik el. Ami a feladat közvetlen irodalmi előzményeit illeti Frostig [26] cikkére hivatkozunk. Az idézett szerző körgyűrűnek (azaz rúdnak) tekinti a lemez valamely belső sugáránál elhelyezkedő merevítést. Ez a feltevés csak akkor alkalmazható, amint ez azonnal látszik az elnevezésekből is, ha rúdszerű a merevítő elem a szerkezetben. Érdeemes azt is megjegyezni, hogy az irodalomkutatás során nem találtunk más ezen tárgykörben publikált eredményt. A fentiekhez kötődik a

4. **Célkitűzés:** Dolgozzunk ki a közbülső merevítő héj hatásának vizsgálatára alkalmas modellt. Végezzünk számításokat (a) a kritikus terhelés és (b) a héj optimális helyének meghatározására. A vizsgálatok terjedjenek ki a nemszimmetrikus alakváltozások lehetőségének figyelembevételére is.

3. Elvégzett vizsgálatok

A vizsgálat tárgyát képező szerkezet metszeti képe az 1. ábrán látható. A szerkezet egy kör- vagy körgyűrű alakú lemezből és vagy a peremére erősített, vagypedig a külső és belső sugár között közbenső helyen lévő körhengerhéjből áll, amely szimmetrikus a lemez középsíkjára, illetve – ha a külső peremen van felerősítve –, akkor a lemez egy oldalán elhelyezkedő is lehet. Az ábra szimmetrikus és külső peremre történő felerősítés esetén szemlélteti a vizsgált szerkezetet. A szerkezetre ható teher a lemez középsíkjában működő sugárirányú és állandó intenzitású vonalon megoszló merev (iránytartó) erőrendszer.



1. ábra. Geometriai és terhelési viszonyok

Feltételezzük, hogy a lemez és a héj egyaránt vékony, azaz használhatjuk a Kirchhoff-féle klasszikus lemez- és héjméletet. Feltételezzük továbbá, hogy a vizsgált jelenséget (a szerkezet stabilitásvesztését) leíró egyenletek lineárisak. Hőhatásokat nem veszünk figyelembe. A szerkezet mindkét eleme homogén izotrop rugalmas anyagból készült.

Elsőként a külső peremen történő felerősítés esetére taglaljuk az elvégzett vizsgálatokat.

A vizsgálatok során a szerkezetet gondolatban szétválasztjuk két részre (körlemez és héj) és ezt követően a szerkezet egyes elemeire külön-külön írjuk fel a vonatkozó egyenleteket. Az egyes részekre vonatkozó megoldásokat az illesztési feltételek kapcsolják össze.

Tengelyszimmetrikus viszonyok mellett a körhengerhéj sugárirányú elmozdulásmezejét az ismert differenciálegyenletéből állítjuk elő. A héj illesztési feltételekben szereplő fizikai mennyiségeit az elmozdulásmezőből származtatjuk. A feladathoz tartozó tényleges elmozdulásmezőt két részfeladat szuperpozíciójából állítjuk elő. Az első részfeladat szerint a héjat csak a sugárirányú kapcsolati és külső erők terhelik, míg a másik feladat szerint a héjat csak a kapcsolati nyomaték terheli. A részfeladatok elvégzése után a héj és lemez közötti illesztési feltételeket kapunk.

A kör- illetve körgyűrű alakú lemez saját síkjában működő teherből származó alakváltozási és feszültségi állapotát az irodalomból ismert tárcsafeladat megoldásából származtatjuk.

Körlemez tengelyszimmetrikus alakváltozásának feltételezése mellett az elmozdulásmezejét differenciálegyenletének megoldásából és a peremfeltételek felhasználásával előállítottuk a szimmetrikus merevítésű szerkezet kritikus terhelését adó nemlineáris egyenletet. A nemlineáris egyenlet megoldásának számítására és a kritikus terhelés meghatározására Fortran 90 forráskódú program készült. A kapott számítási eredményeket diagramok szemléltetik. Leolvasható az ábrákról hogy a héj magasságának növelésével jelentősen növekszik a kritikus teher. A függvény aszimptotikus lefutású, vagyis a héjmagasság növelésének egy idő után már nincs hatása a kritikus teher értékére. Az egyik oldalán merevített körlemez kritikus terhelését az előzőtől némileg eltérően, oly módon kapjuk meg, hogy az elmozdulások korlátosságát vizsgáljuk. A kritikus teher ilyenkor abból a feltételből számítható, hogy kihajlásnál az elmozdulások végtelenhez tartanak.

Lyukas körlemez stabilitási problémájával kapcsolatos differenciálegyenletnek zárt alakú megoldása nehezen kezelhető, mivel a megoldásban álló Bessel-függvények indexe is függ a keresett sajátértéktől (a kritikus terheléstől). Mivel nem ismert előre a megoldásban álló Bessel-függvények indexe, ezért numerikus úton keressük majd meg a lemez középfelületének lehajlását leíró differenciálegyenlet megoldását, és a numerikus megoldás felhasználásával határozzuk meg a kritikus terhelést.

A numerikus eljárás során a negyedrendű differenciálegyenletet négy darab elsőrendű differenciálegyenletből álló rendszerre transzformáljuk, melynek partikuláris megoldásait alkalmas numerikus módszerrel (Runge-Kutta eljárással) állítjuk elő. Ezen megoldásokat a peremfeltételekbe illesztve egy homogén lineáris egyenletrendszerrel kapunk, melyben szerepel a keresett terhelési

paraméter. Annak kritikus értékét abból a feltételből kapjuk, hogy az egyenletrendszernek csak akkor van triviálistól különböző megoldása, ha eltűnik az együtthatómátrix determinánsa.

Az eljárásra programkód készült, melynek eredményeit diagramok szemléltetik. A szimmetrikus elrendezésű merevítéssel, és az egyoldalú merevítéssel ellátott körgyűrű alakú lemezre mutatják be az ábrák a merevítő héj méretének és a körgyűrű alakú lemez belső sugarának hatását a szerkezet kritikus terhelésére. A héj méretének hatása jellegében hasonló a körlemeznél tapasztaltnál, míg a belső sugár növelésével a kritikus teher értéke is növekszik.

A feladat nem tengelyszimmetrikus alakváltozások feltételezése melletti vizsgálata során a terhelés tengelyszimmetrikus, a vele társuló alakváltozás azonban nem. Ebben az általánosabb esetben a síkfeszültségi feladat megoldása továbbra is érvényes a lemez saját síkjában történő alakváltozásra. Ami azonban a lemez és a héj viselkedését illeti a nem tengelyszimmetrikus alakváltozás feltételezése megváltoztatja a vonatkozó egyenleteket és ebből adódóan a megoldások alakját is.

Nem tengelyszimmetrikus alakváltozások esetén kétváltozós a feladat. Az alkalmazott henger-koordinátarendszerben a lemez elmozdulásmezőjét a polárszög szerint Fourier-sorba fejtünk, melyet az elmozdulásmező differenciálegyenletébe helyettesítve a sorfejtés tagjaira közönséges differenciálegyenleteket kapunk. Ezek megoldásait használjuk fel a lemezben ébredő ugrancsak Fourier-sorba fejtett fizikai mennyiségek számítására.

A körhengerhéj feladatának megoldása során úgy járunk el, hogy először kiküszöböljük a nyíróerőket az egyensúlyi egyenletekből, majd ismételt helyettesítésekkel az egyensúlyi egyenletekben álló érőket és élnyomatékokat a három elmozduláskoordinátával fejezzük ki. Ily módon kapjuk az elmozdulásmezőre vonatkozó alapegyenleteket, amelyek egy három egyenletről álló csatolt differenciálegyenlet-rendszert alkotnak. Identikusan teljesülnek az alapegyenletek, ha az azokban álló elmozduláskoordinátákat a Vlaszov által bevezetett Galjorkin típusú elmozdulásfüggvénnyel fejezzük ki. Ezzel valójában megszüntetjük az alapegyenletek csatolt voltát. Az elmozdulás-koordinátákat, és a belőlük származtatott héjra vonatkozó fizikai mennyiségeket az elmozdulásfüggvényből számítjuk. Érdemes az elmozdulásfüggvényt Fourier-sorba fejteni ugyanolyan módon, mint azt a lemez elmozdulásmezeje esetén tettük. A héj középfelületének elmozdulás-koordinátái, a szögelfordulás-mező, a feszültségi eredő tenzor és a nyomatéki tenzor elemei szintén Fourier-sorba fejthetők, melyek Fourier együtthatóit az elmozdulásfüggvény Fourier együtthatóira kapott megoldásból számíthatjuk.

A szerkezetre előírható perem- és illesztési feltételek tisztázása után az ismeretlen integrációs állandók meghatározására egy homogén lineáris egyenletrendszert kapunk, melynek nemtriviális megoldásához tartozik a szerkezet kritikus terhelése. A számítási eredményeket diagramok szemléltetik kör- il-

letve körgyűrű alakú lemezre, szimmetrikus és egyoldalú merevítés esetén. A sorfejtés egyes elemeihez tartozó kritikus terhek a héj méretének és a körgyűrű alakú lemez belső sugarának függvényében kerültek ábrázolásra, mely alapján meghatározhatók azok a méretviszonyok, ahol nem tengelyszimmetrikus alakváltozáshoz tartozik a legkisebb kritikus teher.

A továbbiak közbelső sugáron merevített kör- és körgyűrű alakú lemezre vonatkoznak. Ez esetben két részre kell bontani a lemezt. Következésképp a síkfeszültségi feladat megoldásánál a lemez mindkét tartományára külön megoldást állítunk elő, melyet az illesztési feltételek felhasználásával kapcsolunk össze. A lemez két részében ébredő élerők viszont mind leírhatók egyetlen terhelési paraméterrel. Ami a lemez és a héjfeladat megoldását illeti, azok elvben ugyanúgy állíthatók elő, mint azt a korábbi feladatoknál láttuk.

A számítási eredményeket a merevítő héj rögzített méretei mellett a héj sugarának függvényében adtuk meg tengelyszimmetrikus és nem tengelyszimmetrikus alakváltozás feltételezése mellett. A bemutatott diagramokról Leolvasható, hogy körlemez esetén tengelyszimmetrikus alakváltozáshoz tartozik a legkisebb kritikus teher, míg körgyűrű alakú lemez esetén megállapítható milyen méretviszonyok esetén tartozik nem tengelyszimmetrikus alakváltozáshoz a legkisebb kritikus teher.

4. Új tudományos eredmények

Az új tudományos eredmények a körhengerhéjjal merevített körlemez stabilitás vizsgálatával kapcsolatos alapkérdésekre vonatkoznak homogén izotrop és lineárisan rugalmas anyagú körlemez és héj feltételezése mellett. A merevítő héj a körlemez külső peremen, avagy a körlemez valamely közbelső sugaránál csatlakozik a körlemezhez. Maga a körlemez tömör, avagy lyukas lehet. A terhelés hatására kialakuló feszültségi állapotot tengelyszimmetrikusnak tételeztük fel, de a kihajlás (a horpadás) nem tengelyszimmetrikus is lehet.

Az új tudományos eredményeket a fentiekben (és a 2. szakaszban is) felsorolt célkitűzésekhez igazodva tekintjük át. Az egyes tézisekben a (rész)eredményeket a vonatkozó feladatra történő rövid utalást követően különálló pontokba szedve – ezeket rendre latin betűkkel jelöltük, pl.: (a), (b) és (c) – fogalmaztuk meg.

Az 1. Célkitűzéshez kapcsolódik az

1. TÉZIS: Tengelyszimmetrikus terhelés és alakváltozás feltételezése mellett tömör körlemez esetén

- 1.a. levezettem mind a szimmetrikusan, mind pedig az egyoldalúan merevített körlemezt tekintve a kritikus terhelést adó nemlineáris egyenlet(ek)et, majd

- 1.b. meghatároztam numerikus számításokkal a dimenziómentes kritikus teher lehetséges értékeit, a merevítést jellemző geometriai méretek növelésének korlátait. Eszerint a héj hosszának méretét a $\frac{h}{R_e} = 0,3$ értékig érdemes maximálisan megnövelni. Ennek eredményeként a merevítetlen lemezéhez képest 3,5–4,5-szeresére növekszik a kritikus teher értéke, azonos vastagságú lemez és héj esetén.
- 1.c. Meghatároztam a szimmetrikus elrendezésű héjat helyettesítő rugalmas támaszok rugóállandóit.

Vonatkozó publikációk: (1), (2), (3), (4), (12)

Az 2. Célkitűzéshez kapcsolódik a

2. TÉZIS: Peremén körhengerhéjjal kétoldalúan (egyoldalúan) merevített lyukas körlemez tengelyszimmetrikus stabilitási feladata esetén

- 2.a. numerikus algoritmust dolgoztam ki körgyűrű alakú lemez dimenziómentes kritikus terhelésének meghatározására.
- 2.b. Számpéldákon keresztül megvizsgáltam a belső perem sugara megváltozásának hatását különböző megtámasztási esetekre. Numerikusan megmutattam a kritikus teher nagyságának változását a lemez belső sugarának és a héj magasságának függvényében, illetve meghatároztam a merevítés hosszirányú geometriai mérete növelésének korlátait a szerkezet kritikus teherre gyakorolt hatásában.

Vonatkozó publikációk: (2), (5), (13)

Az 3. Célkitűzéshez kapcsolódik a

3. TÉZIS: Tengelyszimmetrikus terhelés és nem tengelyszimmetrikus alakváltozás feltételezése mellett a peremén körhengerhéjjal kétoldalúan (egyoldalúan) merevített kör és körgyűrű lemez stabilitási feladata esetén

- 3.a. előállítottam – Fourier-sorba fejtve a lemez elmozdulásmezéjét, valamint a héjfeladat megoldását adó Galjorkin-függvényt – a lemezfeladat, illetve a héjfeladat megoldását. A megoldás részfeladatoként tisztáztam a lemezben és héjban szereplő fizikai mennyiségek Fourier-sorai együtthatóira vonatkozó illesztési- és peremfeltételeket.
- 3.b. Numerikus eljárással meghatároztam az egyoldalúan illetve szimmetrikusan merevített tömör és lyukas körlemezek kritikus terhelését. Meghatároztam azonos vastagságú szerkezeti elemek esetén tömör körlemezekre, továbbá belső peremén befogott illetve görgősen megtámasztott körgyűrű alakú lemezre a héj magasságának, valamint lyukas körlemez esetén a belső sugárnak a kritikus teherre gyakorolt hatásait.

- 3.c. A számítási eredmények szerint a lemez és héj bizonyos méretviszonyai mellett – kis $\frac{h}{R_e}$ értékek esetén, mely a ρ_i belső sugár növelésével együtt növekszik – nem tengelyszimmetrikus kihajlási alakhoz tartozik lyukas körlemez tekintve a legkisebb kritikus terhelés.

Vonatkozó publikációk: (6), (7), (8), (9), (14), (15)

Az 4. Célkitűzéshez kapcsolódik a

4. TÉZIS: Közbülső helyen körhengerhéjjal merevített tömör és lyukas körlemez tekintve

- 4.a. modellt dolgoztam ki a kritikus teher meghatározására a tengelyszimmetrikus, illetve a nem tengelyszimmetrikus alakváltozás lehetőségét is számba véve.
- 4.b. Tömör körlemez esetén tengelyszimmetrikus alakváltozáshoz tartozik a legkisebb kritikus teher. A héj elhelyezkedését illetően pedig létezik optimum. Ennek a közelítő értéke.
- 4.c. Körgyűrű alakú lemez esetén görgő, illetve befogott megtámasztást vizsgáltam meg a héj sugarának függvényében. Az eredmények szerint nem tengelyszimmetrikus alakváltozáshoz tartozik a legkisebb kritikus teher, amennyiben a merevítő héj a lemez peremei közelében helyezkedik el, míg tengelyszimmetrikus alakváltozáshoz, ha a héj sugara a lemez egy belső tartományába esik. Ez a tartomány a méretét tekintve csökkenő tendenciát mutat, ha növeljük a körgyűrű alakú lemez belső sugarát.

Vonatkozó publikációk: (1), (10), (11)

5. Az eredmények alkalmazhatósága

Ha a külső nyomással terhelt körhengerhéj belső terét a héj középvonalára merőleges lyukas (speciális esetben nem lyukas) körlemezekkel tagoljuk részterekre, akkor a kapott eredmények felhasználásával ellenőrizhető, hogy a körlemezek elvesztik-e a stabilitásukat. Azt is számításba kell venni az ellenőrzés során, hogy nem feltétlenül a tengelyszimmetrikus alakváltozáshoz tartozik a legkisebb kritikus teher.

További alkalmazási lehetőséget kínál maga az oktatás, mivel az elérni vélt eredmények egy részét érdemes beemelni a stabilitás elméletével kapcsolatos tananyagokba.

6. További kutatási feladatok

Az értekezés gondolatmenete alapján eredményesen vizsgálható lenne polárisan ortotrop körlemez stabilitási feladata, ha ahhoz ugyancsak ortotrop héj

csatlakozik. Az utóbbi esetben azonban gondot jelenthet, és komoly vizsgálatokat igényel a héjelméleti egyenletek megoldásának előállítására.

További kérdésként vehető fel a kritikus terhelés számítása, ha nem tengelyszimmetrikus a teher, pl. átmérője mentén nyomott és héjjal merevített körlemez.

7. Publikációk az értekezés témájában

Idegen nyelvű folyóiratban közölt publikációk

- (1) Dániel Burmeister. Effects of shell-stiffening on the stability of circular plates. *Procedia Engineering*, 48:46–55, 2012.
- (2) Dániel Burmeister. Stability of shell-stiffened and axisymmetrically loaded annular plates. *Technische Mechanik*, 33(1):1–18, 2013.

Magyar nyelvű folyóiratban közölt publikáció

- (3) Dániel Burmeister. Külső peremén körhengerhéjjal merevített körlemezek stabilitásvizsgálatának egyes kérdései. *Multidiszciplináris Tudományok: A Miskolci Egyetem közleménye*, 2(1):21–30, 2012.

Idegen nyelvű konferencia kiadványban közölt publikációk

- (4) Dániel Burmeister. Stability of a circular plate stiffened with a cylindrical shell. In *XXIV. microCAD International Scientific Conference, Section G*, pp 25–30, 2010.
- (5) Dániel Burmeister. Stability of a circular plate with a hole stiffened by a cylindrical shell. In *7th International Conference of PhD Students*, pp 19–24, 2010.
- (6) Dániel Burmeister. Stability of a circular plate stiffened by a cylindrical shell. In *XXV. microCAD International Scientific Conference, Section E*, pp 69–74, 2011.
- (7) Dániel Burmeister. Stability of a circular plate stiffened by a cylindrical shell. In *The 4th International Conference on Computational Mechanics and Virtual Engineering – COMEC 2011*, pp 210–215, 2011.
- (8) Dániel Burmeister. Stability of shell-stiffened and axisymmetrically loaded annular plates. In *7th International Conference of the Croatian Society of Mechanics (7ICCSM2012)*, 2012.
- (9) Dániel Burmeister. Stability of shell-stiffened annular plates. In *The publications of the XXVI. microCAD International Scientific Conference*, 2012.

- (10) Dániel Burmeister. Stability of shell-stiffened circular plates. In *The publications of the XXVII. microCAD International Scientific Conference*, 2013.
- (11) Dániel Burmeister. Buckling of annular plates with intermediate shell-stiffening. In *The Publications of the MultiScience – XXVIII. microCAD International Multidisciplinary Scientific Conference*, 2014.

Magyar nyelvű konferencia kiadványban közölt publikációk

- (12) Dániel Burmeister. Peremén körhengerhéjjal merevített tömör körlemez stabilitása. In *Doktoranduszok fóruma: Gépészmérnöki és Informatikai Kar Szekciókiadványa*, pp. 40–45, 2010.
- (13) Dániel Burmeister. Stability of a circular plate with a hole stiffened by a cylindrical shell - further solutions. In *Doktoranduszok fóruma: Gépészmérnöki és Informatikai Kar Szekciókiadványa*, pp. 31–36, 2011.
- (14) Dániel Burmeister. Buckling of shell-stiffened and axisymmetrically loaded annular plates. In *Doktoranduszok fóruma: Gépészmérnöki és Informatikai Kar Szekciókiadványa*, pp. 18–23, 2012.

Szakmai előadás magyar nyelven

- (15) Dániel Burmeister. Körhengerhéjjal merevített körlemez stabilitásvizsgálata nem tengelyszimmetrikus alakváltozás mellett. In *11th Hungarian Conference on Theoretical and Applied Mechanics, HCTAM, 2011 (XI. Magyar Mechanikai Konferencia)*. Miskolci Egyetem, 2011.

Hivatkozások

- [1] G. H. Bryan. On the stability of a plate under thrust in its own plane with applications to the "buckling" of the sides of a ship. *Proceedings of the London Mathematical Society*, page 54–67, 1890.
- [2] A. Nádaí. Über das Ausbeulen von Kreisförmigen Platten. *Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure*, 59(11):221–224, 1915.
- [3] W.G. Bickley. Deflexions and vibrations of a circular elastic plate under tension. *Phil. Mag.*, 59:777–797, 1933.
- [4] U. Fischer. *Untersuchung der elastischen Beulung von Kreisringplatten unter der Wirkung rotationssymmetrischer Randkräfte*. PhD thesis, TH Magdeburg, 1965.
- [5] S. Majumdar. Buckling of a thin annular plate under uniform compression. *AIAA Journal*, 9:1701–1707, 1971.
- [6] G. Pardoën. Vibration and buckling analysis of axisymmetric polar orthotropic circular plates. *Computers & Structures*, 4:951–960, 1974.

- [7] G.K. Ramaiah and K. Vijayakumar. Elastic stability of annular plates under uniform compressive forces along the outer edge. *AIAA Journal*, 13:832–834, 1975.
- [8] C. M. Wang and T. M. Aung. Buckling of circular plates under intermediate and edge radial loads. *Thin-Walled Structures*, 43:1926–1933, 2005.
- [9] V. Thevendran and C. M. Wang. Buckling of Annular Plates Elastically Restrained against Rotation along Edges. *Thin-Walled Structures*, 25(3):231–246, 1996.
- [10] P. A. A. Laura, R. H. Gutiérrez, H. C. Sanzi, and G. Elvira. Buckling of circular, solid and annular plates with an intermediate circular support. *Ocean Engineering*, 27:749–755, 2000.
- [11] C. Y. Wang and C. M. Wang. Buckling of circular plates with an internal ring support and elastically restrained edges. *Thin-Walled Structures*, 39:821–825, 2001.
- [12] J. N. Reddy, C. M. Wang, and C. Y. Wang. *Exact Solutions for Buckling of Structural Members*. CRC Press, 2005.
- [13] C. M. Wang and T. M. Aung. Buckling of Circular Mindlin Plates with an Internal Ring Support and Elastically Restrained Edge. *Journal of Engineering Mechanics*, 131(4):359–366, 2005.
- [14] M. Troitsky. *Stiffened Plates*. Elsevier, 1971.
- [15] G. J. Simitses and C. M. Blackmon. Buckling of eccentrically stiffened, thin circular plates. *AIAA Journal*, 7(6):1200–1202, 1969.
- [16] R. S. Srinivasan and V. Thiruvengkatachari. Static and Dynamic Analysis of Stiffened Plates. *Computers & Structures*, 21(3):395–403, 1985.
- [17] T. Kumelj and F. Kosel. Elastic Stability of Thin Annular Plate Made of Rectilinearly Orthotropic Material. *Computers & Structures*, 54(1):141–145, 1995.
- [18] J. S. Phillips and J. F. Carney. Stability of an Annular Plate Reinforced With a Surrounding Edge Beam. *Journal of Applied Mechanics, ASME*, 41(2):497–501, 1974.
- [19] G. J. Turvey and N. G. V. Der Avanessian. Axisymmetric elasto-plastic large deflection response of ring stiffened circular plates. *International Journal of Mechanical Sciences*, 31(11-12):905–924, 1989.
- [20] G. J. Turvey and M. Salehi. Elasto-plastic large deflection response of pressure loaded circular plates stiffened by a single diameter stiffener. *Thin-Walled Structures*, 46:996–1002, 2008.
- [21] T. Irie, G. Yamada, and S. Aomura. Vibration and stability of stiffened annular plates. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 72:466, 1982.
- [22] N. Bareeva and A. D. Lizarev. On the stability of an annular plate under the influence of radial tensile forces. *Inzhenernyj Zhurnal. Mekhanika Tverdogo Tela*, 2:126–129, 1966.

- [23] J. N. Rossettos and W. H. Miller. On the Buckling of Ring-Stiffened Circular Plates. *Journal of Applied Mechanics, ASME*, 51(3):689–691, 1984.
- [24] J. N. Rossettos and G. Yang. Asymmetric Buckling of Ring Stiffened Circular Plates. *Journal of Applied Mechanics, ASME*, 53(2):475–476, 1986.
- [25] Y. Frostig and G. J. Simitses. Effect of boundary conditions and rigidities on the buckling of annular plates. *Thin-Walled Structures*, 5(4):229–246, 1987.
- [26] Y. Frostig and G. J. Simitses. Buckling of ring-stiffened multi-annular plates. *Computers & Structures*, 29(3):519–526, 1988.
- [27] I. Szilassy. *Külső peremén terhelt körgyűrűalakú tárcsa stabilitása*. PhD thesis, Miskolci Egyetem, 1971.
- [28] I. Szilassy. Stability of an annular disc loaded on its external flange by an arbitrary force system. *Publ. Techn. Univ. Heavy Industry. Ser. D. Natural Sciences*, 33:31–55, 1976.
- [29] V. Z. Vlasov. *General theory of shells and its applications in engineering, in: Selected Papers [in Russian]*. Vol. 1, Izd. Akad. Nauk SSSR, Moscow, 1962.
- [30] K. Jezsó. *Nem tengelyszimmetrikus terheltű vékony körhengerhéjak szilárdságtani vizsgálata*. PhD thesis, Miskolci Egyetem, 1980.